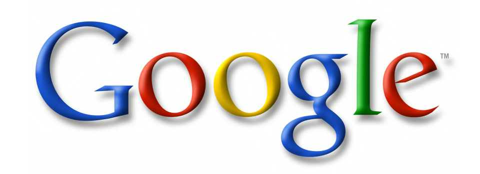
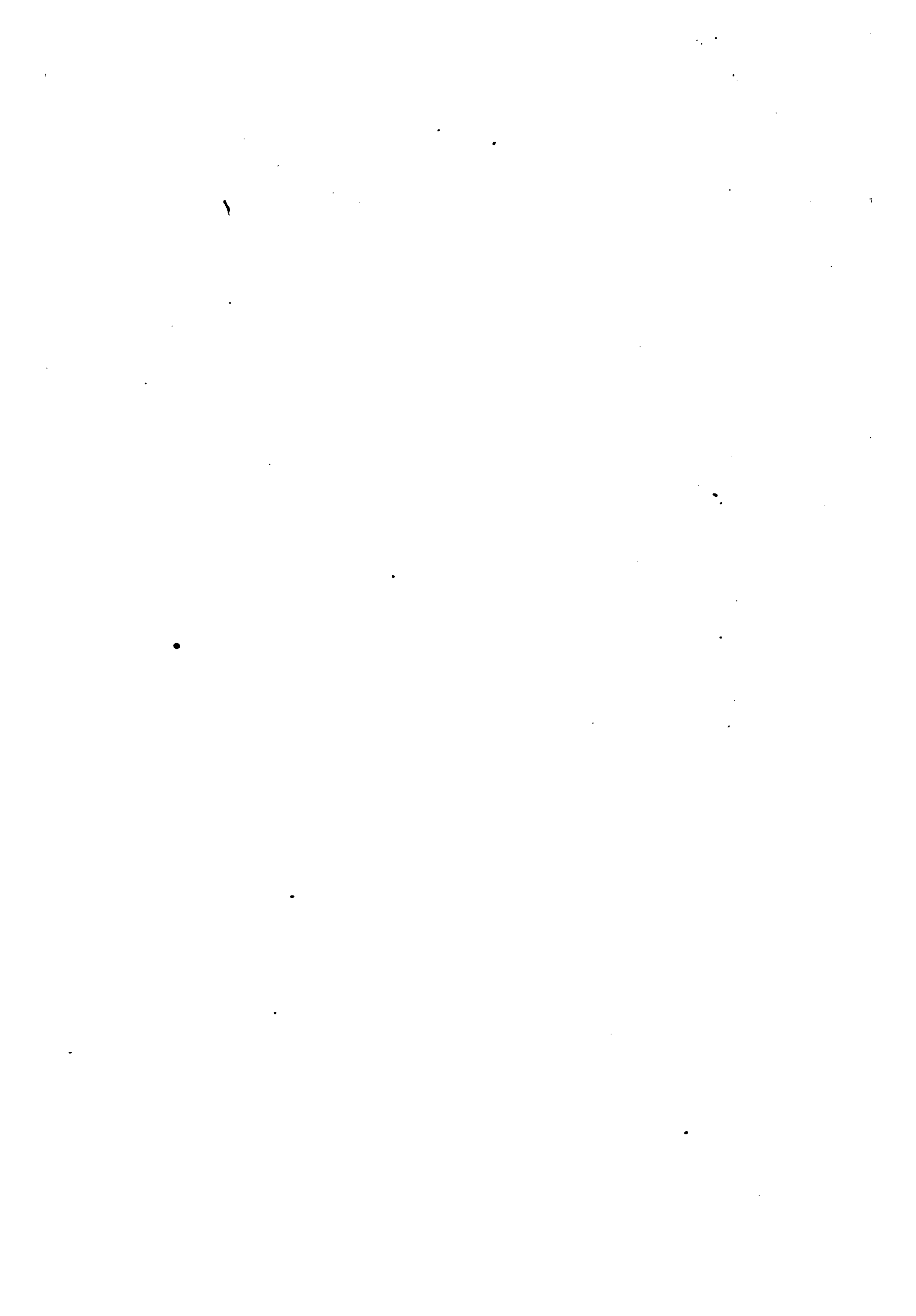






Ad. Wernickes

Lehrbuch der Mechanik

in elementarer Darstellung

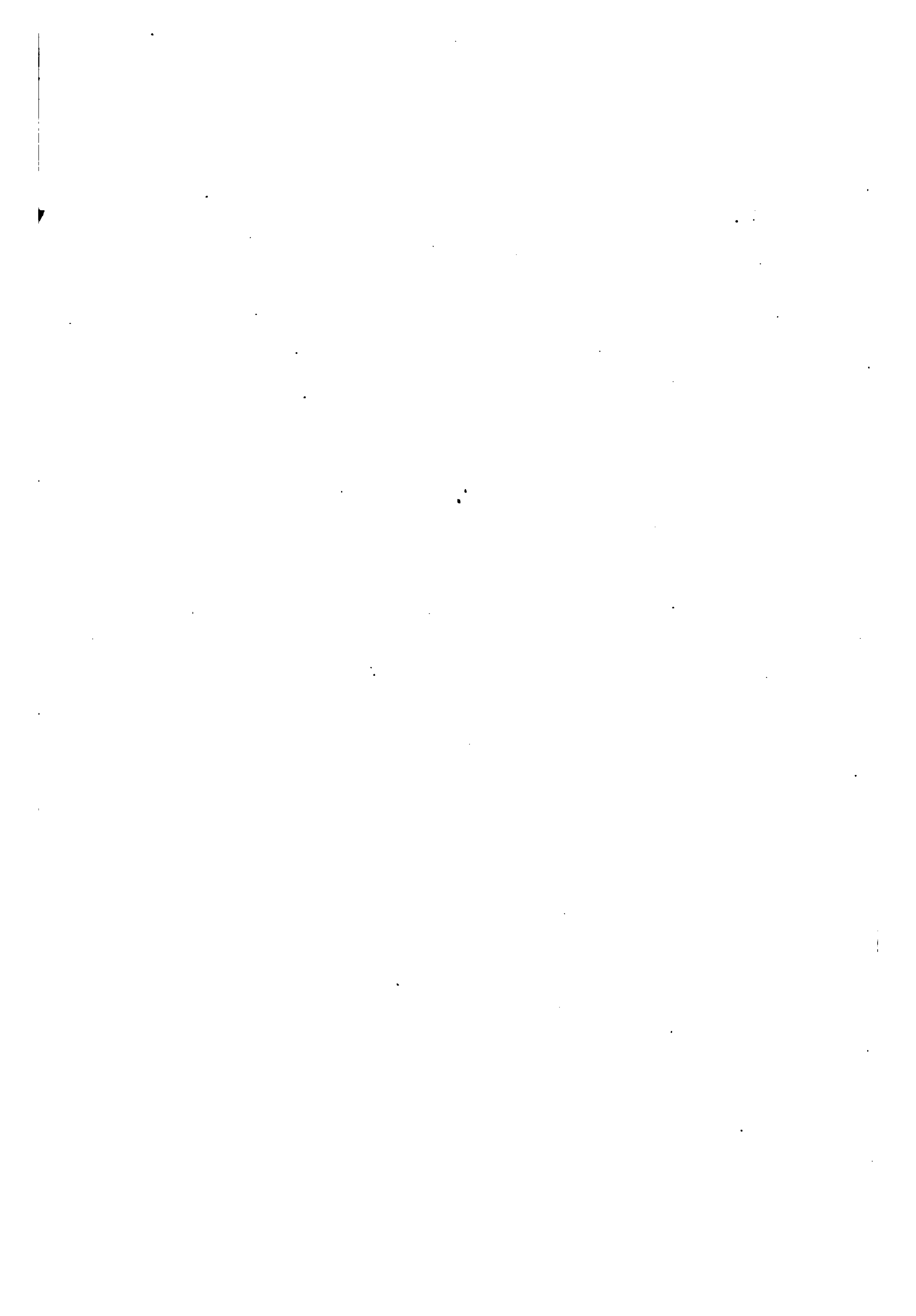
mit Anwendungen und Übungen aus den

Gebieten der Physik und Technik

Erster Teil

Mechanik fester Körper

Zweite Abteilung



Ad. Wernickes

Lehrbuch der Mechanik

in elementarer Darstellung

mit Anwendungen und Übungen aus den

Gebieten der Physik und Technik

In zwei Teilen

Erster Teil

Mechanik fester Körper

Von

Dr. Alex. Wernicke

Direktor der Städtischen Oberrealschule und Professor an der Herzogl. Technischen Hochschule zu Braunschweig

Vierte völlig umgearbeitete Auflage

Zweite Abteilung

Statik und Kinetik des starren Körpers

Mit eingedruckten Abbildungen

Braunschweig

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn

1901

Inhalt
für die
zweite Abteilung des ersten Bandes.

Dritter Abschnitt.
Dynamik des starren Körpers.
Erstes Kapitel (S. 315 bis 347).
Kräfte am starren Körper.

Anwendungen der Lehre von den Kräften am starren Körper (S. 348 bis 390).

Übungen zu der Lehre von den Kräften am starren Körper (S. 391 bis 408).

Zweites Kapitel (S. 409 bis 443).

Der Schwerpunkt.

Anwendungen der Lehre vom Schwerpunkte (S. 444 bis 457).

Übungen zur Lehre vom Schwerpunkte (S. 458 bis 466).

Drittes Kapitel (S. 467 bis 634).

Statik des starren Körpers.

Erste Abteilung (S. 467 bis 492).

Die Befestigungsreaktionen.

Anwendungen der Lehre von den Befestigungsreaktionen (S. 493 bis 518).

Übungen zur Lehre von den Befestigungsreaktionen (S. 519 bis 527).

Zweite Abteilung (S. 528 bis 566).

Die Reibungen.

Anwendungen der Lehre von den Reibungen (S. 567 bis 617).

Übungen zur Lehre von den Reibungen (S. 618 bis 634).

Viertes Kapitel (S. 635 bis 736).

Kinetik des starren Körpers.

Anwendungen der Kinetik des starren Körpers (S. 737 bis 787).

Übungen zur Kinetik des starren Körpers (S. 788 bis 809).

Dritter Abschnitt.

Dynamik des starren Körpers.

Erstes Kapitel.

Kräfte am starren Körper[1]).

53. **Veranschaulichung der wirkenden Kräfte.** Die Kräfte, welche einen starren Körper angreifen, können wir uns zunächst stets durch Belastungen (vergl. Fig. 1) veranschaulicht denken, die vermittelst eines Seiles und einer Rolle (Richtung) an irgend einer Stelle des Körpers (Angriffspunkt) zur Wirkung kommen. Als Einheit der Kraft dient der Zug oder Druck eines Kilostückes, der Kraftkilo oder kurz Kilo heißt.

54. **Statik und Kinetik.** Wenn sich Kräfte, welche an einem starren Körper wirken, gegenseitig zerstören, so sagt man, daß sie im Gleichgewichte stehen. Ein solches System von Kräften ist ohne Einfluß auf den Bewegungszustand des Körpers, so daß dieser z. B. unter dem Einfluß jener Kräfte in Ruhe bleibt, wenn er ohne deren Berücksichtigung in Ruhe ist. Man sagt in diesem Falle (Ruhe) auch von dem Körper, daß er sich im Gleichgewicht befindet, und dehnt diese Ausdrucksweise unter anderem auch aus auf Körper, die sich gleichförmig und geradlinig verschieben. Die Lehre vom Gleichgewichte der Kräfte (nebst ihren Anwendungen) wird als Statik bezeichnet. Wenn sich Kräfte, welche an einem starren Körper wirken, nicht gegenseitig zerstören, so ändern sie dessen Bewegungszustand. Die Lehre von diesen Änderungen wird Kinetik genannt.

55. **Kräfte an einem Punkte.** Wenn solche äußere Kräfte in beliebiger Anzahl in einem Punkte des starren Körpers angreifen, so lassen sie sich stets zu einer Resultante vereinigen, welche auch den Wert Null

---

[1]) Da es aus pädagogischen Gründen zweckmäßig erscheinen kann, die Mechanik mit diesem Kapitel zu beginnen, so ist dessen Eingang möglichst selbständig gehalten worden.

haben kann (Gleichgewicht), und zwar gemäß den Entwickelungen der Einleitung S. 24 u. f.

Liegen die Kräfte dabei in einer Geraden, so erfolgt ihre Vereinigung durch algebraische Addition (vergl. S. 27 u. 28).

Liegen sie dabei in einer Ebene, so ist eine ebene Polygonbildung (geometrische Addition) erforderlich oder die Beziehung auf ein zweiachsiges Koordinatenkreuz (vergl. S. 25 u. 30).

Anderenfalls ist eine räumliche Polygonbildung (geometrische Addition) nötig oder die Beziehung auf ein dreiachsiges Koordinatenkreuz (vergl. S. 25 u. 32).

Bei Zeichnungen arbeitet man am besten mit drei aufeinander senkrechten Projektionsebenen.

Liegen alle Kräfte in einer Ebene, so ist für jeden Punkt dieser Ebene als Drehpunkt der bereits aus dem ersten Lehrgange der Physik bekannte Momentensatz (vergl. S. 37) in Geltung. Vergl. auch S. 253.

Errichtet man in dem Drehpunkte, auf den sich der Momentensatz bezieht, zur Ebene ein Lot, so läßt sich dieses als die Achse auffassen, um welche die einzelnen Kräfte Drehungen hervorzurufen suchen. Denkt man sich in dieser Achse auf der Ebene stehend, und zwar einmal auf deren einer und dann auf deren anderer Seite, so kann man in beiden Fällen die Richtung von den Füßen zum Kopfe durch einen Pfeil bezeichnen. Wählt man einen dieser Pfeile beliebig aus, und bezeichnet man ferner die ihm entsprechende Halbachse als positiv, so kann man nun diejenigen Momente als positiv bezeichnen, welche für einen, in der positiven Halbachse stehenden Beobachter der Uhrzeigerbewegung entsprechen.

Wird die Ebene, welche die Kräfte enthält, verschoben, so daß der Drehpunkt auf der Achse gleitet, so ändern sich die Momente der einzelnen Kräfte und das Moment der Resultante nicht.

Da sich nun jede Kraft im Raume in eine Komponente, parallel zu einer solchen Achse, und in eine Komponente, senkrecht zu einer solchen Achse zerlegen läßt, so kann man den Begriff „Moment einer Kraft“ auch auf den Raum ausdehnen. Da die erste Komponente den Körper parallel zur Achse zu verschieben strebt, so benutzt man nur die zweite zur Bildung des Momentes, und zwar, indem man den kürzesten Abstand zwischen ihr und der Achse als dessen Arm einführt. Demgemäß gilt die Erklärung:

Unter dem Momente einer Kraft in Bezug auf eine Achse versteht man das Produkt aus dem kürzesten Abstande zwischen Kraft und Achse und der Kraftkomponente, senkrecht zur Achse. Das Vorzeichen des Momentes ist positiv oder negativ, je nachdem die entsprechende Drehung für einen, in der (willkürlich bestimmten) positiven Halbachse stehenden Beobachter mit der Uhrzeigerbewegung übereinstimmt oder nicht.

Projiziert man die Kräfte senkrecht auf eine Ebene, welche die Achse rechtwinklig schneidet, so sind diese Projektionen die erforderlichen Kraftkomponenten, während die zugehörigen Arme die Abstände dieser Komponenten von dem Schnittpunkte der Achse und der Ebene sind.

Da innerhalb dieser Ebene der Momentensatz gilt, so gilt er auch für die Kräfte im Raume.

Neben dem Momentensatz ist für Kräfte in einer Ebene auch noch der Arbeitssatz (vergl. S. 38) ein wichtiges Hülfsmittel der Untersuchung. Vergl. auch S. 242 u. f. Seine Ausdehnung auf Kräfte im Raume ist noch einfacher, als die entsprechende Erweiterung des Momentensatzes.

Bilden die Kräfte $K_1, K_2, \ldots, K_n$ bezw. mit der Richtung der geradlinigen Verschiebung die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, während die Resultante R mit dieser den Winkel α bildet, so gilt, falls man die positive X-Achse mit der Richtung der Verschiebung zusammenfallen läßt, nach Gleichung 8 und 9:

$$R \cos \alpha = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \cdots K_n \cos \alpha_n.$$

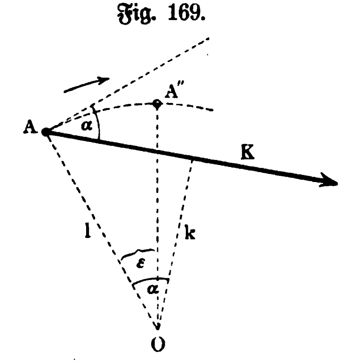
Durch Multiplikation mit der Verschiebung s entsteht hieraus die Gleichung

$$R s \cos \alpha = K_1 s \cos \alpha_1 + K_2 s \cos \alpha_2 + \cdots K_n s \cos \alpha_n,$$

und diese stellt unmittelbar den Arbeitssatz in der gesuchten Erweiterung dar.

Man hat sich dabei vorzustellen, daß der starre Körper zugleich mit den an ihm unveränderlich (nach Angriffspunkt, Wert und Richtung) wirkenden Kräften einer geradlinigen Verschiebung s unterliegt, für welche die Arbeit berechnet wird.

Fig. 169.



Für eine krummlinige Verschiebung derselben Art gilt der Arbeitssatz von Element zu Element.

Unterliegt der starre Körper zugleich mit den an ihm wirkenden Kräften einer Achsendrehung und zwar so, daß die Kräfte wieder relativ zum Körper unveränderlich sind, so treten Momentensatz und Arbeitssatz in eine enge Beziehung.

Da die, der Achse parallele Komponente einer Kraft bei Drehungen stets senkrecht zur Bahn ihres Angriffspunktes steht ($\cos 90^0 = 0$), so leistet bei solchen nur die andere Komponente, aus welcher das Moment gebildet wird, Arbeit. Bezeichnet O in Fig. 169 den Durchtritt der Achse, senkrecht zur Ebene der Zeichnung, und K die Komponente, senkrecht zur Achse, so hat der Weg des Angriffspunktes A von K für eine Drehung um ε die Größe $l \, arc \, \varepsilon$, so daß die entsprechende Arbeit für $\lim AA'' = 0$ anzusetzen ist als:

$$A = K \,.\, l \, arc \, \varepsilon \,.\, \cos \alpha.$$

Da $l \cos \alpha = k$ ist, so erhält man dafür auch den Wert:

$$R = (Kk) . arc \, \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \quad 93)$$

d. h. das Produkt aus Kraftmoment und Arcus der Drehung, so daß die Betrachtung ohne weiteres auf endliche Werte von $arc \, \varepsilon$ ausgedehnt werden kann (vergl. S. 256). Wendet man die oben gewonnene Formel bei Achsendrehungen auf ein System von Kräften mit dem Angriffspunkt A an, so

folgt aus der Gültigkeit des Momentensatzes auch für diesen Fall die weitere Gültigkeit des Arbeitssatzes.

Sind die Kräfte, relativ zum Körper, veränderlich, so muß der Arbeitssatz von Zeitelement zu Zeitelement aufgestellt werden, so daß erst ein Grenzübergang zu Ergebnissen für eine endliche Zeitdauer führt.

Im Gegensatze dazu gilt der Momentensatz, bei dessen Verwendung ja keine Lagenänderungen (Verrückungen) der Kräfte zu betrachten sind, immer für einen bestimmten Zeitpunkt.

Wenn $R = 0$ ist, so steht das System der Kräfte im Gleichgewicht und umgekehrt.

Für die Ebene läßt sich die Bedingung $R = 0$, da $R^2 = X^2 + Y^2$ ist, auflösen, in

$$X = 0 \quad \text{und} \quad Y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 94)$$

da R^2 als Summe zweier (stets positiver) Quadrate nur verschwinden kann, wenn die einzelnen Posten verschwinden.

Liegen X- und Y-Achse, wie es bei Anwendungen vielfach der Fall ist, bezw. horizontal und vertikal, so kann man die Regel bilden: Für das Gleichgewicht ist notwendig und hinreichend, daß sich die vertikalen Kraftkomponenten unter sich und daß sich die horizontalen Kraftkomponenten unter sich zerstören.

Im Raume läßt sich die Bedingung $R = 0$ entsprechend auflösen in:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 95)$$

Ist $[R] = 0$, so ist die Summe der Momente der einzelnen Kräfte stets Null, ebenso die Summe ihrer Arbeiten für jede beliebig erdachte (virtuelle) Lagenänderung (Verrückung).

Ist $[R]$ nicht Null, so hat das Moment von $[R]$ für jede Achse, welche die Gerade von R kreuzt, stets einen von Null verschiedenen Wert, ebenso die Arbeit von $[R]$ für jede Verrückung, die nicht auf $[R]$ senkrecht steht.

Für die Ebene folgt im besondern aus dem Verschwinden eines Momentes, daß entweder die entsprechende Kraft Null ist oder daß der entsprechende Arm Null ist, so daß die Kraft im letzteren Falle durch den Drehpunkt geht.

Es ist danach leicht, auch mit Hülfe des Momentensatzes und des Arbeitssatzes auf das Gleichgewicht zu schließen.

Die Entwickelungen dieses Paragraphen gelten nicht bloß für starre Körper, sondern für beliebige Körper, da hier nur ein Punkt des Körpers in Frage kommt, mit dem man ja auch stets eine Achse fest verbunden denken kann.

56. Kräfte mit zerstreuten Angriffspunkten. Greifen die Kräfte nicht in einem Punkte des starren Körpers an, so spricht man von „Kräften mit zerstreuten Angriffspunkten".

Da hier mindestens zwei verschiedene Punkte des Körpers in Betracht zu ziehen sind, so ist die Art ihrer Verbindung im Ganzen des Körpers von Bedeutung.

Für einen starren Körper gilt der Satz, daß Gegenkräfte, d. h. Kräfte von gleichem Werte und entgegengesetztem Sinne, welche in einer Geraden liegen, ohne Wirkung sind, also beliebig hinzugefügt oder fortgenommen werden dürfen.

Daraus folgt ferner, daß eine Kraft stets innerhalb der Geraden, auf der sie liegt, beliebig verschoben werden darf, da sie dabei im Verein mit einer festliegenden Gegenkraft in jeder Lage ohne Wirkung ist. Vergl. § 43 u. 44.

Das Moment einer Kraft ändert sich für eine bestimmte Achse durch die Verschiebung auf ihrer Geraden nicht, ebensowenig die Arbeit für eine bestimmte Verrückung.

Das Moment von Gegenkräften ist für jede Achse Null, ebenso die Arbeit für eine beliebige Verrückung.

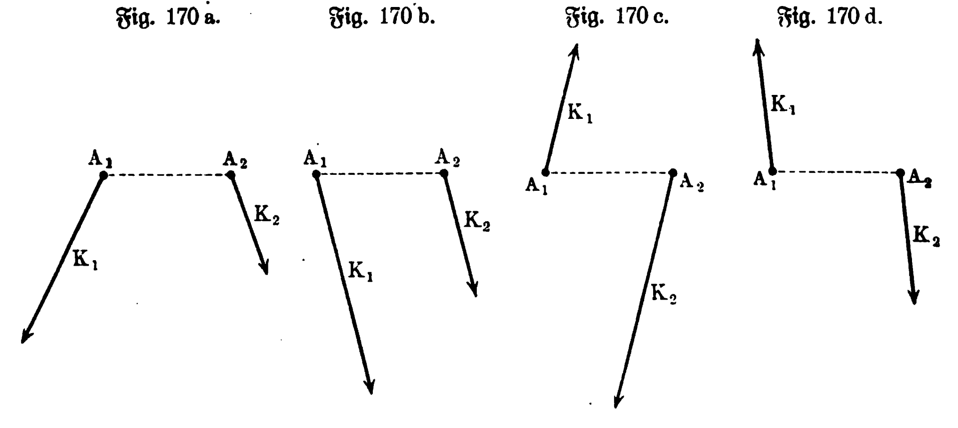
Auch für die Kräfte mit zerstreuten Angriffspunkten ist es zweckmäßig zu unterscheiden, ob sie innerhalb einer Geraden des starren Körpers liegen oder innerhalb einer seiner Ebenen oder ob keine dieser einfachen Anordnungen vorhanden ist.

Dabei ist zu bedenken, daß man für die notwendigen Konstruktionen beliebige Teile des Raumes als Erweiterungen des starren Körpers ansehen kann.

57. Kräfte mit zerstreuten Angriffspunkten innerhalb einer Geraden des starren Körpers. Da jede Kraft innerhalb der Geraden, auf der sie liegt, verschoben werden darf, so kann man allen Kräften irgend einen Punkt O der Geraden als gemeinsamen Angriffspunkt geben, und die Kräfte an diesem durch algebraische Addition vereinigen, wie bisher.

58. Kräfte in einer Ebene mit zerstreuten Angriffspunkten und Kräftepaare in einer Ebene. Bleibt man zunächst bei zwei Kräften $[K_1]$

Fig. 170 a. Fig. 170 b. Fig. 170 c. Fig. 170 d.



und $[K_2]$ stehen, so sind schon hier vier verschiedene Fälle zu unterscheiden, welche Fig. 170 a, b, c, d darstellt.

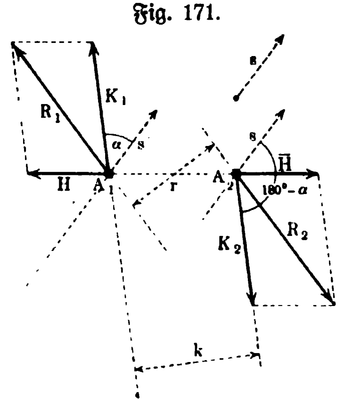
a) Die Geraden, auf welchen die Kräfte liegen, schneiden sich. Verschiebt man die Kräfte auf ihren Geraden, so daß deren Schnittpunkt gemeinsamer Angriffspunkt wird, so ist an diesem eine Vereinigung der Kräfte möglich. Man erhält eine, auf ihrer Geraden bewegliche Resultante R.

Der Momentensatz gilt weiter, wie leicht ersichtlich, ebenso der Arbeitssatz zunächst für Verschiebungen der Ebene und dann auch (mit Rücksicht auf den Momentensatz) für Drehungen der Ebene.

b) Die Kräfte sind gleichsinnig-parallel. Das Verfahren der Fig. 82 führt zu einer Resultante vom Werte $K_1 + K_2$, welche mit $[K_1]$ und $[K_2]$ gleichsinnig-parallel ist und die Verbindungsgerade der Angriffspunkte A_1 und A_2 innerlich im umgekehrten Kraftverhältnisse (vergl. Fig. 79) teilt. Wendet man den Momentensatz und den Arbeitssatz auf die Kräfte in A und in B und in O' der Fig. 82 an, so zeigt sich bei Addition der drei entsprechenden Gleichungen, daß beide Sätze weiter in Geltung sind.

c) Die Kräfte sind gegensinnig-parallel und von verschiedenem Werte. Das Verfahren der Fig. 81 führt zu einer Resultante vom Werte $K_1—K_2$, welche die Richtung der größeren Kraft hat und die Verbindungsgerade der Angriffspunkte A_1 und A_2 äußerlich im umgekehrten Kraftverhältnisse (vergl. Fig. 78) teilt; der Teilpunkt liegt stets auf der Seite der größeren Kraft.

Fig. 171.



Momentensatz und Arbeitssatz gelten weiter, wie unter b).

d) Die Kräfte sind gegensinnig-parallel und von gleichem Werte. Das Verfahren der Fig. 81 führt (vergl. auch § 49) nicht zu einer Resultante, es entstehen dabei vielmehr stets wiederum zwei gegensinnig-parallele Kräfte von gleichem Werte, wie Fig. 171 zeigt. Wendet man den Momentensatz bei beliebiger Lage des Drehpunktes auf die Kräfte in A_1 und in A_2 an, so erhält man, falls man das Moment von $[K]$ kurz durch M_K bezeichnet:

$$M_H + M_{K_1} = M_{R_1}$$
$$M_{\overline{H}} + M_{K_2} = M_{R_2}.$$

Durch Addition ergiebt sich, da $M_H + M_{\overline{H}} = 0$ ist:

$$M_{K_1} + M_{K_2} = M_{R_1} + M_{R_2}.$$

Bezeichnet man den Abstand von $[K_1]$ und $[K_2]$, deren Wert K heißen mag, durch k und den Abstand von $[R_1]$ und $[R_2]$, deren Wert R heißen mag, durch r, so ist, wie Fig. 142 zeigt:

$$M_{K_1} + M_{K_2} = -K.k \quad \text{und} \quad M_{R_1} + M_{R_2} = -R.r$$

und demnach gilt für jeden Drehpunkt:

$$K.k = R.r.$$

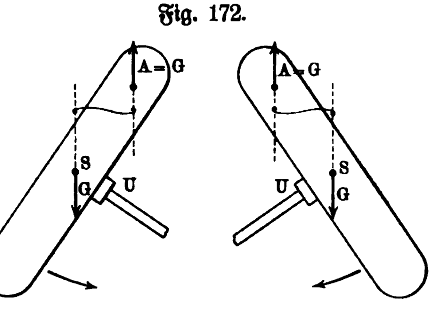
Die Arbeit bei einer Verschiebung $[s]$ der Ebene in sich, innerhalb welcher $[K_1]$ und $[K_2]$ unbeweglich sind, hat für $[K_1]$ den Wert $K_1 s \cos \alpha$ und für $[K_2]$ den Wert $K_2 s \cos (180^0 - \alpha)$, wie Fig. 171 zeigt, so daß die entsprechende Arbeitssumme den Wert Null hat.

Für eine Drehung um ε hat die Arbeit den Wert $(Kk) \, arc \, \varepsilon$ und zwar für jeden Drehpunkt.

Da sich in diesem Falle d) (Drehung) ganz andere Beziehungen ergeben, als in den Fällen a), b), c) (Verschiebung), so zeichnet man diesen Fall den drei anderen Fällen gegenüber ganz besonders aus. Man nennt die Kräfte $[K_1]$ und $[K_2]$ in ihrer Vereinigung ein **Kräftepaar** (Drehling, Drehpaar) und bezeichnet den Abstand k als dessen Arm oder Breite.

Beispiele für Kräftepaare: Die Drucke der beiden Hände an dem Querholz eines großen Bohrers oder dem Hebel eines Schraubstockes. Fig. 172 zeigt die Kräftepaare eines pendelnden Körpers, dessen horizontale Achse bei A durchtritt, für einen Ausschlag nach links und für einen Ausschlag nach rechts. Dem Gewichte G des Körpers, welches sich im Schwerpunkte S verdichtet, entspricht die Reaktion der Achse $A = G$, falls der Körper zunächst durch eine Stütze U im Gleichgewichte gehalten wird. Bei Wegfall der Stütze leitet das Kräftepaar der linken Figur eine Gegendrehung zum Uhrzeiger, das Kräftepaar der rechten Figur eine dem Uhrzeiger entsprechende Drehung ein.

Fig. 172.



Bei der Umformung, welche in den Fällen 1, 2 und 3 zu einer Resultante führte, geht das gegebene Kräftepaar stets wiederum in ein Kräftepaar über. Dabei behält das Produkt aus Kraft und Arm $(K.k)$ denselben Wert, man bezeichnet es deshalb als das **Moment des Kräftepaares** und zwar mit der üblichen Vorzeichenbestimmung.

Ein Vergleich der Fälle 3 und 4 zeigt, daß man im Falle 4 von einer, in unendlicher Ferne gelegenen Resultante von unendlich kleinem Werte sprechen kann, deren Moment also für jeden, im Endlichen gelegenen Drehpunkt die Form $0 \, . \, \infty$, eine Verschleierung von $K \, . \, k$, annehmen würde, während ihre Arbeit für jede endliche Verschiebung Null wäre.

Für Anwendungen tritt im Falle 4 an die Stelle des **Momentensatzes** der Satz, daß das Moment eines Kräftepaares bei allen seinen Umformungen denselben Wert behält, und an die Stelle des **Arbeitssatzes** der Satz, daß die Arbeit eines Kräftepaares vom Momente Mo für jede endliche Verschiebung den Wert Null und für jede Drehung um ε den Wert $Mo \, . \, arc \, \varepsilon$ hat.

Tritt zu den beiden Kräften $[K_1]$ und $[K_2]$ eine dritte Kraft $[K_3]$ hinzu, so führt jeder der vier Fälle wieder zu neuen Einteilungen je nach der Lage von K_3 u. s. f.

Infolgedessen muß man sich nach anderen Verfahren für die Behandlung

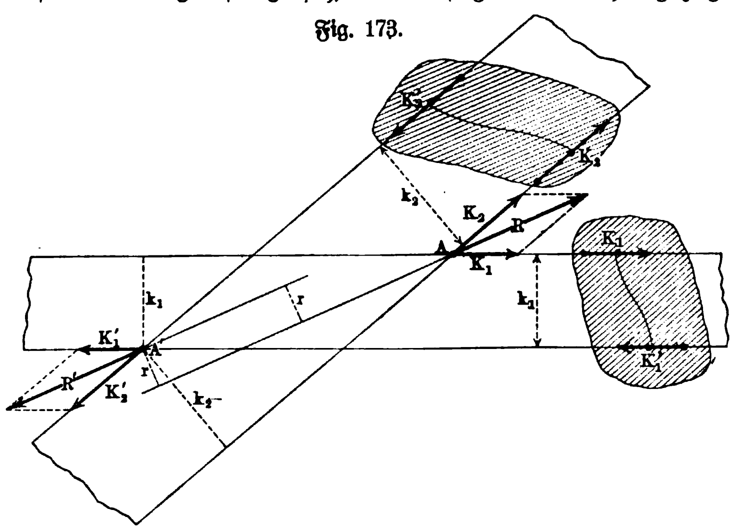
von n solchen Kräften umsehen; es giebt dafür sowohl eine befriedigende *Konstruktion* als auch eine befriedigende *rechnerische* Lösung.

Dabei spielt die Behandlung von Kräftepaaren gelegentlich eine Rolle.

Die vorstehenden Betrachtungen legen schon die Vermutung nahe, daß an einem Kräftepaare *lediglich* sein Moment das Wesentliche ist, daß also im besondern Kräftepaare von gleichen Momenten einander ersetzen können und daß sich mehrere Kräftepaare zu einem Kräftepaar zusammenfassen lassen, dessen Moment der (algebraischen) Summe der Momente der einzelnen Paare gleich ist.

Diese Vermutung bestätigt sich, wie die folgende Betrachtung zeigt.

Fig. 173.



Die beiden Geraden, auf denen die beiden Kräfte eines Paares beweglich sind, zerlegen die Ebene in drei Teile, von denen der *innere* als *Streifen* des betreffenden Paares bezeichnet werden mag.

Es gilt zunächst:

Lehrsatz I. *Zwei* Kräftepaare, *deren Streifen sich schneiden*, lassen sich durch *ein* Kräftepaar ersetzen, und zwar ist das Moment des resultierenden Paares (Mittelpaares) gleich der (algebraischen) Summe der Momente der komponierenden Paare (Seitenpaare).

Verschiebt man die Kräfte der, in Fig. 173 ursprünglich in der schraffierten Lage gegebenen Paare an die Punkte A und A', so lassen sich $[K_1]$ und $[K_2]$ zur Resultante $[R]$ und $[K_1']$ und $[K_2']$ zur Resultante $[R']$ zusammenfassen, welche wieder ein Paar bilden. Wendet man den Momentensatz für A' als Drehpunkt an, so liefert die Gruppe der Kräfte von A' keinen Beitrag, da jede Kraft dieser Gruppe durch A' geht. Man hat also:

$$(+ K_1 k_1) + (- K_2 k_2) = (- R r).$$

Da die Größen dieser Gleichung nicht bloß die Momente der Kräfte in A für A' als Drehpunkt darstellen, sondern auch die Momente der in Rede stehenden Paare, so ist unser Satz bewiesen.

Man überzeugt sich leicht, daß diese Betrachtung allgemein gilt.

Folgerung 1. Zwei Kräftepaare von entgegengesetzt-gleichen Momenten, deren Streifen sich schneiden, heben sich auf.

Da nach Voraussetzung die linke Seite der Gleichung von I den Wert Null hat, so ist $Rr = 0$, d. h. es ist $r = 0$, da R nicht verschwindet. Hier werden also $[R]$ und $[R']$ Gegenkräfte.

Folgerung 2. Jedes Kräftepaar läßt sich beliebig in seiner Ebene verrücken und auch durch ein beliebiges anderes Paar ersetzen, falls nur das Moment dasselbe bleibt.

Zwei Kräftepaaren I und II von gleichem Momente in beliebiger Lage läßt sich stets ein Kräftepaar III von entgegengesetzt-gleichem Momente (und zwar auf unendlich viele Weisen) so zuordnen, daß dessen Streifen die Streifen jener beiden schneidet. Da I und III sich zerstören und da II und III sich zerstören nach Folgerung 1, so bestimmen I, II und III zusammen ebensowohl II als I, d. h. I und II sind gegenseitig-ersetzbar, und es läßt sich I als eine Verrückung bezw. Umwandlung von II auffassen, und umgekehrt.

Folgerung 3. Zwei Kräftepaare lassen sich stets durch ein Kräftepaar ersetzen, und zwar ist das Moment des Mittelpaares gleich der (algebraischen) Summe der Seitenpaare.

Durch Folgerung 2 wird die Beschränkung der Lage vom Lehrsatz I aufgehoben.

Lehrsatz II. Beliebig viele Kräftepaare lassen sich stets durch ein Kräftepaar ersetzen, und zwar ist das Moment des Mittelpaares gleich der (algebraischen) Summe der Seitenpaare.

Man vereinigt erst zwei Paare zu einem, mit diesem das dritte u. s. f. und zeigt, daß die Art der Zusammenfassung das Ergebnis (Summe!) nicht beeinflußt. Der Sonderfall, in dem die Summe den Wert Null erhält, entspricht dem Gleichgewichte der Paare.

Fig. 174.

Für die graphische Addition giebt man allen Paaren entweder dieselbe Kraft P oder denselben Arm p, d. h. man löst für jedes Paar Kk entweder die Aufgabe $Kk = P \cdot x$, d. h. $P : K = k : x$ oder die Aufgabe $Kk = X \cdot p$, d. h. $p : k = K : X$.

Lehrsatz III. Ein Kräftepaar und eine Kraft (in dessen Ebene) tilgen sich niemals, ihre Vereinigung liefert vielmehr eine Kraft, welche sich als eine bestimmte Parallelverschiebung der ursprünglich gegebenen Kraft auffassen läßt.

Bildet man das gegebene Paar vom Momente Mo mit Kräften vom Werte K der gegebenen Kraft $[K]$, so ist der Arm k bestimmt durch die Gleichung $Kk = Mo$. Zeichnet man das Paar, wie Fig. 174 zeigt, so, daß die Kraft $[K]$ durch eine der Kräfte $[\overline{K'}]$ des Paares aufgehoben wird, so bleibt die Kraft $[K']$ übrig, welche mit $[K]$ in Wert und Richtung übereinstimmt, aber um k gegen diese verschoben erscheint.

Folgerung. Umgekehrt läßt sich eine Kraft $[K']$ um k verschieben, so daß $[K]$ entsteht, falls man das Paar aus den Gegenkräften von $[K']$ und $[\overline{K'}]$

oder ein Paar von gleichem Momente zusetzt. Während eine Kraft auf ihrer Geraden beweglich ist, erfordert jede andere Verschiebung dieser Geraden den Zusatz eines Paares, ebenso wie die Drehung den Zusatz einer Kraft erfordert.

59. Konstruktive (graphische) Behandlung der Aufgabe des § 58; Culmanns graphostatische Konstruktion. Fig. 175 stelle ein Seil dar, welches bei M und N befestigt ist und in den Punkten A_1, A_2, A_3 bezw. durch die Kräfte K_1, K_2, K_3 angegriffen wird, und zwar so, daß eine Bewegung des Seiles ausgeschlossen ist.

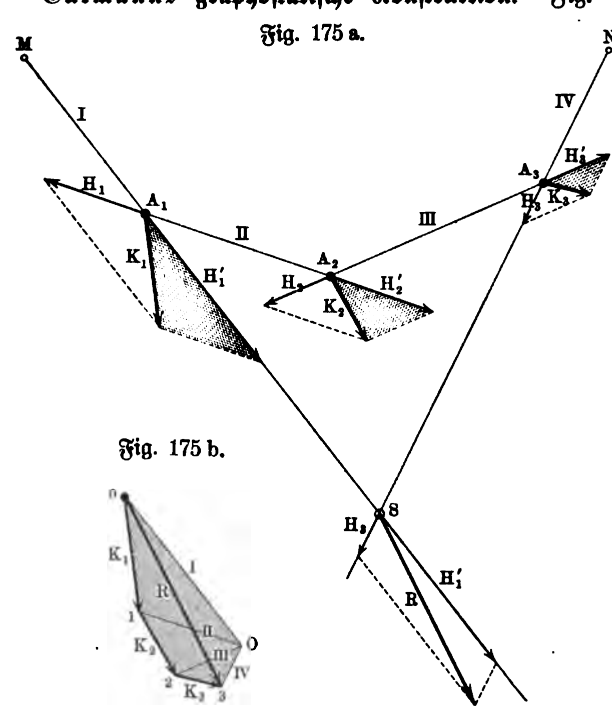


Fig. 175 a.

Fig. 175 b.

Zerlegt man die Kräfte K_1, K_2, K_3 bezw. nach den Richtungen der Seilstücke in A_1, A_2, A_3, wie es Fig. 175a zeigt, so sind $[H_1]$ und $[H'_2]$ ebenso wie $[H_2]$ und $[H'_3]$ Gegenkräfte, weil sich die Seilstücke II und III in Ruhe befinden, während $[H'_1]$ durch die Befestigung in M und $[H_3]$ durch die Befestigung in N aufgehoben wird. Das System $[K_1]$, $[K_2]$, $[K_3]$ wird durch die Zerlegung zurückgeführt auf das System $[H'_1]$, $[H_3]$, für welches an deren Schnittpunkte S Resultantenbildung eintreten kann, so daß $[R]$ die Resultante von $[K_1]$, $[K_2]$, $[K_3]$ ist.

Bildet man durch Verschiebung aus den schraffierten Dreiecken bei A_1, A_2, A_3 die Fig. 175b, so sind die Strecken $O0$, $O1$, $O2$, $O3$ bezw. parallel zu den Seilstücken I, II, III, IV und stellen der Reihe nach die Kraftwerte H'_1, H_1 und H'_2, H_2 und H'_3, H_3 dar, während 0 3 sowohl die Resultante von $[K_1]$, $[K_2]$, $[K_3]$, als auch die Resultante von $[H'_1]$ und $[H_3]$ darstellt, welche auch im Punkt S der Fig. 175a gezeichnet ist.

Die Gegenkräfte von $[H'_1]$ und $[H_3]$, welche als Reaktionen in M und N auftreten, stehen mit der Resultante $[R]$ im Gleichgewichte.

Culmanns graphostatische Konstruktion besteht nun darin, daß man die gegebenen Kräfte mit zerstreuten Angriffspunkten stets als solche Kräfte an einem Seile ansieht und dieses gemäß Fig. 175b in die Figur, welche Fig. 175a entspricht, einzeichnet.

Man bildet dazu zunächst (vergl. Fig. 175 b) aus den gegebenen Kräften $[K_1]$, $[K_2]$, ..., $[K_n]$ das Polygon $0\ 1\ 2 \ldots n$, welches **Kraftpolygon** oder **Krafteck** heißt, und schließt es, falls es sich nicht von selbst schließt, durch die Strecke $0n$, wählt dann einen beliebigen Punkt O der Ebene als **Pol** aus und zieht durch diesen die Polstrahlen $O0$, $O1$, $O2$, ..., On. Ferner zieht man (vergl. Fig. 175 a) von einem beliebigen Punkte M aus eine Parallele zu $O0$, welche die Gerade der ersten Kraft $[K_1]$ in A'_1 schneidet, zieht durch A'_1 eine Parallele zu $O1$, welche die Gerade der zweiten Kraft $[K_2]$ in A'_2 schneidet u. s. f., bis man zu der Parallele durch A'_n zu On gelangt, welche für das **Seilpolygon** oder **Seileck** $MA'_1A'_2 \ldots A'_nN$ das letzte Stück A'_nN liefert. Die offenen Enden MA'_1 und NA'_n des Seilecks schneiden sich in einem Punkte S, wenn $O0$ und On der Fig. 175 b nicht aufeinander fallen; durch ihn geht die Resultante $[R]$ des Kräftesystems, welche durch die Strecke $0n$ in Fig. 175 b der Größe und Richtung nach geliefert wird.

Fig. 176 a.

Fig. 176 b.

Diese Konstruktion ist in Fig. 176 für vier Kräfte ($n = 4$) dargestellt; schiebt man die Kräfte auf ihren Geraden bezw. von A_1 nach A'_1, von A_2 nach A'_2 u. s. f., so entspricht die Fig. 176 genau der Fig. 175. Es liefert $0\,O$ die Kraft $[H'_1]$, $O1$ die Kraft $[H_1]$ und $1\,O$ die Kraft $[H'_2]$, u. s. w.

Solange der Punkt S als ein, im Endlichen gelegener Schnittpunkt vorhanden ist, hat das Kräftesystem eine Resultante; dies ist stets der Fall, solange sich das Krafteck der Fig. 176 b nicht von selbst schließt.

Schließt sich das Krafteck der Fig. 176 b von selbst, so daß n auf 0 fällt, so fallen auch $O0$ und On aufeinander und deshalb sind die offenen Enden des Seilecks parallel. Während die Resultante $0n$ den Wert Null

hat, treten in den offenen Enden des Seilecks die gleichen und entgegengesetzt-gerichteten Kräfte $0\,O$ und $O\,n$ auf, welche ein Kräftepaar bilden, falls die entsprechenden Seilenden nicht den Abstand Null haben.

Demgemäß sind folgende Fälle zu unterscheiden:

I. Das Krafteck ist offen: das Kräftesystem führt auf eine Resultante R.

II. Das Krafteck ist geschlossen und das Seileck ist offen: das Kräftesystem führt auf ein Kräftepaar.

III. Das Krafteck ist geschlossen und das Seileck ist geschlossen: das Kräftesystem führt weder auf eine Resultante, noch auf ein Kräftepaar, d. h. es zerstört sich in sich selbst (Gleichgewicht).

Besonders hervorgehoben werden muß, daß in Fig. 175 das Seileck einem wirklichen Seile entspricht, in welchem die einzelnen Seilstücke durch Gegenkräfte gezogen werden, während bei der Konstruktion der Fig. 176 im Seileck auch Seiten auftreten können, welche durch Gegenkräfte gedrückt werden. Solche Seiten müßte man sich durch Stangen veranschaulichen, da Seilstücke unter dem Drucke von Gegenkräften nicht im Gleichgewichte sind. Diese Veranschaulichung könnte man auch auf die Seiten ausdehnen, welche unter dem Zuge von Gegenkräften stehen, so daß es zweckmäßiger wäre, überhaupt statt des Seilpolygons ein Polygon von eingelenkten Stangen mit Knotenbelastung der Veranschaulichung zu Grunde zu legen und von einem Stangenpolygon bezw. Stangeneck zu sprechen, statt von einem Seilpolygon bezw. Seileck. Sieht man von der Veranschaulichung von Fall zu Fall ab, so kann man natürlich auch an dem Namen „Seileck“ festhalten.

Die verschiedenen möglichen Lagen des Poles und des Seilecks geben zu mannigfachen Untersuchungen Veranlassung. Hier mag nur auf die besonderen Beziehungen hingewiesen werden, welche entstehen, wenn man den Pol in den Angriffspunkt der ersten Kraft legt; das erste Seilstück wird dabei ein Punkt, dem in der Hauptfigur irgend ein Punkt der ersten Kraft entspricht, das zweite Seilstück erhält die Richtung der ersten Kraft, das dritte die Richtung der Mittelkraft aus der ersten und zweiten Kraft, das vierte die Richtung der Mittelkraft aus den ersten drei Kräften u. s. f. Ein solches Seileck heißt Mittelkraftlinie.

Man überzeugt sich leicht, daß der Momentensatz weiter gilt, falls eine Resultante vorhanden ist. Bezeichnet man wieder für einen beliebigen Drehpunkt das Moment von K kurz durch M_K, so gilt für die Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 in Fig. 175

$$M_{K_1} = M_{H_1} + M_{H'_1}$$
$$M_{K_2} = M_{H_2} + M_{H'_2}$$
$$M_{K_3} = M_{H_3} + M_{H'_3}$$

und man erhält durch Addition

$$M_{K_1} + M_{K_2} + M_{K_3} = M_{H'_1} + M_{H_3}.$$

Ist das Krafteck offen, so gilt ferner für den Angriffspunkt S

$$M_{H'_1} + M_{H_3} = M_R$$

d. h.

$$M_{K_1} + M_{K_2} + M_{K_3} = M_R.$$

Ist das Krafteck geschlossen, so stellt $M_{H'_1} + M_{H_3}$ das Moment des resultierenden Paares dar, falls nicht H'_1 und H_3 Gegenkräfte sind.

Demgemäß erweitert sich der Momentensatz zu folgender Form: Die (algebraische) Summe der Momente der Kräfte ist gleich dem Momente der resultierenden Kraft bezw. gleich dem Momente des resultierenden Paares.

Jene Summe ist für jeden Drehpunkt Null, wenn weder eine resultierende Kraft noch ein resultierendes Paar vorhanden ist (Gleichgewicht).

Eine geeignete graphische Bestimmung des Momentes für den Fall einer Resultante zeigt Fig. 176. Für Punkt D als Drehpunkt ist zunächst $-rR$ das Moment des Kräftesystems, welches durch die doppelte schraffierte Dreiecksfläche von der Basis $[R]$ dargestellt wird. Zieht man durch D eine Parallele zu $[R]$, auf welcher die offenen Seiten des Seilecks das Stück $UV = d$ bestimmen, so sind $\triangle\ SVU$ in der Hauptfigur und $\triangle\ O04$ in der Nebenfigur einander ähnlich. Fällt man noch von O auf $[R]$ ein Lot P (Poldistanz), so gilt

$$r : d = P : R,$$

d. h.

$$rR = dP.$$

Danach stellt auch $-dP$ das Moment des Kräftesystems dar.

Ebenso läßt sich der Arbeitssatz übertragen, wobei zu bedenken ist, daß ein Paar vom Moment Mo bei Verschiebungen die Arbeit Null und bei Drehungen (ε) die Arbeit $Mo\ .\ arc\,\varepsilon$ leistet.

Aus virtuellen Verrückungen kann man hier folgendermaßen mit Hülfe des Arbeitssatzes auf das Gleichgewicht des Kräftesystems schließen.

Ist die Arbeit für eine Verschiebung Null, so muß eine etwa vorhandene Resultante senkrecht zur Richtung der Verschiebung stehen, d. h. es kann eine derartige Resultante oder auch ein Paar vorhanden sein. Hat die Arbeit auch für eine zweite Verschiebung, welche nicht die Richtung der ersten hat, den Wert Null, so müßte eine etwa vorhandene Resultante auf beiden Verschiebungsrichtungen senkrecht stehen, was unmöglich ist, d. h. es kann keine Resultante, wohl aber ein Paar vorhanden sein. Hat die Arbeit auch noch für eine Drehung den Wert Null, so ist auch das Vorhandensein eines Paares ausgeschlossen, d. h. es herrscht Gleichgewicht.

Auch mit Hülfe des Momentensatzes kann man auf das Gleichgewicht schließen.

Hat das Moment für einen Drehpunkt A den Wert Null, so kann kein Paar vorhanden sein, wohl aber eine Resultante, welche A schneidet. Hat das Moment auch für einen zweiten Drehpunkt den Wert Null, so kann eine Resultante vorhanden sein, welche durch A und B geht. Hat das Moment noch für einen dritten Drehpunkt C, welcher mit A und B nicht in einer Geraden liegt, den Wert Null, so ist auch das Vorhandensein einer Resultante, welche durch A, B, C gehen müßte, ausgeschlossen, d. h. es herrscht Gleichgewicht. Die Bedingungen des Gleichgewichts sind also:

1. Schluß des Kraftecks und des Seilecks in der graphostatischen Konstruktion.
2. Nullwerden der Arbeit für zwei virtuelle Verschiebungen und eine virtuelle Drehung.
3. Nullwerden der Momente für die Ecken eines Dreiecks.

60. Rechnerische Behandlung der Aufgabe des § 58. Man verschiebt alle Kräfte, unter Hinzufügung der entsprechenden Kräftepaare (vergl. Fig. 174) an den Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, wie es Fig. 177 für eine Kraft $[K]$ zeigt. Durch O ist eine Parallele zu der in A angreifenden Kraft $[K]$ gelegt und auf dieser Parallelen sind die Gegenkräfte $[K']$ und $[\overline{K'}]$ angebracht vom Werte $[K]$, so daß die in O angreifende Kraft $[K']$ und das Paar aus $[K]$ und $[\overline{K'}]$ die in A angreifende Kraft $[K]$ ersetzt.

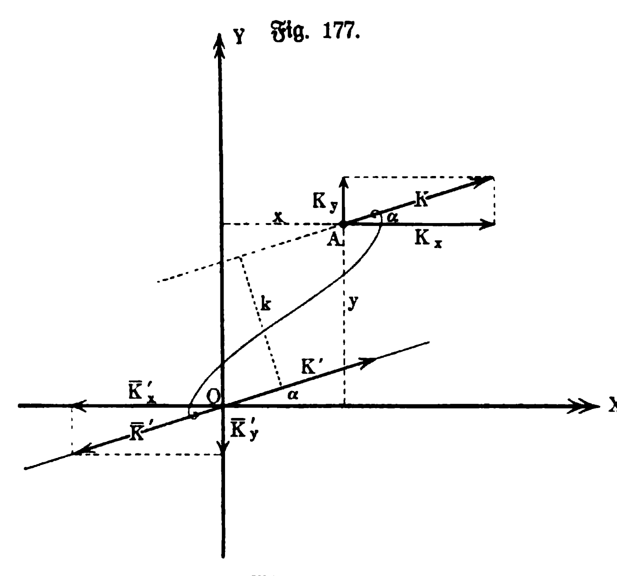


Fig. 177.

Um das Moment des Paares zu berechnen, zerlegt man am besten $[K]$ und $[\overline{K'}]$ nach den Achsen, so daß zwei Paare, $[K_x]$ und $[\overline{K'_x}]$ am Arm y und $[K_y]$ und $[\overline{K'_y}]$ am Arm x entstehen, deren Momente bezw. $+ K_x \,.\, y$ und $- K_y \,.\, x$ sind. Das Paar hat demnach (vergl. S. 323) das Moment

$$Mo = + K_x \,.\, y - K_y \,.\, x$$

und dabei ist

$$K_x = K \cos \alpha$$

und

$$K_y = K \sin \alpha.$$

Es sei nun ein System von Kräften gegeben nach folgendem Schema:

Werte der Kräfte	K_1,	K_2,	. . ., K_n
Neigung gegen die X-Achse. .	α_1,	α_2,	. . ., α_n
Koordinaten der Angriffspunkte	(x_1, y_1),	(x_2, y_2),	. . ., (x_n, y_n).

Wendet man das Verfahren der Fig. 177 auf jede dieser Kräfte an, so entsteht:

1. ein System von Kräften $[K_1']$, $[K_2']$, . . ., $[K_n']$ in O,
2. ein System von Paaren aus $[K_1]$ und $[\overline{K_1'}]$ u. s. w.

Da die Kräfte der Nr. 1 denselben Angriffspunkt O haben, so bestimmt sich ihre Resultante R nach dem Ansatze:

$$\left.\begin{aligned} X &= K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \cdots K_n \cos \alpha_n \\ Y &= K_1 \sin \alpha_1 + K_2 \sin \alpha_2 + \cdots K_n \sin \alpha_n \\ R^2 &= X^2 + Y^2, \quad \cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \sin \alpha = \frac{Y}{R} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 96)$$

Das resultierende Paar von Nr. 2 hat (vergl. S. 328) das Moment $\Sigma (K_p \cos \alpha_p\, y_p - K_p \sin \alpha_p\, x_p) =$

$$\left.\begin{array}{l} Mo = (K_1 \cos \alpha_1\, y_1 - K_1 \sin \alpha_1\, x_1) + (K_2 \cos \alpha_2\, y_2 - K_2 \sin \alpha_2\, x_2) \\ \quad + \cdots (K_n \cos \alpha_n\, y_n - K_n \sin \alpha_n\, x_n) \end{array}\right\} \quad 97)$$

und ist gemäß dem Werte und dem Vorzeichen von Mo leicht graphisch darzustellen.

Die **allgemeine** Gültigkeit der Formeln bei beliebiger Lage der Kräfte folgt für Nr. 1 aus den früheren Betrachtungen, für Nr. 2 aus der Bemerkung, daß die rechte Seite der Gleichung für Mo genau so gebildet ist, als wenn für die gegebenen **Kräfte** in Bezug auf den Drehpunkt O nach dem Momentsatze das Moment der Resultante gebildet werden sollte, an dessen Stelle hier Mo tritt.

Demgemäß sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1. R und Mo sind von Null verschieden (Verschiebung).
2. R ist von Null verschieden und $Mo = 0$ (Verschiebung).
3. $R = 0$ und Mo ist von Null verschieden (Drehung).
4. $R = 0$ und $Mo = 0$ (Gleichgewicht).

Der Fall 1 läßt sich gemäß Fig. 174 auf Fall 2 zurückführen, man hat Mo darzustellen als $R \,.\, r$, so daß $r = \frac{Mo}{R}$ ist, d. h. man erhält eine Resultante $[R']$ vom Werte R, welche gegen die ursprünglich gefundene Resultante $[R]$ vom Werte R um r verschoben ist.

Ist (ξ, η) ein Punkt der Resultante $[R']$, so läßt sich $Mo = Rr$ auch darstellen als $R \cos \alpha \,.\, \eta - R \sin \alpha \,.\, \xi$, d. h. die Gleichung der Geraden, auf der $[R']$ liegt, lautet

$$R \cos \alpha \,.\, \eta - R \sin \alpha \,.\, \xi = Mo$$

oder auch

$$X\eta - Y\xi = Mo,$$

wobei

$$X = \Sigma K_p \cos \alpha_p, \qquad Y = \Sigma K_p \sin \alpha_p$$

und

$$Mo = \Sigma (K_p \cos \alpha_p\, y_p - K_p \sin \alpha_p\, x_p)$$

ist.

Unter den Punkten dieser Geraden zeichnet man gelegentlich als **Mittelpunkt des Kraftsystems** den Punkt (ξ_0, η_0) aus, für welchen

$$\xi_0 = \frac{\Sigma K_p \sin \alpha_p\, x_p}{\Sigma K_p \sin \alpha_p}$$

und

$$\eta_0 = \frac{\Sigma K_p \cos \alpha_p\, y_p}{\Sigma K_p \cos \alpha_p}$$

ist.

Sind alle Kräfte gleichsinnig-parallel, so ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_n$ und man hat:

$$\xi_0 = \frac{\Sigma K_p x_p}{\Sigma K_p} \quad \text{und} \quad \eta_0 = \frac{\Sigma K_p y_p}{\Sigma K_p},$$

d. h. man gelangt zurück zu der Bestimmung der Formel Nr. 66.

Hätte man den Anfangspunkt O des Koordinatenkreuzes von vornherein auf die Gerade von $[R']$ gelegt, so wäre man sofort zu Fall 2 gekommen, anstatt zu Fall 1.

Daß man diese Lage von vornherein nicht bestimmen kann, muß als ein Nachteil dieses Verfahrens bezeichnet werden, gegenüber der graphostatischen Konstruktion, welche die drei vorhandenen Fälle ohne weiteres erkennen läßt.

Jedenfalls hat man zu beachten, daß die Zurückführung des Kräftesystems auf eine Kraft oder auf ein Paar abhängig ist von der Wahl des Punktes O, welcher Zurückführungspunkt genannt werden kann, daß aber alle möglichen Zurückführungen insofern wieder gleichwertig sind, als sie dasselbe System darstellen.

Die Bedingungen des Gleichgewichtes $R = 0$ und $Mo = 0$ lassen sich wiederum auflösen in:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Mo = 0,$$

d. h. man hat hier (vergl. S. 327) als Bedingungen:

Nullwerden der Summe der Kraftkomponenten für die X-Achse und für die Y-Achse und Nullwerden der Drehung für deren Durchschnitt bezw. überhaupt für einen beliebigen Punkt der Ebene.

61. Kräfte im Raume mit zerstreuten Angriffspunkten und Kräftepaare im Raume. Da jede Bewegung eines starren Körpers auf elementare Schraubungen (vergl. S. 117 und S. 136) zurückgeführt werden kann, so kann die Wirkung eines beliebigen, einen starren Körper angreifenden Kräftesystems höchstens einer solchen Schraubung entsprechen, d. h. es muß sich auf eine Kraft $[R]$, die einer Verschiebung entspricht, und auf ein Kräftepaar $[Mo]$, dem eine Drehung entspricht, zurückführen lassen und zwar so, daß die Ebene des Paares auf der Geraden der Kraft senkrecht steht; diese Gerade heißt auch hier Centralachse.

Daß ein Kräftesystem anderseits im allgemeinen auf unendlich-viele Arten auf eine Kraft und auf ein Kräftepaar, dessen Ebene die Gerade der Kraft nicht unter rechtem Winkel schneidet, zurückgeführt werden kann, folgt aus den Betrachtungen über Bewegungen starrer Körper, welche der Darstellung der Schraubung vorausgingen.

Eine Kraft $[R]$ und ein Kräftepaar stellen zusammen zunächst drei Kräfte dar, man kann aber diese drei Kräfte auf zwei windschiefe Kräfte zurückführen, d. h. auf zwei Kräfte, die auf sich kreuzenden Geraden liegen; man hat dazu nur die Kraft auf ihrer Geraden und das Paar in seiner Ebene so zu verschieben, daß die Kraft $[R]$ mit einer der Kräfte des Paares zu einer Mittelkraft zusammengefaßt werden kann. Neben die Kraft (Verschiebung) und neben das Kräftepaar (Drehung) tritt also hier das System zweier windschiefer Kräfte (Schraubung), welches bei Zusatz von Gegenkräften stets wieder ein solches System bleibt[1]).

Sollen drei Kräfte im Raume sich zerstören, so muß die eine die Mittelkraft der beiden anderen sein, d. h. diese beiden müssen in einer Ebene

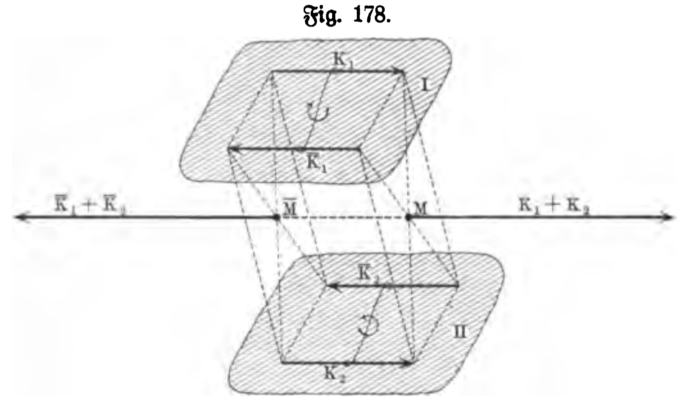
[1]) Die thatsächliche Bewegung wird außerdem auch durch die Massenverteilung des Körpers bestimmt.

liegen und kein Paar darstellen und in dieser Ebene muß auch die dritte Kraft liegen. Man kommt also zurück auf drei Kräfte in einer Ebene, deren Geraden durch einen Punkt (der auch unendlich fern sein kann) gehen.

Demnach unterliegen die Kräfte im Raume, falls sie im Gleichgewichte stehen sollen, dem Satze der drei Vektoren (vergl. S. 30), welcher hier als Satz der drei Kräfte bezeichnet wird.

Für eine genauere Betrachtung eines räumlichen Kraftsystems ist es zweckmäßig, zunächst die Sätze über Kräftepaare zu ergänzen.

Fig. 178.



Lehrsatz I. Zwei Kräftepaare von entgegengesetzt = gleichem Moment, welche in Parallelebenen liegen, heben sich auf.

Nachdem man die Paare in ihren Ebenen so umgeformt hat, daß sie kongruente Parallelogramme darstellen, giebt man ihnen die in Fig. 178 dargestellte Lage, so daß durch entsprechende Verbindung ein Parallelepipedon entsteht. Die Resultante $[K_1 + K_2]$ von $[K_1]$ und $[K_2]$ und die Resultante $[\overline{K_1} + \overline{K_2}]$ von $[\overline{K_1}]$ und $[\overline{K_2}]$ zerstören sich gegenseitig, wie Fig. 178 zeigt.

Fig. 179.

Folgerung 1. Die Ebene eines Paares darf mit diesem im Raume beliebig verschoben werden.

Folgerung 2. Paare in parallelen Ebenen lassen sich vereinigen, als wenn sie in einer Ebene lägen, parallel zu den gegebenen.

Lehrsatz II. Zwei Kräftepaare, deren Ebenen sich schneiden, lassen sich zu einem Kräftepaar vereinigen.

Nachdem man die Paare in ihren Ebenen so umgeformt hat, daß sie denselben Arm h haben, bewegt man sie in ihren Ebenen so, daß eine Strecke h

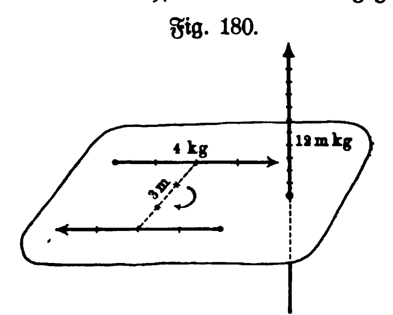
der Schnittgeraden AB ihrer Ebenen für sie gemeinsamer Arm wird, wie es Fig. 179 (a. v. S.) zeigt. Der Ersatz der beiden Paare durch ein Paar von den Kräften $[R]$ und $[\bar{R}]$ und dem Arme h ist unmittelbar ersichtlich.

Die Vereinigung, welche Lehrsatz II zeigt, wird deutlicher, wenn man die **Momente der Kräftepaare als Richtungsgrößen** einführt, wie früher die Drehungen und Winkelgeschwindigkeiten (vergl. S. 129 u. f.). Dazu errichtet man auf der einen Seite der Ebene eines Kräftepaares ein Lot, dessen Länge der Maßzahl des Momentes entspricht, und zwar so, daß man, in dem Lot auf der Ebene stehend, die Drehung des Kräftepaares als Uhrzeigerbewegung sehen würde; man nennt solche Lote **Achsenmomente** oder **Momentstrecken** (vergl. Fig. 180).

Errichtet man nun in einem Punkte P der Geraden AB in der Fig. 179 auf den Ebenen I und II die zugehörigen Achsenmomente von der Länge $K_1 h$ und $K_2 h$, so bilden diese als Lote der Ebenen I und II denselben Winkel, wie die Ebenen, d. h. der Winkel zwischen $[K_1]$ und $[K_2]$ und der Winkel zwischen $[K_1 h]$ und $[K_2 h]$ sind einander gleich. Demnach ist das Parallelogramm aus den Achsenmomenten $[K_1 h]$ und $[K_2 h]$ eine ähnliche Abbildung des Parallelogramms aus den Kräften $[K_1]$ und $[K_2]$ und zwar nach dem Modul $h : 1$. Infolgedessen hat die in P entspringende Diagonale des Parallelogramms der Achsenmomente die Länge Rh und stellt, da sie auf Ebene III sinngemäß senkrecht steht, als Richtungsstrecke aufgefaßt das Achsenmoment des resultierenden Paares dar.

Demnach kann man das resultierende Paar auch dadurch gewinnen, daß man die Achsenmomente der gegebenen Paare in irgend einem Punkte des Raumes zum Parallelogramm vereinigt und, dessen Diagonale entsprechend, zunächst die Ebene des resultierenden Paares und dann dieses selbst konstruiert.

Fig. 180.



Der Übergang zu beliebig-vielen Paaren der betreffenden Art ist ohne weiteres ersichtlich. Da sich diese Betrachtung auch auf Kräftepaare anwenden läßt, deren Ebenen parallel sind, so gelangt man zu folgender Zusammenfassung der Sätze über Kräftepaare:

Um n Kräftepaare zu vereinigen, ersetzt man zunächst jedes durch sein Achsenmoment und vereinigt darauf diese n Achsenmomente durch geometrische Addition. Der gewonnene Mittelvektor ist das Achsenmoment des resultierenden Paares: seine Ebene steht senkrecht auf diesem Vektor, die Maßzahl seines Momentes wird durch die Länge dieses Vektors bestimmt und sein Drehungssinn durch den Richtungspfeil dieses Vektors.

Schließt sich das Polygon der Achsenmomente von selbst, so ist für die Paare Gleichgewicht vorhanden.

Für ein bestimmtes Achsenmoment von 12 mkg Drehung zeigt Fig. 180 die Konstruktion des zugehörigen Paares, für welches Kraft und Arm will-

kürlich ist, wenn nur das Moment 12 festgehalten wird. Man kann also Kräftepaare schließlich wie Kräfte behandeln, nachdem sie durch Richtungsstrecken dargestellt sind. Während aber eine Kraft nur auf ihrer Geraden beweglich ist, darf die Gerade eines Achsenmomentes außerdem auch parallel zu sich verschoben werden, weil dies ja für die entsprechende Ebene des Kräftepaares gestattet ist.

Vorstehende Betrachtungen gestatten, ein räumliches Kräftesystem mit zerstreuten Angriffspunkten auf dem Wege der Rechnung in befriedigender Weise zu behandeln. Eine konstruktive (graphische) Behandlung, welche der Culmannschen Konstruktion für die Ebene genau entspricht, ist bisher nicht gefunden worden.

62. Rechnerische Behandlung der Aufgabe des § 61. Das Verfahren entspricht dem im § 60 für die Ebene angewandten. Man legt durch den Anfangspunkt O eines dreiachsigen rechtwinkligen Koordinatensystems zu jeder Kraft $[K]$ des Systems eine Parallele und fügt auf ihr in O die Gegenkräfte $[K']$ und $[\overline{K'}]$ hinzu, so daß

1. ein System von Kräften mit dem Angriffspunkte O entsteht und
2. ein System von Kräftepaaren, entsprechend $[K']$ und $[\overline{K'}]$.

Das System der Kräfte sei nach folgendem Schema gegeben:

Werte der Kräfte	K_1,	K_2,	. . .,	K_n,
Neigung gegen die Achsen . .	$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$,	$(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$,	. . .,	$(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$,
Koordinaten der Angriffspunkte	(x_1, y_1, z_1),	(x_2, y_2, z_2),	. . .,	(x_n, y_n, z_n).

Für Nr. 1 gilt nach den früheren Betrachtungen:

$$\left.\begin{aligned} X &= K_1 \cos\alpha_1 + K_2 \cos\alpha_2 + \cdots K_n \cos\alpha_n \\ Y &= K_1 \cos\beta_1 + K_2 \cos\beta_2 + \cdots K_n \cos\beta_n \\ Z &= K_1 \cos\gamma_1 + K_2 \cos\gamma_2 + \cdots K_n \cos\gamma_n \\ R^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2, \quad \cos\alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{R} \end{aligned}\right\} \quad 98)$$

Für die Berechnung des Momentes des Nr. 2 entsprechenden resultierenden Kräftepaares ist wieder eine geeignete Zerlegung der Kräfte, welche die komponierenden Paare bilden, einzuführen.

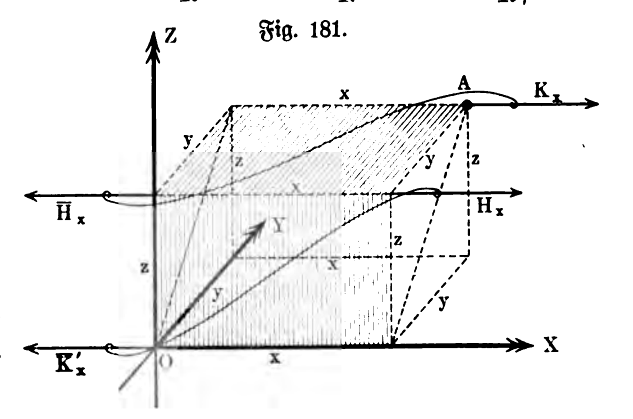


Fig. 181.

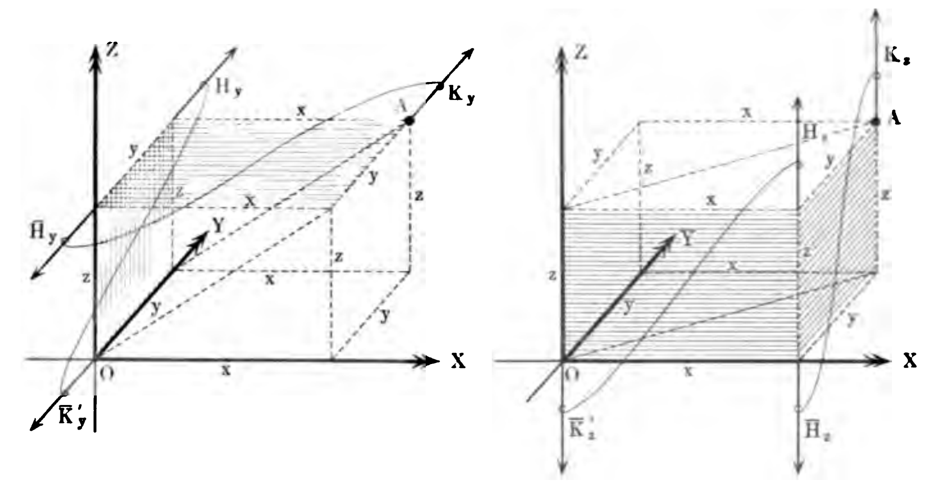
Stellt die Kraft $[K]$ im Punkte A eine der Kräfte der Reihe dar, deren Komponenten nach den Achsen $[K_x]$, $[K_y]$, $[K_z]$ sind, so gehört zu ihr im Punkte O eine Kraft $[\overline{K'}]$, deren entsprechende Komponenten $[\overline{K'_x}]$, $[\overline{K'_y}]$, $[\overline{K'_z}]$ sind.

In Fig. 181 (a. v. S.) ist nur die Komponente $[K_x]$ in A und $[\overline{K}_x']$ in O eingezeichnet. Anstatt das in der einen Diagonalebene des Parallelepipedons liegende Kräftepaar aus $[K_x]$ und $[K_x']$ unmittelbar zu berechnen, führt man zunächst noch die Gegenkräfte $[H_x]$ und $[\overline{H}_x]$ vom Werte K_x ein und zieht dann $[K_x]$ und $[\overline{H}_x]$ zu einem Paare, senkrecht zur Z-Achse, und $[H_x]$ und $[K_x']$ zu einem zweiten Paare, senkrecht zur Y-Achse zusammen (vergl. die Schraffierung).

Setzt man fest, daß die positiven Halbachsen des Koordinatenkreuzes zugleich die Richtungspfeile für die Achsenmomente der Paare liefern, so ist das Ergebnis:

Drehung um die Z-Achse: $+ K_x y$,
Drehung um die Y-Achse: $- K_x z$.

Fig. 182. Fig. 183.



Dasselbe Verfahren ergiebt für die Komponenten $[K_y]$ in A und $[\overline{K}_y']$ in O, gemäß Fig. 182:

Drehung um die X-Achse: $+ K_y z$,
Drehung um die Z-Achse: $- K_y x$.

Dasselbe Verfahren ergiebt endlich für die Komponenten $[K_z]$ in A und $[\overline{K}_z']$ in O, gemäß Fig. 183:

Drehung um die Y-Achse: $+ K_z x$,
Drehung um die X-Achse: $- K_z y$.

Vereinigt man die Drehungen um die Z-Achse, da die entsprechenden Paare in Parallelebenen liegen, so erhält man:

Drehung um die Z-Achse: $+ K_x y - K_y x$.

Ebenso folgt:

Drehung um die X-Achse: $+ K_y z - K_z y$,
Drehung um die Y-Achse: $+ K_z x - K_x z$.

Da jede Kraft des Systems für jede der drei Achsen derartige Drehungen bestimmt, so hat man für das System, wenn man $K_x = K \cos\alpha$, $K_y = K\cos\beta$, $K_z = K\cos\gamma$ setzt, folgendes Schema:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Drehung um die } Z\text{-Achse:}\quad M_z = \Sigma(K_p\cos\alpha_p\,y_p - K_p\cos\beta_p\,x_p)\\
&= (K_1\cos\alpha_1\,y_1 - K_1\cos\beta_1\,x_1) + \cdots (K_n\cos\alpha_n\,y_n - K_n\cos\beta_n\,x_n)\\
&\text{Drehung um die } X\text{-Achse:}\quad M_x = \Sigma(K_p\cos\beta_p\,z_p - K_p\cos\gamma_p\,y_p)\\
&= (K_1\cos\beta_1\,z_1 - K_1\cos\gamma_1\,y_1) + \cdots (K_n\cos\beta_n\,z_n - K_n\cos\gamma_n\,y_n)\\
&\text{Drehung um die } Y\text{-Achse:}\quad M_y = \Sigma(K_p\cos\gamma_p\,x_p - K_p\cos\alpha_p\,z_p)\\
&= (K_1\cos\gamma_1\,x_1 - K_1\cos\alpha_1\,z_1) + \cdots (K_n\cos\gamma_n\,x_n - K_n\cos\alpha_n\,z_n)
\end{aligned}\right\}\quad 99)$$

Da M_x, M_y, M_z zugleich die Werte der Achsenmomente der entsprechenden Paare darstellen, so lassen sich diese nach dem Parallelogrammprincipe zusammenfassen zu einem resultierenden Achsenmomente Mo, das mit den Achsen bezw. die Winkel λ, μ, ν bildet. Man hat:

$$\left.\begin{aligned}
&Mo^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2\\
&\cos\lambda = \frac{M_x}{Mo},\quad \cos\mu = \frac{M_y}{Mo},\quad \cos\nu = \frac{M_z}{Mo}
\end{aligned}\right\}\quad \ldots\quad 100)$$

Das System führt also erstens auf eine Kraft $[R]$, welche mit den Achsen bezw. die Winkel α, β, γ bildet und zweitens auf ein Moment $[Mo]$, dessen Achsenmoment mit den Achsen die Winkel λ, μ, ν bildet.

Der Winkel ε zwischen $[R]$ und dem Achsenmomente ist nach Formel 11 gegeben durch:

$$\cos\varepsilon = \frac{X M_x + Y M_y + Z M_z}{R\,Mo}\quad \ldots\ldots\quad 101)$$

Für $\varepsilon = 0^0$ und für $\varepsilon = 180^0$ ist das Achsenmoment parallel zu der Geraden der Kraft $[R]$, so daß das resultierende Paar auf der Kraft senkrecht steht, d. h. in diesem Falle liegt $[R]$ auf der Centralachse (vergl. § 61) des Systems.

Fig. 184.

Für $\varepsilon = 90^0$, d. h. für

$$X M_x + Y M_y + Z M_z = 0$$

steht das Achsenmoment senkrecht zu der Geraden der Kraft $[R]$, so daß die Ebene des resultierenden Paares der Kraft parallel ist. In diesem Falle läßt sich das Paar und die Kraft $[R]$ zu einer Kraft $[R']$ vereinigen, welche gegen R um $r = \frac{Mo}{R}$ verschoben ist.

Ist $0 < \varepsilon < 90^0$ oder $90^0 < \varepsilon < 180^0$, so läßt sich $[Mo]$, wie es Fig. 184 zeigt, in zwei Komponenten $[Mo\cos\varepsilon]$ und $[Mo\sin\varepsilon]$ zerlegen, deren erste mit $[R]$ einen Winkel von 0^0, deren zweite mit $[R]$ einen Winkel von 90^0 bildet. Die Komponente $[Mo\sin\varepsilon]$ läßt sich mit R vereinigen zu einer Kraft $[R']$, welche gegen R um $r = \frac{Mo\sin\varepsilon}{R}$ verschoben ist und zwar senk-

recht zur Ebene der Zeichnung nach hinten zu. Denkt man sich in R stehend, die Füße in O, und die Richtung $[Mo \sin \varepsilon]$ verfolgend, so geht die Verschiebung stets nach rechts vor sich.

Die Gerade von $[R']$ ist die Centralachse, auf der die Ebene des Paares $[Mo . \cos \varepsilon]$, welches durch $[\mathfrak{Mo}]$ bezeichnet werden mag, senkrecht steht.

Man hat:

$$\mathfrak{Mo} = Mo . \cos \varepsilon = \frac{X M_x + Y M_y + Z M_z}{R} \quad . \; . \; . \quad 102)$$

Da $\mathfrak{Mo} = Mo . \cos \varepsilon$ ist, so ist $\mathfrak{Mo} < Mo$, d. h. das Moment für die Centralachse ist das kleinste aller auftretenden Momente.

Hätte man statt O einen Punkt (ξ, η, ζ) der Centralachse für die Behandlung des Kräftesystems benutzt, so hätten die Arme der gebildeten Kräftepaare statt x_p, y_p, z_p die Werte $x_p - \xi$, $y_p - \eta$, $z_p - \zeta$ erhalten, so daß Momente M_x', M_y', M_z' entstanden wären, gemäß den Ansätzen:

$$\begin{aligned}
M_z' &= \Sigma [K_p \cos \alpha_p (y_p - \eta) - K_p \cos \beta_p (x_p - \xi)] \\
&= M_z - \eta \Sigma K_p \cos \alpha_p + \xi \Sigma K_p \cos \beta_p \\
&= M_z - (X \eta - Y \xi) \\
M_x' &= M_x - (Y \zeta - Z \eta) \\
M_y' &= M_y - (Z \xi - X \zeta).
\end{aligned}$$

Diese Momente sind die Komponenten des Momentes $\mathfrak{Mo}$ für die Centralachse, deren Richtung mit der Richtung von $[R]$ übereinstimmt, so daß:

$$\begin{aligned}
M_z' &= \mathfrak{Mo} . \cos \gamma = \frac{Z}{R} \cdot \mathfrak{Mo} = \frac{\Delta . Z}{R^2} \\
M_x' &= \mathfrak{Mo} . \cos \alpha = \frac{X}{R} \cdot \mathfrak{Mo} = \frac{\Delta . X}{R^2} \\
M_y' &= \mathfrak{Mo} . \cos \beta = \frac{Y}{R} \cdot \mathfrak{Mo} = \frac{\Delta . Y}{R^2}
\end{aligned}$$

ist, falls man $X M_x + Y M_y + Z M_z = \Delta$ setzt.

Durch Gleichsetzung der beiden Werte für M_z', für M_x' und für M_y' erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
X \eta - Y \xi &= M_z - \frac{\Delta . Z}{R^2} \\
Y \zeta - Z \eta &= M_x - \frac{\Delta . X}{R^2} \\
Z \xi - X \zeta &= M_y - \frac{\Delta . Y}{R^2}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 103)$$

Diese Gleichungen stellen die Projektionen der Centralachse auf die Koordinatenebenen dar bezw. die entsprechenden Ebenen.

Multipliziert man diese Gleichungen bezw. mit Z, X, Y, so giebt die Summe Null, d. h. aus je zweien von ihnen läßt sich immer die dritte ableiten.

Stellt man $M_z - \frac{\Delta Z}{R^2}$ durch Gleichnamigmachen dar in der Form:

$$\frac{X(XM_z - ZM_x) - Y(ZM_y - YM_z)}{R^2},$$

so sieht man, daß:

$$\eta_0 = \frac{XM_z - ZM_x}{R^2} \quad \text{und} \quad \xi_0 = \frac{ZM_y - YM_z}{R^2}$$

die erste Gleichung der Nr. 103 für $\eta = \eta_0$ und $\xi = \xi_0$ befriedigt. Fügt man noch

$$\zeta_0 = \frac{YM_x - XM_y}{R^2}$$

hinzu, so ist (ξ_0, η_0, ζ_0) ein bestimmter Punkt der Centralachse, welcher **Mittelpunkt des Kräftesystems** heißt.

Für parallele Kräfte gleichen Sinnes, bei dem $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots$, $\beta_1 = \beta_2 = \cdots$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots$ ist, kommt man zurück auf die Bestimmung der Formel Nr. 66.

Demgemäß ergeben sich bei der Behandlung des Kräftesystems folgende Fälle:

I. R und $\mathfrak{M}o$ sind von Null verschieden (Schraubung).
II. R ist von Null verschieden, während $\mathfrak{M}o = 0$ ist (Verschiebung).
III. $\mathfrak{M}o$ ist von Null verschieden, während $R = 0$ ist (Drehung).
IV. $R = 0$ und $\mathfrak{M}o = 0$ (Gleichgewicht).

Zu II. ist zu bemerken, daß dieser Fall sich nur dann sofort unverschleiert darstellt, wenn der Nullpunkt O der Koordinaten auf der Centralachse liegt, während man sonst zunächst Werte für R und Mo erhält bei $\varepsilon = 90^0$, woraus $\mathfrak{M}o = Mo \,.\, \cos\varepsilon = 0$ und für $[R]$ die Verschiebung $r = \frac{Mo}{R}$ folgt.

Die beiden windschiefen Kräfte, durch welche sich das System im Falle I für eine bestimmte Lage von O darstellen läßt, bestimmen durch die vier Endpunkte ihrer beiden Richtungsstrecken ein Tetraeder.

Der **Inhalt dieses Tetraeders** ist für das System charakteristisch, da er für jede Lage von O denselben Wert erhält. Stellt man nämlich das für irgend eine Lage von O gewonnene Paar Mo dar als $P \,.\, p$, so läßt sich eine der Kräfte P, wie es Fig. 185 zeigt, in die durch $[R]$ und die Achse des Kräftepaares bestimmte Ebene bringen und in dieser mit $[R]$ zu $[R']$ vereinigen. Die Kräfte $[R']$ und $[\overline{P}]$ stellen dann das Kräftesystem dar, so daß $OABC$ das entsprechende Tetraeder ist. Da dessen Grundfläche $\frac{1}{2} Pp = \frac{1}{2} Mo$ und da dessen Höhe $R \cos\varepsilon$ ist, so ist sein Inhalt:

Fig. 185.

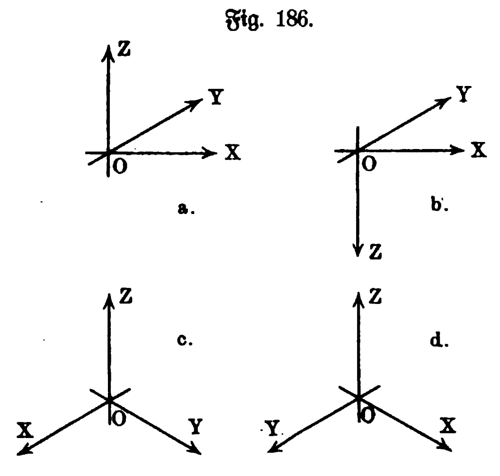
$$\tfrac{1}{6} R\, Mo \cos\varepsilon = \tfrac{1}{6} R\, \mathfrak{M}o \quad \ldots\ldots\ldots \quad 104)$$

Eine genauere Betrachtung des Systems von je zwei windschiefen Kräften, welche ein bestimmtes Kräftesystem ersetzen, führt zur Einsicht in eine bemerkenswerte geometrische Verwandtschaft, welche einen besonderen Fall zweier reciproken räumlichen Systeme, das sogenannte Nullsystem, darstellt.

Über die verschiedenen Zurückführungen des Systems und deren Gleichwertigkeit gelten die Bemerkungen auf S. 330.

Schließlich mag noch darauf hingewiesen werden, daß die Formeln für die Momente von dem benutzten Koordinatensystem abhängen. Wegen der Symmetrie im Raume zerfallen die Koordinatensysteme, welche man durch Auszeichnung der positiven Halbachsen aus drei, sich in einem Punkt senkrecht schneidenden und als X-Achse, Y-Achse und Z-Achse bereits unterschiedenen Geraden bilden kann, in zwei Klassen, welche man als Rechtssysteme und als Linkssysteme unterscheiden kann. Setzt man bei dem von uns gebrauchten ebenen XY-Systeme die positive Halbachse der Z-Achse auf die Ebene der Zeichnung, so entsteht ein Rechtssystem, läßt man sie nach unten verlaufen, so bildet sich ein Linkssystem. In Fig. 186 stellen a und c ein Rechtssystem, b und d ein Linkssystem dar. Bezeichnet man die Spitzen des Daumens, des Zeigefingers und des Mittelfingers einer Hand bezw. mit X, Y, Z, so entsteht beim Ausspreizen der Finger der rechten Hand ein Rechtssystem, der linken Hand ein Linkssystem.

Fig. 186.



Eine Schraubenbewegung von X über Y nach Z führt bei Rechtssystemen zu einer rechtsgängigen Schraubung (entsprechend den Windungen der Weinrebe), während sie beim Linkssystem eine linksgängige Schraubung (entsprechend den Windungen des Hopfens) darstellt.

Legt man eine Taschenuhr, das Zifferblatt nach oben gekehrt, auf den Tisch, so beschreibt der Endpunkt des Zeigers bei einer Hebung der Uhr eine linksgängige Schraubenlinie; dreht man die Uhr um, so entsteht bei Hebung eine rechtsgängige Schraubenlinie.

In englischen Büchern wird meist das Rechtssystem, in französischen meist das Linkssystem verwandt, während sich in Deutschland bisher kein ständiger Gebrauch ausgebildet hat.

In den Formeln für die Momente zeigt sich der Unterschied beider Systeme in einem Vorzeichenwechsel.

Die entwickelten Formeln, welche dem Rechtssystem entsprechen, nämlich:

$$M_x = Yz - Zy, \quad M_y = Zx - Xz, \quad M_z = Xy - Yx,$$

gehen für das Linkssystem über in:

$$M_x = Zy - Yz, \quad M_y = Xz - Zx, \quad M_z = Yx - Xy.$$

Um diese Formeln im Gedächtnisse zu behalten, prägt man sich in beiden Fällen zunächst den Ausdruck für M_z ein, welcher der Drehung in der Ebene genau entspricht, und leitet dann aus diesem durch cyklische Vertauschung [1]) die Ausdrücke für M_x und M_y ab.

Die Bedingungen des Gleichgewichtes lassen sich hier, den Bedingungen der Ebene entsprechend, auflösen in die sechs Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll} X = 0, & Y = 0, & Z = 0 \\ M_x = 0, & M_y = 0, & M_z = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 105)$$

Der Momentensatz und der Arbeitssatz gelten, entsprechend der Untersuchung für zerstreute Angriffspunkte in der Ebene, weiter, da ein Kräftepaar auch bei einer Verschiebung im Raume keine Arbeit leistet.

Unter anderem führt die Annullierung der Arbeit für drei virtuelle Verschiebungen, parallel zu den Achsen, und drei virtuelle Drehungen um die Achsen zurück zu obigen Bedingungen.

63. Konstruktive (graphische) Behandlung der Aufgabe des § 61.

Eine Lösung, welche unmittelbar auf die Centralachse und auf das entsprechende Kräftepaar führt und demnach dem Culmannschen Verfahren für die Ebene genau entsprechen würde, ist nicht bekannt.

Man kann die Konstruktion hier zunächst ohne weiteres dem rechnerischen Verfahren anpassen, indem man mit senkrechten Projektionen in drei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen arbeitet, wobei das Ergebnis in der einen dieser Ebenen lediglich zur Kontrolle dient.

Bei dieser Methode und bei anderen Lösungsverfahren ist es zweckmäßig, die Bedingungen des Gleichgewichts der Formel 105 auf die Form zu bringen:

$$\begin{array}{llll} 1. & X = 0, & Y = 0, & M_z = 0, \\ 2. & Y = 0, & Z = 0, & M_x = 0, \\ 3. & Z = 0, & X = 0, & M_y = 0. \end{array}$$

Die erste Gleichung sagt aus, daß die senkrechte Projektion des Kräftesystems auf die XY-Ebene in dieser ein Gleichgewichtssystem darstellt, so daß sich für die Kräfte in der XY-Ebene, welche durch diese Projektion dargestellt werden, das Krafteck und das Seileck schließt.

Die Gleichungen 2 und 3 sagen dasselbe für die anderen beiden Ebenen des Koordinatensystems aus.

Dasselbe folgt aus der Betrachtung der senkrechten Projektionen des Kräftepolygons und des Polygons der Achsenmomente, welche bezw. zu $[R] = 0$ und $[\mathfrak{Mo}] = 0$ führen.

[1]) Denkt man in der linearen Anordnung x—y—z die Enden x und z miteinander verbunden, so entsteht die cyklische Anordnung, der man nebenstehende Form geben kann. Man ersetzt bei cyklischer Vertauschung entweder, den Pfeilen entsprechend, stets x durch y, y durch z und z durch x oder, dem Pfeilsinne entgegen, stets x durch z, z durch y und y durch x.

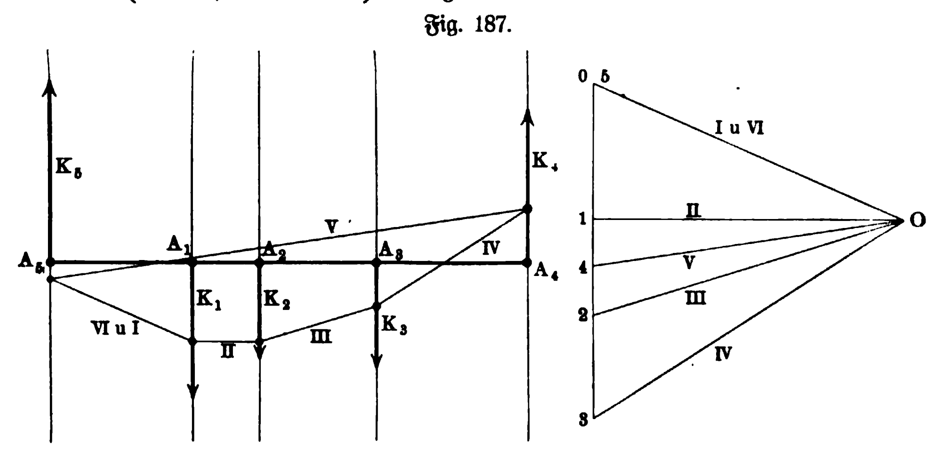
x z y

Demnach ist das Kräftesystem, welches durch senkrechte Projektion eines räumlichen, sich im Gleichgewichte befindenden Kräftesystems auf eine Ebene entsteht, selbst im Gleichgewichte, während die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Gleichgewicht eines räumlichen Kräftesystemes darin bestehen, daß seine senkrechten Projektionen auf die drei Ebenen einer Ecke (die nicht rechtwinkelig zu sein braucht) Kräftesysteme darstellen, welche im Gleichgewichte sind.

Fügt man irgend einem Kräftesysteme die Gegenkraft der Resultante $[R]$ und das Gegenmoment des resultierenden Momentes $[Mo]$ hinzu, so bildet sich ein im Gleichgewichte befindliches Kräftesystem. Diese Betrachtungen liegen unter anderem der Mohrschen Methode[1]) für die graphische Behandlung unserer Aufgabe zu Grunde, welche wohl unter den bisher bekannten Lösungen an erster Stelle genannt zu werden verdient.

64. Parallele Kräfte am starren Körper. Die Behandlung von Parallelkräften gleicher Richtung, welche stets auf eine Resultante führen, ist bereits (S. 241, 329 u. 337) erledigt.

Fig. 187.



Kommen Parallelkräfte verschiedener Richtungen in Frage, so ist es zweckmäßig, ihr System in zwei Systeme gleicher Richtung zu zerlegen und für jedes die Resultante zu bestimmen. Die beiden so gewonnenen Resultanten $[R_1]$ und $[R_2]$ können ein Kräftepaar bilden, andernfalls lassen sie sich zu einer Resultante vom Werte $\pm(R_1 - R_2)$ vereinigen.

Statt dessen kann man auch die allgemeinen Formeln für den vorliegenden Fall umgestalten. Stimmen die Richtungen der Kräfte bezw. mit der positiven und mit der negativen Z-Achse überein, so ist für jede Kraft K_p sowohl $\alpha_p = 90^0$, als auch $\beta_p = 90^0$, während γ_p entweder 0^0 oder 180^0 beträgt, so daß $\cos\gamma_p$ entweder $+1$ oder -1 ist. Man hat daher, falls man die Kräfte von der Richtung der positiven Z-Achse als positiv und die Kräfte von der Richtung der negativen Z-Achse als negativ einführt:

[1]) Vergl. Civil-Ingenieur, Bd. XXII.

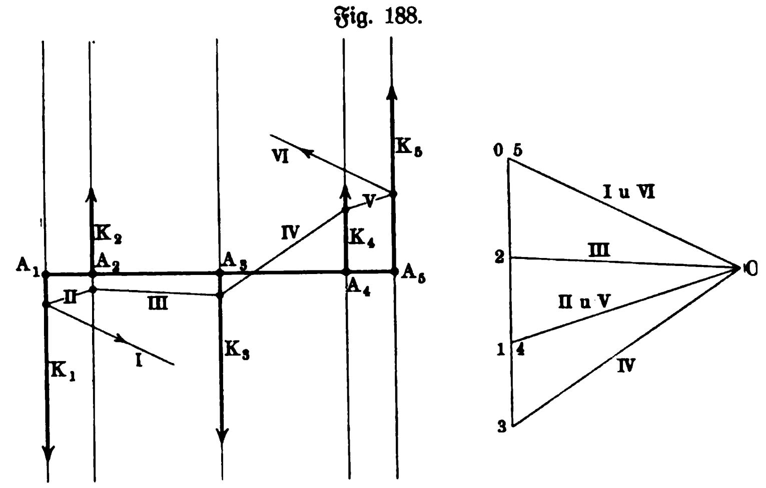
$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = \Sigma K_p$$
$$M_x = -\Sigma K_p y_p, \quad M_y = +\Sigma K_p x_p, \quad M_z = 0$$
$$Mo^2 = M_x^2 + M_y^2$$
$$\cos\lambda = \frac{M_x}{Mo}, \quad \cos\mu = \frac{M_y}{Mo}, \quad \cos\nu = 0.$$

Ist Mo von Null verschieden, während $Z = \Sigma K_p = 0$ ist, so hat das System ein resultierendes Moment.

Sind Mo und Z von Null verschieden, so zeigt die Gleichung Nr. 101 für $\cos\varepsilon$ sofort, daß $\varepsilon = 90^0$ ist, daß also Mo und Z zu einer Resultante vereinigt werden können.

Da Belastungen eines Körpers stets ein System von Parallelkräften gleicher Richtung darstellen, denen oft Reaktionen von entgegengesetzter Richtung entsprechen, so sind solche Systeme und zwar mit vertikal gelagerten Kraftgeraden in der Technik häufig zu behandeln. Die graphostatische Kon-

Fig. 188.



struktion wird hier besonders einfach, wie Fig. 187 für ein im Gleichgewicht befindliches System der Ebene und Fig. 188 für ein auf ein Kräftepaar führendes System der Ebene zeigt.

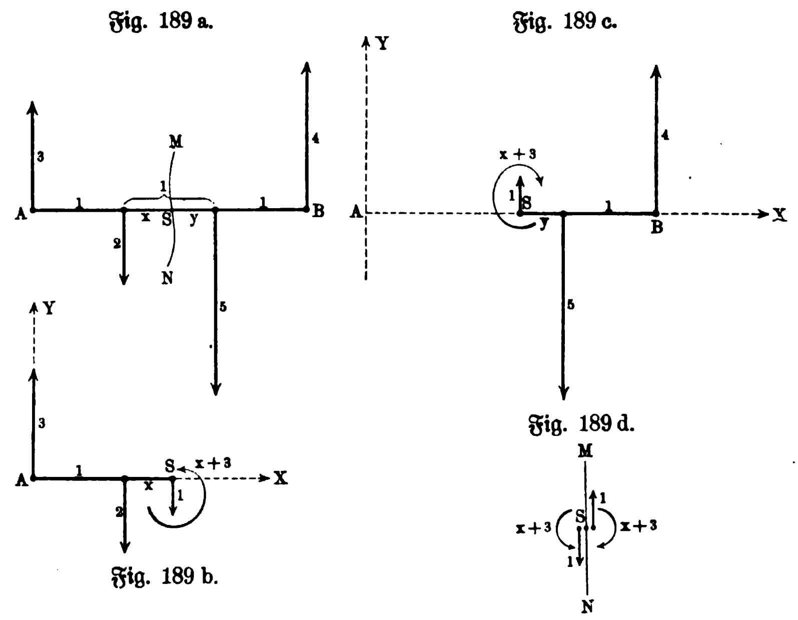
Auch die konstruktive Behandlung im Raume ist hier besonders einfach. Man wählt zwei Projektionsebenen I und II, parallel zu den Geraden des Systems und senkrecht aufeinander. Die senkrechten Projektionen jeder Kraft erscheinen dann in beiden Ebenen unverkürzt und sind also unter sich gleich, so daß man in der Ebene der Zeichnung für beide Ebenen mit einem Krafteck und einem Pole auskommt.

Will man auch den Mittelpunkt M des Kräftesystems bestimmen, so muß man die Kräfte im Raume, parallel zu I (oder II), um irgend einen Winkel, z. B. um 90°, gedreht denken und sie auf I (oder II) von neuem projizieren, d. h. man muß die Projektionen in der Ebene in ihren Angriffspunkten z. B. um 90° drehen. Die Resultante der neuen Lage und die Resultante der alten Lage geben in ihrem Schnittpunkte die Projektion M_1 des gesuchten

Punktes M auf die Ebene I, während dessen Projektion M_2 auf die Ebene II dadurch bestimmt ist, daß M_1 M_2 senkrecht ist zur Richtung des Systems.

Im Falle des Kräftepaares ist M natürlich (im Endlichen) nicht vorhanden.

65. Innere Kräfte am starren Körper unter dem Einfluß eines (äußeren) Kräftesystems. Die inneren Kräfte, welche an den einzelnen Atomen eines starren Körpers vorhanden sind, verändern sich unter der Einwirkung eines, den Körper angreifenden (äußeren) Kräftesystems. In vielen Fällen läßt sich die resultierende Wirkung der inneren Kräfte, ohne daß man diese selbst kennt, für die verschiedenen Stellen eines starren, von einem



Kräftesysteme angegriffenen Körpers bestimmen. Denkt man nämlich den Körper in zwei Teile zerschnitten und denkt man ferner in Punkten der Schnittfläche an jedem der beiden Teilkörper als äußere Kräfte solche Kräfte angebracht, daß jeder Teilkörper für sich dadurch wieder in den Zustand gelangt, den er als Teil des ganzen Körpers hatte, so stellen diese in Punkten der Schnittflächen angreifenden äußeren Kräfte die resultierende Wirkung der inneren Kräfte dar, welche durch den Schnitt zerstört wurden.

Ist das System der angreifenden Kräfte im Gleichgewicht, so ist diese Untersuchung meist verhältnismäßig einfach.

Als Beispiele für diesen Fall des Gleichgewichtes mögen folgende Betrachtungen dienen.

Fig. 189 stellt einen Balken AB dar, welcher in gleichen Abständen von 1 m durch vier im Gleichgewichte stehende Parallelkräfte angegriffen wird. Es ist die resultierende Wirkung der inneren Kräfte für den Schnitt MN zu bestimmen ($x + y = 1$).

Für Fig. 189 b wird das Gleichgewicht hergestellt gemäß der Regeln $X = 0$, $Y = 0$, $Mo = 0$.

Da in der X-Achse keine Kräfte liegen, so ist die Gleichung $X = 0$ von selbst erfüllt. Die Gleichung $Y = 0$ wird erfüllt, wenn man in S die Vertikalkraft [1] anbringt.

Für S als Drehpunkt liefert der Momentensatz $3(x+1) - 2x = x + 3$, d. h. eine Drehung vom Werte $(x + 3)$ im Sinne der Uhrzeigerbewegung; um sie aufzuhalten, muß für S als Drehpunkt eine Drehung vom Werte $(x + 3)$ mit umgekehrtem Sinne hinzugefügt werden. Für Fig. 189 c führen dieselben Überlegungen zu den dort eingezeichneten Werten.

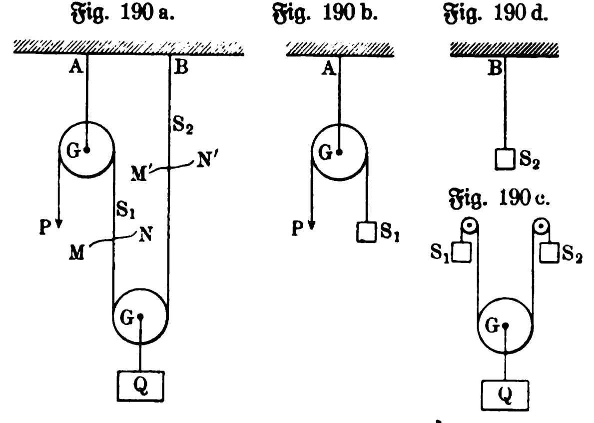


Fig. 190 a. Fig. 190 b. Fig. 190 d. Fig. 190 c.

Fügt man Fig. 189 b und Fig. 189 c wieder zu Fig. 189 a zusammen, so verschwinden die Kräfte der Schnittstelle, wie es sein muß.

Sie charakterisiert sich also im ungeschnittenen Balken, wie es Fig. 189 d darstellt, unwirksam nach außen.

In Fig. 190 a sind die beiden Schnitte MN und $M'N'$ geführt, so daß die drei daneben dargestellten Figuren entstehen, an denen die zerstörten Kräfte zur Veranschaulichung durch Gewichte dargestellt sind. Fig. 190 b liefert die Beziehung $P = S_1$, Fig. 190 c giebt die Gleichung $S_1 = S_2$ und $Q + G = S_1 + S_2$.

Demnach ist $P = S_1 = S_2 = \frac{Q + G}{2}$.

Der Zug in A beträgt $G + 2P$, der Zug in B beträgt P, die Resultante beider Zugkräfte, welche den Wert $Q + P + 2G$ haben muß, beträgt $G + 3P$, so daß wieder $Q + G = 2P$ erhalten wird.

In Fig. 191 (a. f. S.) ist eine einfache Stangenkonstruktion (Dachbinder) dargestellt, die durch den Schnitt MN zerlegt wird. An den Schnittstellen sind in Fig. 191 b (a. f. S.) durch Pfeile die Kräfte $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ angedeutet, welche zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderlich sind.

Man bestimmt jede dieser Kräfte unmittelbar durch den Momentensatz bei geschickter Wahl der Drehpunkte (Ritters Methode).

Für S als Drehpunkt kommen $[X]$ und $[Y]$ nicht in Frage, so daß die entsprechende Gleichung nur $[Z]$ enthält. Man hat:

$$1500 \,.\, 2 - 1000 \,.\, 1 - Z \,.\, 1{,}5 = 0, \quad \text{d. h. } Z = 1333\tfrac{1}{3}.$$

Für A als Drehpunkt kommen $[X]$ und $[Z]$ nicht in Frage, so daß die entsprechende Gleichung nur $[Y]$ enthält. Man hat:

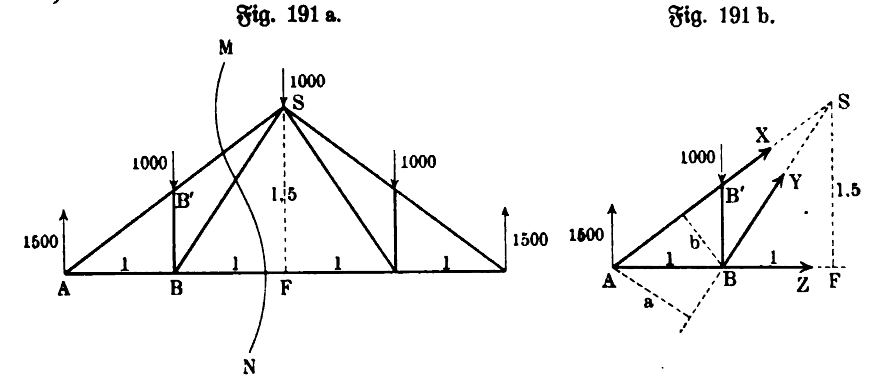
$$+ 1000 \,.\, 1 - Y \,.\, a = 0, \quad \text{d. h.} \quad Y = \frac{1000}{a}.$$

Für B als Drehpunkt kommen $[Y]$ und $[Z]$ nicht in Frage, so daß die entsprechende Gleichung nur $[X]$ enthält. Man hat:

$$1500 \,.\, 1 + b \,.\, X = 0, \quad \text{d. h.} \quad X = -\frac{1500}{b}.$$

Die Längen a und b sind leicht an der Figur zu messen bezw. zu berechnen.

Fig. 191 a. Fig. 191 b.



Da X negativ wird, so ist der Pfeil von $[X]$ in Fig. 191 b umzukehren, d. h. die Stange $B'S$ wird gedrückt und nicht gezogen, während BS Zug auszuhalten hat, ebenso wie BF.

66. Systeme starrer Körper und das Princip von d'Alembert. Die Betrachtung des vorigen Paragraphen beruht im Grunde darauf, daß ein starrer Körper durch Schnitte in zwei oder überhaupt in mehrere starre Körper zerlegt wird, daß er also ersetzt wird durch eine Gruppe von Körpern, welche insofern ein System bilden, als sie ja Teilkörper jenes einen Körpers sind.

Erforderlichenfalls kann man diese Zerlegung fortgesetzt denken, bis der Körper in seine einzelnen Atome zerlegt ist, welche stets als starre Körper von unendlich kleiner Ausdehnung und unendlich kleiner Masse anzusehen sind (vergl. Einleitung, S. 2 und § 40 u. f.).

Befindet sich der Körper selbst in einer Bewegung, bei welcher Beschleunigungen auftreten, so bedarf die Betrachtung der vorigen Paragraphen einer Ergänzung.

Diese Ergänzung ist noch in ausgedehnterem Maße erforderlich, wenn man verschiedene starre Körper, die in irgend welcher Verbindung stehen, zu einem System zusammenfügt, weil hier auch Relativbewegungen der einzelnen Teilkörper in Frage kommen.

Hat man es bei einem solchen Systeme thatsächlich einerseits mit Zug- und Druckkräften und anderseits mit in der Bewegung zu Tage tretenden Effektivkräften zu thun, so muß man stets davon ausgehen, daß statische

Kraft nur gehemmte kinetische Kraft und kinetische Kraft nur entwickelte statische Kraft ist (vergl. Einleitung, S. 10).

Diese principielle Auffassung ist von d'Alembert in einem Satze zum Ausdrucke gebracht worden, welcher bei der Lösung von Aufgaben, bei welchen einerseits Zug- und Druckkräfte und anderseits Effektivkräfte zu berücksichtigen sind, gute Dienste leistet.

Betrachtet man ein einzelnes Atom eines ganz beliebigen Körpers oder eines ganz beliebigen Körpersystems, so gilt für dieses (vergl. S. 233 u. f.) die Bemerkung, daß die in der Bewegung wirklich zur Geltung kommende Kraft, die Effektivkraft $[K] \stackrel{\times}{=} \mu [j_G]$ als Resultante aufzufassen ist aus der Mittelkraft $[A]$ aller äußeren, auf das Atom wirkenden Kräfte und aus der Mittelkraft $[J]$ aller inneren, auf das Atom wirkenden Kräfte, d. h. es gilt:

$$[K] \stackrel{\times}{=} [A] \stackrel{\times}{+} [J].$$

Dabei sind alle Kräfte, welche auf der gegenseitigen Einwirkung von Atomen des Körpers (oder des Systems) und von nicht zu ihm gehörigen Atomen beruhen, als äußere Kräfte anzusehen, als innere alle Kräfte, welche lediglich zwischen den Atomen des Körpers (oder des Systems) auftreten.

Führt man statt $[K]$ deren Gegenkraft $[\overline{K}]$ ein [1]), so geht obige Gleichung über in:

$$[A] \stackrel{\times}{+} [J] \stackrel{\times}{+} [\overline{K}] = 0,$$

d. h. $[A]$, $[J]$ und $[\overline{K}]$ stehen im Gleichgewichte.

Denkt man nun an jedem Atom des Körpers (oder des Systems) diesen Ersatz der Effektivkraft durch deren Gegenkraft ausgeführt, so gilt für jedes Atom eine entsprechende Gleichung.

Denkt man also die Atome des Körpers (oder des Systems) in der Lage, welche sie in einem bestimmten Zeitpunkte haben, festgehalten, so daß sie einen, diesem Zeitpunkte entsprechenden starren Körper bilden, so steht an diesem das System aller Kräfte $[A]$, $[J]$ und $[\overline{K}]$ im Gleichgewicht. Da sich aber für jeden Körper das System der Kräfte $[J]$ nach dem Princip der Paarwirkung in sich aufhebt, so steht auch das System aller Kräfte $[A]$ und $[\overline{K}]$ im Gleichgewichte.

Der Satz, welcher am Schlusse des § 44 für einen starren Körper abgeleitet wurde, läßt sich also auf beliebige Körper bezw. Körpersysteme ausdehnen, und zwar in folgender Form: Wenn in einem bestimmten Zeitpunkte t an den Atomen eines beliebigen Körpers bezw. Körpersystemes die äußeren Kräfte $[A_1]$, $[A_2]$, ... wirken, während die Effektivkräfte der Atome für denselben Zeitpunkt t bezw. $[K_1] \stackrel{\times}{=} \mu_1 [j_1]$, $[K_2] \stackrel{\times}{=} \mu_2 [j_2]$, ... sind, so ist das System der Kräfte $[A_1]$, $[A_2]$, ... und der Gegenkräfte von $[K_1]$, $[K_2]$ ... im Gleichgewichte, falls man diese Kräfte an dem starren Körper angreifend denkt, der entstehen würde, wenn man jedes Atom in der Lage festhielte, welche es zur Zeit t hat.

[1]) $[\overline{K}]$ ist natürlich eine fingierte Kraft, wie die Ergänzungskraft der Relativbewegung, vergl. S. 265.

Dieser Satz stimmt in seinem Inhalte überein mit dem sogenannten Principe von d'Alembert.

Will man den Satz für die Kräfte $[K_1]$, $[K_2]$, ... selbst aussprechen, so hat man ihn so zu fassen: An dem oben bestimmten starren Körper liefern die Zurückführungen des Systems der Kräfte $[A]$ und des Systems der Kräfte $[K]$ für denselben Punkt O dieselbe Resultante $[R]$ und dasselbe Kräftepaar $[Mo]$, die Systeme sind gleichwertig.

Versieht man bei einer bestimmten Zurückführung die Größen X, Y, Z und M_x, M_y, M_z für das System der Kräfte $[A]$ mit dem Zeiger A und für das System der Kräfte $[K]$ mit dem Zeiger K, so gilt:

$$\left.\begin{array}{lll} X^{(A)} = X^{(K)}, & Y^{(A)} = Y^{(K)}, & Z^{(A)} = Z^{(K)}, \\ M_x^{(A)} = M_x^{(K)}, & M_y^{(A)} = M_y^{(K)}, & M_z^{(A)} = M_z^{(K)} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 106)$$

Dabei ist $X^{(K)} = \Sigma \mu_p j_p^{(x)}$ u. s. w.

Die Gleichungen der Nr. 106 heißen die Gleichungen von Lagrange.

Natürlich gelten für das im Gleichgewicht befindliche System der Kräfte $[A_1]$, $[A_2]$, ... und der Gegenkräfte von $[K_1]$, $[K_2]$ alle Beziehungen, welche ein im Gleichgewichte befindliches System auszeichnen.

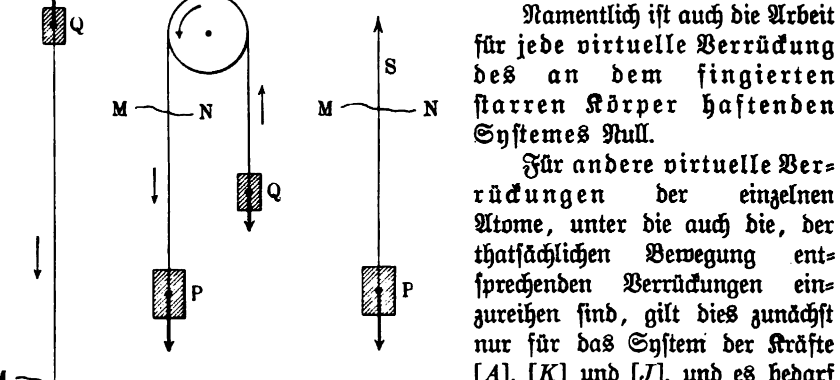


Fig. 192 b. Fig. 192 a. Fig. 192 c.

Namentlich ist auch die Arbeit für jede virtuelle Verrückung des an dem fingierten starren Körper haftenden Systemes Null.

Für andere virtuelle Verrückungen der einzelnen Atome, unter die auch die, der thatsächlichen Bewegung entsprechenden Verrückungen einzureihen sind, gilt dies zunächst nur für das System der Kräfte $[A]$, $[K]$ und $[J]$, und es bedarf einer besonderen Untersuchung, ob dabei die Arbeit der Kräfte des Systems $[J]$, welche bei starrer Verbindung stets verschwindet, den Wert Null hat oder nicht. Das Ergebnis dieser Untersuchung, die später durchgeführt werden soll, führt zu dem sogenannten Principe der virtuellen Verrückungen.

Als Beispiel für die Verwendung des Principes von d'Alembert untersuchen wir die Bewegung, welche bereits S. 275 dargestellt wurde, jetzt gemäß Fig. 192 für $P > Q$.

Das Wesentliche an dieser Bewegung stellt Fig. 192 b dar. Bezeichnen wir die Beschleunigung zur Zeit t mit j, so haben die Schwerpunkte von P und Q bezw. die Effektivkräfte $\frac{P}{g} \cdot j$ und $\frac{Q}{g} \cdot j$, während als äußere Kräfte die entgegengesetzt gerichteten Kräfte P und Q auftreten.

Die Resultante des Systems $[A]$ hat den Wert $P - Q$, die Resultante des Systems $[K]$ hat die Resultante $\frac{P}{g} \cdot j + \frac{Q}{g} \cdot j$, so daß bei der Gleichwertigkeit dieser beiden Resultanten gilt:

$$P - Q = \frac{P + Q}{g} \cdot j, \qquad \text{d. h. } j = g \cdot \frac{P - Q}{P + Q}.$$

Es tritt also eine konstante Beschleunigung vom Werte j auf.

Durch einen Schnitt MN bestimmt man nun leicht die innere Kraft (Seilspannung) für die getroffene Stelle, gemäß der Gleichung $[A] + [J] = [K]$, welche hier (vergl. Fig. 192 c)

$$P - S = \frac{P}{g} \cdot j$$

lautet, so daß

$$S = P - \frac{P}{g} \cdot j = 2 \frac{PQ}{P + Q}$$

ist.

Zu denselben Ergebnissen gelangt man durch Fig. 192 a, wenn man auf diese den Momentensatz anwendet.

Anwendungen der Lehre von den Kräften am starren Körper.

---

1. **Allgemeines.** a) Das Gewicht der Körper. Die Körper der Außenwelt, welche für die Technik in Frage kommen, befinden sich ohne Ausnahme in gegenseitiger Einwirkung mit der Erde. Infolgedessen muß hier zu den Kräften, welche auf einen starren Körper wirken, bei strenger Betrachtung stets dessen Gewicht in dessen Massenmittelpunkte (vergl. S. 240), der in dieser Hinsicht Schwerpunkt genannt wird, hinzugefügt werden. Ist der Betrag des Gewichtes gegenüber den sonst in Frage kommenden Kräften verhältnismäßig klein, so kann man von der Berücksichtigung des Gewichtes zunächst oder überhaupt absehen.

Die Bestimmung der Lage des Schwerpunktes für gegebene Körper wird später durchgeführt werden; hier wird die Lehre vom Schwerpunkte nur soweit verwendet, als sie im ersten Lehrgange der Physik behandelt worden ist (vergl. dazu auch § 45).

b) Die Befestigungsreaktionen. Ein Körper der Außenwelt, welcher für die Technik in Frage kommt, befindet sich, wenn man von seinem freien Falle absieht, stets in Verbindung mit anderen Körpern der Außenwelt und durch diese in Verbindung mit der Erde. Die Kräfte, welche an dem betrachteten Körper zugesetzt werden müssen, wenn er sich nach Lösung dieser Verbindungen, von Reibungen abgesehen, in demselben Zustande befinden soll, in dem er sich vor ihrer Lösung befand, mögen Befestigungsreaktionen heißen. Sie bestimmen sich, gemäß dem Principe der Paarwirkung, aus den Einwirkungen des betrachteten Körpers auf die Körper, mit denen jener in Verbindung steht. Ihre Bestimmung für besondere Fälle wird später durchgeführt werden; hier wird davon nur so viel verwendet, als aus dem ersten Lehrgange der Physik bekannt ist.

c) Die Reibungsreaktionen. Neben den Befestigungsreaktionen kommen bei Körpern, welche sich unter Pressung gegeneinander bewegen oder zu bewegen streben, noch Kräfte in Frage, welche an der Berührungsfläche oder in der Berührungslinie der Körper (tangential) angreifen. Nach dem Princip der Paarwirkung treten sie stets als Gegenkräfte auf, und zwar die eine an dem einen, die andere an dem andern der sich bewegenden Körper. Man bezeichnet jede dieser Kräfte als Reibung bezw. als Reibungsreaktion, letzteres, insofern man die Einwirkung auf den gerade betrachteten Körper besonders hervorheben will.

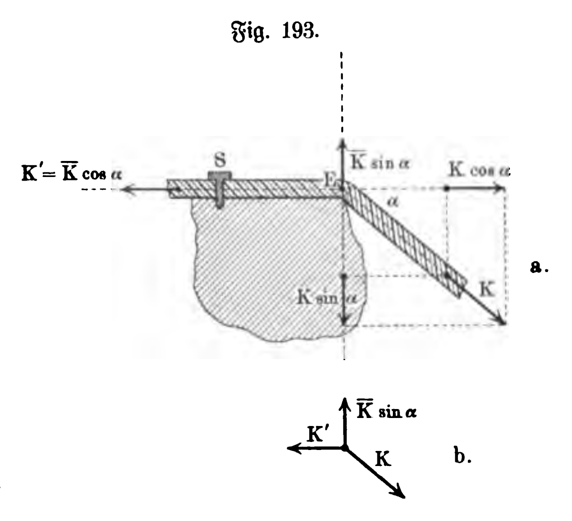
Da man den Wert der Reibung durch Bearbeitung der Oberflächen (Glättung und Anwendung von Schmiermitteln) und auch durch andere Mittel (Anwendung von Friktionsrollen) oft erheblich herabmindern kann, so gelangt man bei Vernachlässigung der Reibung (Vorstellung von absolut-glatten Oberflächen) meist zu einer brauchbaren Annäherung. Dies ist nicht der Fall, wenn die betrachteten Vorgänge ohne Reibung überhaupt nicht zustande kommen, wie z. B. die Drehung einer Rolle durch einen Schnurlauf.

Im folgenden wird die Reibung nicht berücksichtigt, nur auf ihr Vorhandensein wird gelegentlich hingewiesen.

d) Statische und kinetische Aufgaben. Die einfacheren Aufgaben, bei welchen das angreifende Kräftesystem im Gleichgewichte (Ruhe oder gewisse gleichförmige Bewegungen des Körpers) steht, treten naturgemäß in den Vordergrund. Kinetische Aufgaben werden vorläufig nur soweit herangezogen, als es zur Verdeutlichung des wichtigen Unterschiedes zwischen statischen und kinetischen Beziehungen erforderlich ist.

2. **Die Kraftübertragung durch Seile.** Die Verschiebung bezw. die Drehung der Geraden einer Kraft am starren Körper fordert den Zusatz eines Kräftepaares bezw. einer Kraft (vergl. S. 323). Solange die Kräfte durch Belastungen hervorgerufen werden, d. h. in Gewichten bestehen, macht die Verschiebung der Geraden einer gegebenen Kraft keine Schwierigkeiten, da eine bestimmte Belastung an jeder Stelle dasselbe Gewicht nach Größe und Richtung hervorruft. Hier handelt es sich bei Anwendungen im wesentlichen darum, die Gerade einer gegebenen Kraft zu drehen. Unter den technischen Mitteln, welche diesem Zwecke dienen, nehmen Seile (Fäden, Schnüre, Seile, Ketten, Riemen) eine hervorragende Stelle ein. Man betrachtet sie zunächst als vollkommen-biegsam, d. h. man macht die Annahme, daß ihre Mittellinie jedem Zuge widerstandslos folgt, so daß umgekehrt die Tangente der Mittellinie stets die Richtung des im Seile vorhandenen Zuges (Spannung) anzeigt.

Fig. 193.



Befestigt man ein Seil, wie es Fig. 193 andeutet, so zerlegt sich $[K]$ erfahrungsmäßig in die Komponenten $[K \cos\alpha]$ und $[K \sin\alpha]$, von denen die erste an S die Reaktion $K' = \overline{K} \cos\alpha$, von denen die zweite in E die Reaktion $\overline{K} \sin\alpha$ hervorruft, so daß $[K]$, $[\overline{K} \sin\alpha]$ und $[\overline{K} \cos\alpha]$ im Gleichgewichte stehen; man nennt E auch hier einen (festen) Knoten (vergl. S. 274).

Legt sich das Seil um ein Prisma, senkrecht zu dessen Kanten, so ist für jede Kante die Zerlegung der Fig. 193 zu berücksichtigen.

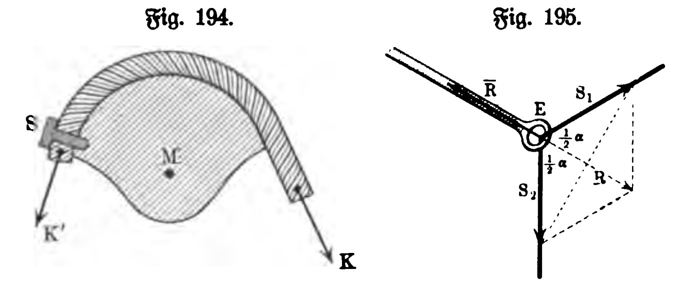
Legt sich das Seil um einen Kreiscylinder (vergl. Fig. 194) senkrecht zu dessen Seiten, so daß ein Centriwinkel λ umspannt wird, so hat man das Cylinderstück als Stück eines regelmäßigen Prismas von n Kanten, deren jeder der Winkel $\alpha = \frac{\lambda}{n}$ entspricht, aufzufassen und zwar für $lim\, n = \infty$. In diesem Falle ist

$$K' = K \,.\, lim \left[cos \frac{\lambda}{n}\right]^n_{n = \infty} = K$$

d. h. die Spannungen K' und K sind von gleichem Werte.

Infolgedessen ist das Seil der Fig. 194 auch im Gleichgewichte, wenn die Befestigung bei S gelöst und statt ihrer eine Kraft $[K']$ angebracht wird, deren Wert mit dem Werte von $[K]$ übereinstimmt.

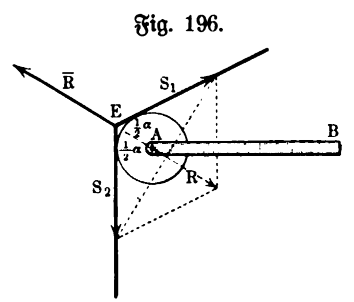
Fig. 194. Fig. 195.



Dasselbe gilt überhaupt für konvex-gekrümmte Cylinder (Übertragung durch den Krümmungskreis).

Eine Folge davon ist z. B., daß ein Seil, welches durch einen Ring gezogen ist und an diesem einen beweglichen (losen) Knoten bildet, wie es Fig. 195 zeigt, bei Gleichgewicht in beiden Seilstücken Spannungen von gleichem Werte ($S_1 = S_2 = S$) zeigt. Da das Parallelogramm von $[S_1]$ und $[S_2]$ demnach ein Rhombus ist, so halbiert dessen Diagonale den Winkel α zwischen den Seilstücken und man hat

Fig. 196.



$$S\, cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} R,$$

d. h.

$$R = 2\, S\, cos \frac{\alpha}{2}.$$

Demnach stehen $[\bar{R}]$, $[S_1]$ und $[S_2]$ im Knoten im Gleichgewichte.

Durch Bildung eines losen Knotens kann man den Zug einer Belastung $[S_2]$ in die Richtung von $[S_1]$ bringen.

Dasselbe erreicht man durch Verwendung einer festen Rolle, welche auch Leitrolle genannt wird, weil sie die Richtung der Kraft zu leiten

imstande ist. Soll Gleichgewicht eintreten, so muß man, wie Fig. 196 zeigt, eine neue Kraft $[S_1]$ hinzufügen, und es ist wieder

$$R = 2\,S \cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

Hier ist $[R]$ der Druck, der auf die Befestigung AB übertragen wird, und $[\bar{R}]$ die Reaktion der Befestigung, welche an der Rolle wirkt. Sitzt die Rolle in der Mitte ihrer Drehungsachse, so wird auf jeder Seite der Druck $\frac{1}{2}[R]$ übertragen.

Fig. 197.

Im Gegensatze zu der Leitrolle stellt die lose Rolle eine Vorrichtung dar, bei welcher der Zug einer Belastung neben einer Änderung der Richtung auch eine Verringerung erfährt, so daß man beim Emporziehen einer Last dieser gegenüber an Kraft spart. Man nennt die lose Rolle deshalb auch Kraftrolle. Fig 197 zeigt, wie die eine Komponente von $[\bar{R}]$ durch die Reaktion $[S_1]$ der Befestigung A aufgehoben wird, so daß nur noch $[S_2]$ erforderlich ist, um $[\bar{R}]$ im Gleichgewichte zu halten. Eine Umformung der Gleichung

$$S = \frac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

ist hier zweckmäßig; man hat für die Berührungssehne $B_1 B_2$ den Ansatz

$$\frac{1}{2} B_1 B_2 = r \cos\frac{\alpha}{2}\,,$$

so daß

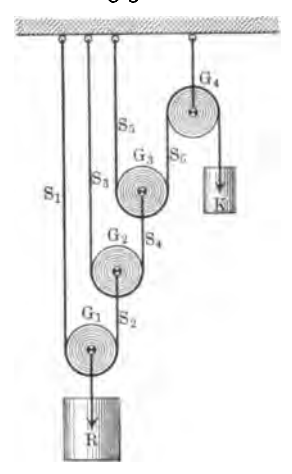
$$S = \frac{R\,.\,r}{B_1 B_2} \quad \text{oder} \quad S : R = r : B_1 B_2 \quad \text{ist.}$$

Der Wert der Kraft $[S]$, mit welcher man $[\bar{R}]$ bei dieser Vorrichtung im Gleichgewicht halten, also auch gleichförmig bewegen kann, verhält sich also

zum Werte von $[R]$ wie der Radius der Rolle zur Berührungssehne. Da $B_1 B_2$ seinen größten Wert $2r$ für $\frac{\alpha}{2} = 90^0$ erreicht, so erhält S bei parallelen Seilen seinen kleinsten Wert ($\frac{1}{2} R$).

Nennt man kurz $[S]$ die Kraft und $[R]$ die Last, so ist bei gleichförmigen Bewegungen für $S = \frac{1}{2} R$ der Weg der Kraft doppelt so groß als der Weg der Last, d. h. man setzt am Wege zu, wenn man an Kraft spart. Dabei ist die Arbeit der Kraft dem Werte nach der Arbeit der Last gleich, während beide Arbeiten entgegengesetzte Vorzeichen haben, so daß die gesammte Arbeit den Wert Null hat.

Fig. 198.



Mehrere Rollen werden unter anderem in **Rollenzügen, Flaschenzügen** und **Klobenzügen** zu gemeinsamer Wirkung verbunden.

Als Beispiel mag der Rollenzug mit drei losen und einer festen Rolle dienen, wie ihn Fig. 198 darstellt. Man hat zunächst:

$$S_1 = S_2, \quad S_3 = S_4, \quad S_5 = S_6, \quad S_6 = K.$$

Denkt man sich die nötigen Schnitte (vergl. S. 343) gelegt, so erhält man noch:

$$G_1 + R = S_1 + S_2 = 2 S_1 = 2 S_2$$
$$G_2 + S_2 = S_3 + S_4 = 2 S_3 = 2 S_4$$
$$G_3 + S_4 = S_5 + S_6 = 2 S_5 = 2 S_6 = 2 K,$$

d. h.

$$8 K = 4 G_3 + 2 G_2 + G_1 + R.$$

Darf man die Gewichte der Rollen G_1, G_2, G_3 gegen R vernachlässigen, so erhält man $8K = R$ bezw. $K = \frac{R}{8}$, und es ist allgemein für n lose Rollen:

$$K = \frac{R}{2^n}.$$

Man nennt den Rollenzug wegen dieser Beziehung zwischen Kraft und Last auch wohl **Potenz-Flaschenzug**.

Sind die Gewichte G_1, G_2, ... einander gleich ($= G$), so gilt allgemein:

$$K = \frac{(2^n - 1) G + R}{2^n}.$$

3. **Die belastete Seilkurve.** Die Betrachtung eines Seiles MN, welches nur Belastungen $[G_1]$, $[G_2]$ ... trägt, wie es Fig. 199 darstellt, führt zu zwei wichtigen Sätzen.

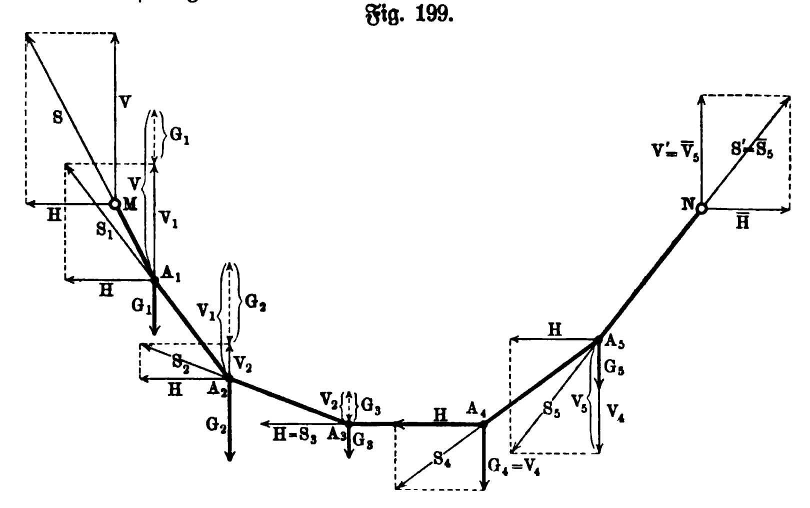
Zerlegt man die Kraft $[S]$, welche das Seil in M hält, in vertikaler und horizontaler Richtung, so ändert die Belastung $[G_1]$ in A_1 nur die vertikale Komponente $[V]$. In A_1 ist also $[H]$ mit $[V_1] \stackrel{\times}{=} [V - G_1]$ zu einer Kraft $[S_1]$ zu vereinigen, deren Richtung die Richtung des nächsten Seilstückes bestimmt.

Die Belastung $[G_2]$ in A_2 ändert wiederum nur die vertikale Komponente $[V_1]$ von $[S_1]$ u. s. w.

Demgemäß gilt für ein Seil, welches nur durch Belastungen (vertikal) in Anspruch genommen wird, folgendes:

1. Die horizontalen Komponenten der Kräfte, welche in den Seilstücken zur Wirkung kommen, der sogenannten Seilspannungen, haben überall denselben Wert. Man giebt dieser Thatsache den kurzen Ausdruck: die Horizontalspannung ist konstant.
2. Die vertikalen Komponenten je zweier Seilspannungen unterscheiden sich durch die Belastungen, welche zwischen ihnen liegen. Man giebt dieser Thatsache den kurzen Ausdruck: der Unterschied zweier Vertikalspannungen ist gleich der Summe der Zwischenbelastungen.

Fig. 199.



Die Sätze bleiben bestehen, wenn das Seilpolygon in eine Seilkurve übergeht, wie es bei stetigen Belastungen der Fall ist. Man pflegt dann noch die Voraussetzung der vollständigen Biegsamkeit des Seiles durch den Satz darzustellen:

3. In jedem Punkte giebt die Tangente der Seilkurve die Richtung der in dem entsprechenden Elemente herrschenden Spannung an.

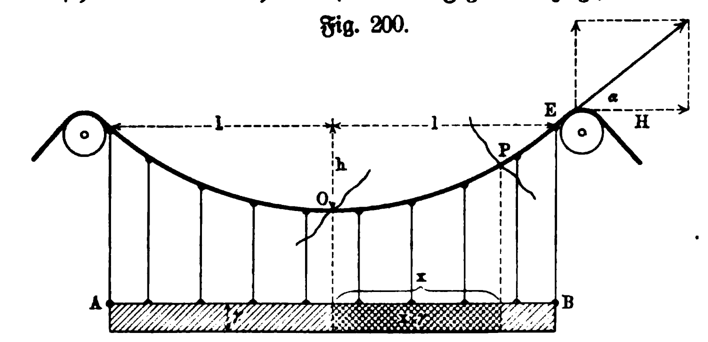
Von stetigen Belastungen sind für die Technik zwei Arten von besonderer Bedeutung, die gleichmäßige Belastung der horizontalen Projektion des Seiles und die gleichmäßige Belastung des Seiles selbst.

Ist im ersten Falle 1 m der Horizontalen durch γ kg belastet, so ist eine beliebige Horizontalstrecke x durch $x\gamma$ kg belastet; ist im zweiten Falle 1 m des Seiles selbst durch γ kg belastet, so ist ein beliebiges Seilstück von der Länge s durch $s\gamma$ kg belastet.

Der zweite Fall ist insofern von allgemeiner Bedeutung, als ein Seil von konstantem Querschnitte und von konstantem specifischem Gewichte stets durch sein eigenes Gewicht gleichmäßig belastet wird, doch läßt sich das Eigengewicht meist zunächst oder überhaupt gegenüber den sonstigen Belastungen vernachlässigen.

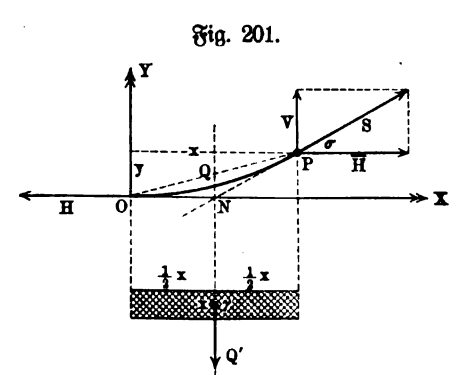
Wir behandeln zunächst den ersten Fall. Er tritt z. B. angenähert ein, wenn eine schwere Brückenbahn AB, wie es Fig. 200 zeigt, an einem Seile

Fig. 200.



hängt, dessen Gewicht ebenso wie das Gewicht der Verbindungsstangen gegen das Gewicht der Brückenbahn vernachlässigt werden kann; genau würde die Voraussetzung für unendlich viele Verbindungsstangen erfüllt sein.

Fig. 201.



Zerschneidet man das Seil im tiefsten Punkte O und in einem beliebigen Punkte P, so geben die Tangenten in O und in P die Richtungen der entsprechenden Spannungen $[H]$ und $[S]$, wie es Fig. 201 zeigt. Die drei Kräfte $[H]$, $[S]$ und $[x\gamma]$ schneiden sich nach dem Satze von den drei Kräften in einem Punkte N. Da $[x\gamma]$ die Strecke x halbiert, so kennzeichnet sich die Seilkurve (vergl. S. 97 oben) als Parabel.

Da $[H]$ wegen der Symmetrie der Konstruktion horizontal gerichtet ist, so bezeichnet H die Horizontalspannung des Seiles. Da diese für jede Stelle des Seiles denselben Wert hat, so hat auch die horizontale Komponente $[\overline{H}]$ von $[S]$ den Wert H. Der Unterschied $V - 0$ der Vertikalspannungen für P und O ist gleich der Summe der zwischen P und O getragenen Belastung, d. h. $x\gamma$, so daß sich $V - 0 = x\gamma$ ergiebt.

Für O als Drehpunkt liefert der Momentensatz, da sich die Belastung $x\gamma$ in der Mitte von x vereinigt denken läßt:

$$\overline{H} \cdot y + (x\gamma) \cdot \frac{x}{2} - V \cdot x = 0,$$

d. h. man hat für $V = x\gamma$ und für $\overline{H} = H$

$$H \cdot y - \tfrac{1}{2}\gamma x^2 = 0$$

oder

$$x^2 = \frac{2H}{\gamma} \cdot y.$$

Da x und y die Koordinaten eines beliebigen Punktes P der Seilkurve bezeichnen, so ist diese eine Parabel vom Parameter $\frac{H}{\gamma}$.

Für E in Fig. 200 ist $x = l$ und $y = h$, so daß unter anderem

$$l^2 = \frac{2H}{\gamma} \cdot h$$

und demnach

$$H = \tfrac{1}{2}\gamma \frac{l^2}{h}$$

gilt, wobei $2l$ die Spannweite und h die Pfeilhöhe der Konstruktion genannt wird.

Für die Neigung von $[S]$ gegen den Horizont gilt:

$$\operatorname{tang} \sigma = \frac{V}{H} = \frac{2\,xh}{l^2},$$

während

$$S = \sqrt{V^2 + H^2} \quad \text{ist.}$$

Für E ist im besonderen

$$V = l\gamma, \quad H = \tfrac{1}{2}\gamma \frac{l^2}{h} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang} \alpha = \frac{2\,h}{l}$$

und demgemäß muß die Befestigung des Seiles berechnet werden.

Für eine endliche Anzahl von Verbindungsstangen erhält man statt der Parabel ein Seileck, welches jener Parabel eingeschrieben oder umschrieben ist, je nachdem man Stücke wie $[x\gamma]$ in Fig. 201 an Stangen in O und in P oder an einer Stange in Q aufgehängt denkt. Überhaupt ist die Parabel die Kurve der gleichmäßigen Horizontalbelastung, worauf die Theorie der parabolischen Träger beruht [1]).

Im zweiten Falle, d. h. bei gleichmäßiger Belastung des Seiles, tritt die „Gemeine Kettenlinie“ als Seilkurve auf, welche eine fein gegliederte, an zwei Nägeln aufgehangene Kette veranschaulicht.

Konstruiert man die beiden, zu einander symmetrisch gelegenen „Logarithmischen Linien“

$$y_1 = b \cdot e^{+\frac{x}{c}} \quad \text{und} \quad y_2 = b \cdot e^{-\frac{x}{c}},$$

so bilden die Halbierungspunkte der, zwischen beiden Kurven gelegenen Ordinaten eine sogenannte „Gewölbelinie“, deren Gleichung demnach ist:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{b}{2}\left(e^{+\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

---

[1]) Vergl. unter anderem Ritter, Techn. Mechanik, § 61 u. f.

Im Sonderfalle $b = c$ führt diese Gewölbelinie den Namen „**Gemeine Kettenlinie**". Gemäß der angegebenen Konstruktion hat der Scheitel der „Gemeinen Kettenlinie" die Entfernung b ($= c$) von der X-Achse. Soll diese im Scheitel Tangente sein, so muß eine Verschiebung um die Strecke c eintreten, so daß sich dann

$$y = -c + \frac{c}{2}\left(e^{+\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

als Gleichung für die „Gemeine Kettenlinie" ergiebt.

Dient die „Gemeine Kettenlinie" als Seilkurve, so ist c eine Strecke von der Länge $\frac{H}{\gamma}$, falls man die Horizontalspannung der Kette mit H und die Belastung für den laufenden Meter mit γ bezeichnet.

Die Entwickelung obiger Gleichung folgt durch eine ziemlich verwickelte Rechnung aus dem Ansatze $tang\,\sigma = \frac{V}{H}$ (vergl. Fig. 201).

Rechnet man die Länge s des Bogens vom Scheitel aus, so ist hier $V - 0 = s \cdot \gamma$, so daß sich für $H = c \cdot \gamma$ ergiebt:

$$tang\,\sigma = \frac{V}{H} = \frac{s}{c},$$

d. h. **die Tangente des Neigungswinkels der Kurventangente gegen die Horizontale ist stets der (vom Scheitel aus gemessenen) Bogenlänge proportional.**

Ist H im Verhältnisse zu γ sehr groß, wie es bei stark gespannten Ketten der Fall ist, so führt die Einführung der Reihen für $e^{+\frac{x}{c}}$ und $e^{-\frac{x}{c}}$ zu brauchbaren Annäherungen. Man findet so:

$$y = \frac{x^2}{2c} + \frac{x^4}{24\,c^3} + \cdots$$

Die **erste Annäherung** $y = \frac{x^2}{2c}$ oder $x^2 = 2\,cy = 2\,\frac{H}{\gamma}y$ führt zurück zu der oben behandelten **Parabel**; könnte die Kette zu einer horizontalen Geraden gespannt werden, so würde thatsächlich die gleichmäßige Belastung der Kette zugleich eine gleichmäßige Belastung der Horizontalen sein.

Die **zweite Annäherung** $y = \frac{x^2}{2c} + \frac{x^4}{24\,c^3}$ stellt eine Linie vierter Ordnung dar, die aber mit geringem Fehler durch eine Ellipse ersetzt werden kann. Man findet zunächst durch Umkehrung $x^2 = -6\,c^2\left[1 \overset{(+)}{-} \sqrt{1 + \frac{2}{3}\frac{y}{c}}\right]$ und dann durch weitere Entwickelung der Wurzel $x^2 = 2\,cy - \frac{1}{3}y^2 + \cdots$ Verschiebt man die x-Achse aus dem Scheitel aufwärts um $3\,c$, so erhält man

$$\frac{x^2}{(c\,.\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(3\,c)^2} = 1,$$

d. h. man gelangt zur Centralgleichung einer Ellipse, deren große Achse $6c$ senkrecht liegt.

Zwischen der Länge s des Bogens der Kettenlinie und dessen Vertikalprojektion y bestehen die Beziehungen

$$y = -c + \sqrt{s^2 + c^2} \quad \text{und} \quad s = \sqrt{y^2 + 2yc},$$

woraus noch folgt:

$$c = \frac{s^2 - y^2}{2y}.$$

Zwischen der Länge des Bogens s und dessen Horizontalprojektion x bestehen die Beziehungen:

$$x = c \,.\, log\, nat \cdot \left\{\frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c}\right\} \quad \text{und} \quad s = \frac{c}{2}\left(e^{+\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

Außerdem giebt noch die Umkehrung der Gleichung zwischen x und y die Beziehung:

$$x = c\; log\, nat \cdot \left\{\frac{y + c + \sqrt{y^2 + 2cy}}{c}\right\}.$$

Angenähert gilt unter der obigen Bedingung:

$$s = x + \frac{1}{6}\frac{x^3}{c^2} + \cdots = x + \frac{2}{3}\frac{y^2}{x} + \cdots$$

$$c = \frac{x^2 + \frac{1}{3}y^2}{2y}$$

$$tang\, \sigma = \frac{s}{c} = \frac{2y}{x}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{y^2}{x^2}\right).$$

Erhält s am Ende E (vergl. Fig. 200) für $x = l$ und $y = h$ den Wert λ, so daß 2λ die ganze Länge der Kette bezeichnet, so ist z. B. in erster Annäherung $\lambda = l$ und in zweiter Annäherung

$$\lambda = l + \frac{2}{3}\frac{h^2}{l}.$$

Ferner ist

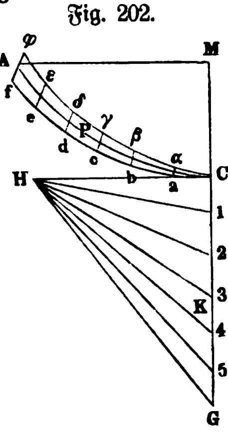
$$c = \frac{l^2 + \frac{1}{3}h^2}{2h}$$

und

$$tang\, \alpha = \frac{2h}{l}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{h^2}{l^2}\right)$$

in zweiter Annäherung, so daß damit auch $H = c\gamma$ und $V = \lambda\gamma$ bekannt ist.

Fig. 202.



Eine angenäherte Konstruktion der Kettenlinie erhält man gemäß Fig. 202, in welcher $CH = c$ und $CG = \lambda$ ist.

Für $CK = s$ hat man

$$tang\; KHC = \frac{KC}{CH} = \frac{s}{c} = tang\, \sigma,$$

d. h. $[HK]$ bestimmt die Tangente an der Kettenlinie im Punkte P, falls $CP = CK = s$ ist, wobei HK der Spannung in P proportional (γ) ist.

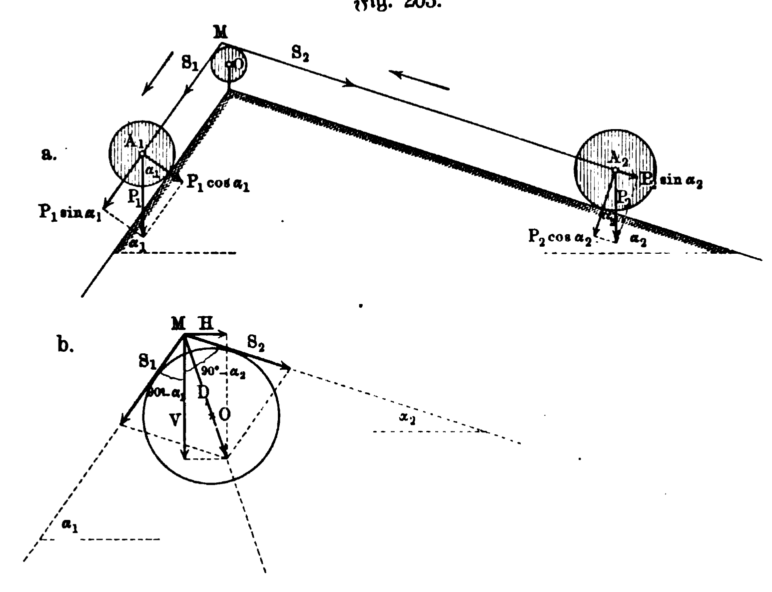
Teilt man also die halbe Kettenlänge λ in n gleiche Teile $\frac{\lambda}{n}$, so ist für

$Ca = ab = bc = \cdots \frac{\lambda}{n}$, falls $Ca//Hc$, $ab//H1$, $bc//H2$, ... ist, der Streckenzug $Cabc\ldots$ eine angenäherte Darstellung der Kettenlinie und ebenso der Streckenzug $C\alpha\beta\gamma$ ..., bei welchem $C\alpha//H1$, $\alpha\beta//H2$, $\beta\gamma//H3$, ... ist, für $C\alpha = \alpha\beta = \beta\gamma = \cdots \frac{\lambda}{n}$. Da die Kettenlinie thatsächlich zwischen beiden Streckenzügen liegt, so bestimmen die Mitten von $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ einen dritten Streckenzug, welcher die Kettenlinie noch genauer angiebt, als jene beiden.

Aus diesen Konstruktionen läßt sich übrigens durch einen Grenzübergang die genaue Gleichung der Kettenlinie herleiten.

4. Die Atwoodsche Fallmaschine mit geraden Führungen für die Belastungen. Die beiden Belastungen P_1 und P_2 (Cylinder von verschiedener Länge) der Fig. 203, welche durch ein, über eine Rolle geführtes Seil ver-

Fig. 203.



bunden sind, gleiten auf schiefen Ebenen bezw. von den Neigungswinkeln α_1 und α_2. Die Drucke auf die Ebenen sind bezw. $P_1 \cos\alpha_1$ und $P_2 \cos\alpha_2$, die treibenden Kräfte bezw. $P_1 \sin\alpha_1$ und $P_2 \sin\alpha_2$. Unter der Voraussetzung, daß die Seilstücke den schiefen Ebenen parallel sind, ist $P_1 \sin\alpha_1 = P_2 \sin\alpha_2$ die Bedingung des Gleichgewichtes und damit sind auch zugleich die Seilspannungen S_1 und S_2 bestimmt. Der Druck $[D]$ auf die Achse der Rolle

ist, wenn der gemeinsame Wert von $[S_1]$ und $[S_2]$, welche den Winkel $180^0 - \alpha_1 - \alpha_2$ bilden, durch S bezeichnet wird:

$$D = 2 S \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Zerlegt man D, wie es Fig. 203 b zeigt, in wagerechter und in senkrechter Richtung, so ergiebt sich:

$$V = S (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)$$

und

$$H = S (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1).$$

Sitzt die Rolle in der Mitte ihrer Achse, so verteilt sich $[S]$ bezw. $[V]$ und $[H]$ gleichmäßig auf die beiden Zapfen.

Wenn $P_1 \sin \alpha_1 > P_2 \sin \alpha_2$ ist, so tritt Bewegung ein im Sinne der Pfeile der Fig. 203.

Die treibende Kraft $P_1 \sin \alpha_1 - P_2 \sin \alpha_2$ bewegt hier die Masse $\frac{P_1 + P_2}{g}$, so daß die Beschleunigung den Wert hat:

$$j = g \frac{P_1 \sin \alpha_1 - P_2 \sin \alpha_2}{P_1 + P_2}.$$

Die treibende Kraft $P_1 \sin \alpha_1$ zerlegt sich hier in die Effektivkraft $\frac{P_1}{g} \cdot j$, welche die Richtung der Bewegung MA_1 hat, und in die Seilspannung S_1, so daß

$$P_1 \sin \alpha_1 = + \frac{P_1}{g} j + S_1,$$

d. h.

$$S_1 = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \quad \text{ist,}$$

Die treibende Kraft $P_2 \sin \alpha_2$ zerlegt sich hier in die Effektivkraft $\frac{P_2}{g} \cdot j$, welche die Richtung der Bewegung $A_2 M$ hat, und in die Seilspannung S_2, so daß

$$P_2 \sin \alpha_2 = - \frac{P_2}{g} j + S_2,$$

d. h.

$$S_2 = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \quad \text{ist.}$$

Die Werte von S_1 und S_2 sind wieder einander gleich, so daß die weitere Betrachtung mit der Betrachtung für das Gleichgewicht übereinstimmt.

Das gilt aber nur, solange auf die **Reibung** keine Rücksicht genommen wird. Obige Formeln setzen voraus, daß im besondern auch keine Reibung zwischen Schnur und Rolle vorhanden ist und daß also die bewegliche Rolle z. B. auch durch einen festen Körper mit einer Nute für die Führung der Schnur ersetzt werden könnte.

Da die Rolle überhaupt erst infolge der Reibung zwischen ihr und der Schnur in Bewegung gesetzt wird, so entspricht diese Reibung der Bewegung der Rollenmasse. Ist $\mathfrak{Tr}$ das Trägheitsmoment der Rolle, so ist bei einem Radius r für die reduzierte Masse anzusetzen $\mathfrak{Tr} = mr^2$, falls man den entsprechenden materiellen Punkt wieder in die Schnur eingeknotet denkt. Vergl. S. 275.

Unter Berücksichtigung der Bewegung der Rolle hat man also

$$j = g \cdot \frac{P_1 \sin \alpha_1 - P_2 \sin \alpha_2}{P_1 + P_2 + \frac{\mathfrak{Tr} \cdot g}{r^2}}$$

und

$$S_1 = \frac{P_1 P_2 (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) + P_1 \sin \alpha_1 \frac{\mathfrak{Tr} \cdot g}{r^2}}{P_1 + P_2 + \frac{\mathfrak{Tr} \cdot g}{r^2}}$$

und

$$S_2 = \frac{P_1 P_2 (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) + P_2 \sin \alpha_2 \frac{\mathfrak{Tr} \cdot g}{r^2}}{P_1 + P_2 + \frac{\mathfrak{Tr} \cdot g}{r^2}}.$$

Da $P_1 \sin \alpha_1 > P_2 \sin \alpha_2$ ist, so ist jetzt $S_1 > S_2$.

Man kann sich vorstellen, daß der Überschuß von S_1 über S_2 die Bewegung der Rolle hervorruft, es ist nämlich:

$$S_1 - S_2 = m \cdot j.$$

Weiter auf die Reibung einzugehen, ist hier noch nicht am Platze; es sollte die Reibung nur soweit berücksichtigt werden, als für die Einsicht in den Bewegungsvorgang notwendig ist.

Für $\alpha_1 = 90^0$ und $\alpha_2 = 0^0$ kommt man zurück zu Fig. 151, während man für $\alpha_1 = 90^0$ und $\alpha_2 = 90^0$ wieder zur Fig. 152 gelangt.

5. Das Wellrad mit horizontaler Achse bei geraden Führungen für die Belastungen. Gleichgewicht tritt für die in Fig. 204 angedeutete Vorrichtung ein, wenn das Moment der treibenden Kräfte für den Drehpunkt O verschwindet, d. h. für

$$r_1 P_1 \sin \alpha_1 = r_2 P_2 \sin \alpha_2.$$

Man hat dann $S_1 = P_1 \sin \alpha_1$ und $S_2 = P_2 \sin \alpha_2$ und damit ist auch die Bestimmung des Druckes $[D]$ auf die Achse ermöglicht.

Für $r_1 P_1 \sin \alpha_1 > r_2 P_2 \sin \alpha_2$ tritt Bewegung ein im Sinne der gezeichneten Pfeile. Bezeichnet man die Winkelbeschleunigung der Bewegung mit ι, so hat A_1 die Beschleunigung $r_1 \iota$ und A_2 die Beschleunigung $r_2 \iota$, so daß $\frac{P_1}{g} r_1 \iota$ in der Richtung MA_1 und $\frac{P_2}{g} r_2 \iota$ in der Richtung $A_2 M$ bei der Bewegung Effektivkräfte sind. Für die Spannungen S_1 und S_2 gilt also:

$$1) \qquad P_1 \sin \alpha_1 = + \frac{P_1}{g} r_1 \iota + S_1 \quad \text{und} \quad P_2 \sin \alpha_2 = - \frac{P_2}{g} r_2 \iota + S_2.$$

Da sich die Rolle im Sinne des gezeichneten Pfeiles dreht, so muß das Moment $S_1 r_1$ einen Überschuß gegenüber $S_2 r_2$ liefern. Bezeichnet man das Trägheitsmoment der Rolle mit $\mathfrak{T}\mathrm{r}$, so ist nach Formel 76:

$$2) \qquad \iota = \frac{S_1 r_1 - S_2 r_2}{\mathfrak{T}\mathrm{r}}.$$

Setzt man die Werte von S_1 und S_2 aus 1) und 2) ein, so ergiebt sich:

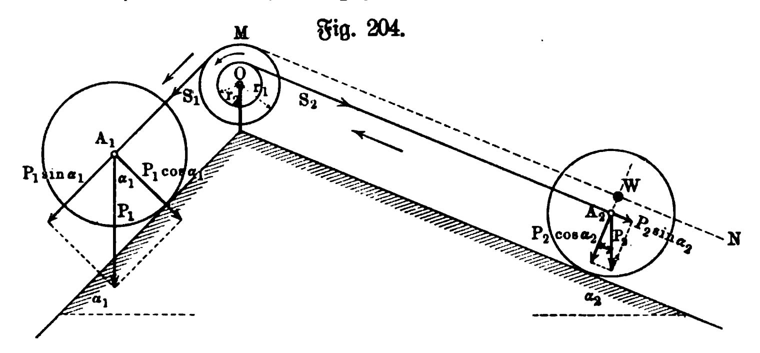
$$\iota = \frac{r_1 P_1 \sin \alpha_1 - r_2 P_2 \sin \alpha_2}{\frac{P_1}{g} r_1^2 + \frac{P_2}{g} r_2^2 + \mathfrak{T}\mathrm{r}}$$

und damit auch S_1 und S_2.

Diese Formel erhält man auch unmittelbar durch Formel 76, da P_1 und P_2 bezw. die Trägheitsmomente $\frac{P_1}{g} r_1^2$ und $\frac{P_2}{g} r_2^2$ liefern.

Vernachlässigt man die Masse der Rolle ($\mathfrak{T}\mathrm{r} = 0$) im Ausdrucke für ι, so folgt aus 1) wieder $S_1 r_1 = S_2 r_2$.

Fig. 204.



Will man bei der Herleitung von Gleichung 2 auf die Verwendung der Formel 76) verzichten, so kann man die Momente der Kräfte $P_2 \sin \alpha_2$ und S_2 vom Arme r_2 ersetzen durch Kräfte U und V vom Arme r_1, so daß $r_2 P_2 \sin \alpha_2 = U r_1$ und $S_2 r_2 = V r_1$ ist. Man muß dann auch die Masse von P_2 im Abstande r_2 durch eine Masse von W im Abstande r_1 ersetzen, so daß die Trägheitsmomente beider Massen $\frac{P_2}{g} r_2^2$ und $\frac{W}{g} r_1^2$ einander gleich sind. Denkt man noch die Rolle durch einen materiellen Punkt von der Masse m_1 im Abstande r_1 ersetzt, so daß $\mathfrak{T}\mathrm{r} = m_1 r_1^2$ ist, so spielt sich der ganze Vorgang auf der Schnur $A_1 M$ und deren gedachter Fortsetzung MN ab. Wie in der vorigen Nummer ist nun für die Beschleunigung j auf $A_1 MN$

$$j = g \frac{P_1 \sin \alpha_1 - U}{P_1 + W + \frac{\mathfrak{T}\mathrm{r} \cdot g}{r_1^2}}$$

und man erhält für $j = \iota r_1$ und $U = \frac{r_2 P_2 \sin \alpha_2}{r_1}$ und $W = \frac{P_2 r_2^2}{r_1^2}$ wieder den obigen Wert für ι.

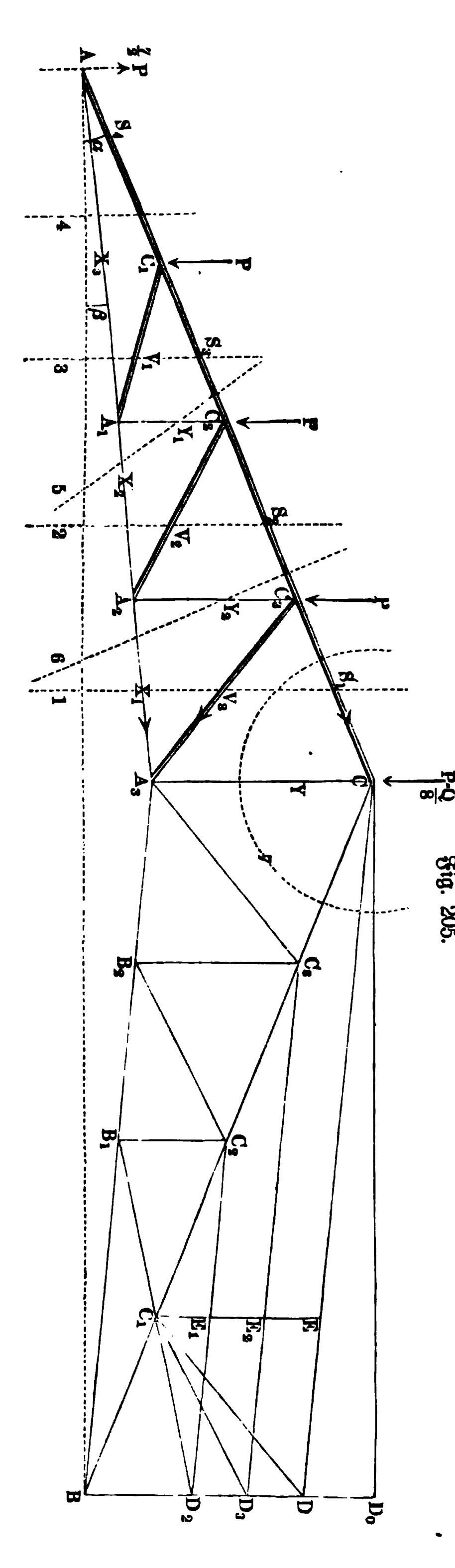


Fig. 205.

6. Behandlung der Übungen 4 und 5 durch das Princip von d'Alembert. Die Lösung ergiebt sich unmittelbar nach § 66.

7. Berechnung der Dachbinder nach Ritters Methode. Der Binder eines Daches habe die in der Fig. 205 dargestellte Konstruktion, und seine Gesamtbelastung, die wir als gleichmäßig darüber verteilt annehmen, sei Q. Jedes der acht Felder hat deshalb eine Belastung von $\frac{Q}{8}$ zu tragen, die in dem Schwerpunkte, d. i. in der Mitte jedes Sparrenteils, wirksam gedacht werden kann und sich zu $\frac{Q}{16}$ auf jeden der beiden benachbarten Knotenpunkte verteilt. Hieraus ergiebt sich die Belastung P eines jeden Knotenpunktes, mit Ausnahme der beiden Auflagerpunkte, zu $\frac{Q}{8}$. Man hat nun zunächst die Wirkung der Unterstützung als Kräfte (Auflagerreaktionen) darzustellen. Da die ganze Belastung $7\,P$ beträgt, so tragen die Unterstützungen bei A und bei B wegen der Symmetrie der Konstruktion je die Hälfte, d. h. $\frac{7}{2}\,P = \frac{7}{16}\,Q$. Statt dieser Unterstützungen hat man also aufwärts gerichtete Kräfte vom Werte $\frac{7}{2}\,P$ anzubringen. Es ist nun die Inanspruchnahme der einzelnen Verbindungsstangen in der vorgelegten Konstruktion zu berechnen. Zu dem Ende denke man die Konstruktion in zwei Teile zerlegt, durch einen Schnitt, welcher womöglich nur drei Stangen trifft, und denke an den Schnittpunkten in Richtung der Stangen Kräfte angebracht, die den weggeschnittenen Teil der Kon-

struktion ersetzen, d. h. also den ursprünglich vorhandenen Gleichgewichtszustand erhalten (vergl. S. 344). Der durch die punktierte Linie 1 dargestellte Schnitt verlangt hiernach die Anbringung der Kräfte S_1, V_3, X_1. Nach dem Vorgange Ritters bestimmt man sie durch den Momentensatz, indem man den Schnittpunkt zweier solcher Kräfte als Drehpunkt wählt. So ist bei dem Schnitt 1 für die Berechnung von S_1 Punkt A_3 als Drehpunkt zu nehmen; A wird Drehpunkt, wenn es sich um die Berechnung von V_3 handelt, und C_3 wird dazu gewählt, wenn man X_1 bestimmen will. Bei verwickelteren Konstruktionen kann der Fall eintreten, daß einzelne Stangen nur durch Schnitte zu erreichen sind, welche mehr als drei Stangen treffen. Auch in diesen Fällen läßt sich die angegebene Methode benutzen, a) wenn es gelingt, den Schnitt, der geradlinig oder krummlinig geführt werden kann, so zu legen, daß sämtliche geschnittene Stangen sich bis auf die zu berechnende in einem Punkte schneiden, der dann natürlich zum Drehpunkte gewählt werden muß; b) wenn die nicht durch diesen Punkt gehenden und vom Schnitt getroffenen Stangen schon durch eine frühere Berechnung gefunden worden sind, ihre Spannungen also als bekannt in Rechnung gebracht werden können. Die sich bei dieser Berechnung ergebenden Resultate können mit einem positiven oder negativen Zeichen behaftet sein, und hat dies die Bedeutung, daß positiven Werten wirkliche Zugkräfte, negativen Werten dagegen Druckkräfte entsprechen. In der Figur sind die Spannweite mit AB, die Knotenpunkte der Sparren AC und BC mit C_1, C_2, C_3 bezeichnet. Die Sparren bilden mit der Horizontalen AB den Winkel α, die Zugstangen AA_3 und BA_3 bilden mit derselben Linie den Winkel β. Die auf der linken Seite der Figur eingeschriebenen Buchstaben S, X, Y, V bezeichnen die in den betreffenden Stangen vorhandenen Kräfte, wobei die auf Druck in Anspruch genommenen Stangen in Doppellinien dargestellt sind. Die zur Berechnung dieser Kräfte geführten Schnitte sind durch punktierte Linien mit daneben angebrachten Zahlen bezeichnet, welche die Reihenfolge der zu führenden Schnitte angeben. Die rechte Seite der Figur ist zur graphischen Darstellung der Kräfte S, X, Y und V benutzt, worüber weiter unten das Notwendige folgen wird.

Zur Berechnung von S_1, X_1 und V_3 führen wir den Schnitt 1, nehmen, wie schon oben angegeben, der Reihe nach A_3, C_3 und A als Drehpunkt an und erhalten:

$$S_1 \,.\, AC\frac{\cos\alpha \,.\, \sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} + \tfrac{7}{2}P \,.\, AC\cos\alpha - P \,.\, AC(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4})\cos\alpha = 0;$$

$$- X_1 \,.\, \tfrac{3}{4}AC\sin(\alpha-\beta) + \tfrac{7}{2}P \,.\, \tfrac{3}{4}AC\cos\alpha - P \,.\, AC(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4})\cos\alpha = 0$$

$$V_3 \,.\, \tfrac{3}{4}AC\sin AC_3A_3 + P \,.\, AC(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4})\cos\alpha = 0.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$S_1 = -2P\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = -\frac{Q}{4}\,\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$X_1 = \tfrac{5}{2}P\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} = Q(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16})\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$V_3 = -2P\frac{\cos\alpha}{\sin A\,C_3\,A_3} = -\frac{Q}{4}\,\frac{\cos\alpha}{\sin A\,C_3\,A_3}.$$

In gleicher Weise erhält man bei den Schnitten 2, 3, 4:

$$S_2 = -Q\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}\right)\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$X_2 = Q\left(\tfrac{1}{4}+2\cdot\tfrac{1}{16}\right)\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$V_2 = -\tfrac{3}{4}\cdot\frac{Q}{4}\,\frac{\cos\alpha}{\sin A\,C_2\,A_2}$$

$$S_3 = -Q\left(\tfrac{1}{4}+2\cdot\tfrac{1}{16}\right)\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$X_3 = Q\left(\tfrac{1}{4}+3\cdot\tfrac{1}{16}\right)\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$V_1 = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{Q}{4}\,\frac{\cos\alpha}{\sin A\,C_1\,A_1}$$

$$S_4 = -Q\left(\tfrac{1}{4}+3\cdot\tfrac{1}{16}\right)\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Durch Schnitt 5 und 6 für A als Drehpunkt ergiebt sich:

$$Y_1 = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{Q}{4};\quad Y_2 = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{Q}{4}.$$

Der krummlinig geführte Schnitt 7 giebt schließlich, wenn man A ebenfalls als Drehpunkt benutzt und den bereits gefundenen Wert S_1, der in CB wirksam zu denken ist, dabei in Rechnung bringt:

$$(Y+P)\,AC\cos\alpha - 2P\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\,AC\sin 2\alpha = 0$$

$$Y = 4P\frac{\sin\alpha\,\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)} - P = 2\left(\frac{Q}{4}\,\frac{\sin\alpha\,\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)} - \frac{Q}{16}\right)$$

$$Y = 2\left(\tfrac{3}{4}\,\frac{Q}{4}\,\frac{\sin\alpha\,\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)} + \tfrac{1}{4}\,\frac{Q}{4}\,\frac{\cos\alpha\,\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\right).$$

Zur graphischen Darstellung der im vorstehenden durch Rechnung bestimmten Kräfte ziehe man CD_0 parallel mit AB, BD_0 normal zu AB; CD, C_3D_3, C_2D_2 werden mit BA_3 parallel gezogen, und C_1 mit D_2, D_3, D verbunden, welche Verbindungslinien wieder mit B_1C_1, B_2C_2, A_3C_3 parallel laufen; endlich ziehe man C_1E mit BD parallel. Für diese Konstruktionen ergiebt sich:

$$BC = BD\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)};\quad CD = BD\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)};$$

$$C_1D = BD\frac{\cos\alpha}{\sin D\,C_1\,B}$$

$$BD_0 = BD\frac{\sin\alpha\,\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)};\quad DD_0 = BD\frac{\cos\alpha\,\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken das Maß von BD gleich dem Maß von $\frac{Q}{4}$, so sind für die in der Figur dargestellte Dachkonstruktion die in den einzelnen Stangen auftretenden Kräfte durch folgende Linien dargestellt:

$$S_1 = BC;\ S_2 = BC + 1 \,.\, BC_1;\ S_3 = BC + 2 \,.\, BC_1;$$
$$S_4 = BC + 3 \,.\, BC_1.$$

Man hat allgemein bei n Knotenpunkten:

$$S_n = BC + (n-1) \,.\, BC_1.$$

Ferner ist

$$X_1 = CD + 1 \,.\, DE;\quad X_2 = CD + 2 \,.\, DE;\quad X_3 = CD + 3 \,.\, DE$$

und allgemein

$$X_{n-1} = CD + (n-1) \,.\, DE;$$
$$V_1 = C_1 D_2;\ V_2 = C_1 D_3;\ V_3 = C_1 D$$

und allgemein

$$V_{n-1} = C_1 D_n;$$
$$Y_1 = C_1 E_1;\ Y_2 = C_1 E_2$$

und allgemein

$$Y_{n-2} = C_1 E_{n-2}.$$

Die Anstrengung der mittleren Zugstange beträgt:

$$Y = 2(C_1 E + DD_0).$$

Denkt man die vorstehende Konstruktion in der Weise verändert, daß die Zugstangen AA_3 und BA_3 eine horizontale Lage annehmen, daß also der Punkt A_3 in die Linie AB rückt, so ist in den obigen Rechnungsresultaten $\beta = 0$ zu setzen. Die graphische Darstellung behält dabei ihre Gültigkeit, es fällt D in D_0, und dadurch wird DD_0 selbst zu Null. Demnach verändert sich in den obigen Resultaten nur Y, die Anstrengung der mittleren Zugstange, welche gleich $2\,C_1 E$ wird.

Für die in Fig. 206 (a. f. S.) dargestellte Konstruktion gilt folgendes:

$$S_1 = -\,Q\,\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}\right) + Q\sin\alpha\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}\right),$$

$$X_1 = \frac{2\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)}{\sin(2\alpha-\beta)},$$

$$T_1 = Q\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}\right) + \frac{Q}{4}\,\frac{\cos\alpha\,\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)\,\sin(2\alpha-\beta)},$$

$$V_1 = -\,\frac{Q}{8}\cos\alpha;\ U_1 = \frac{Q}{16}\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)},$$

$$S_2 = -\,Q\,\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}\right) + \frac{Q}{4}\sin\alpha,$$

$$T_2 = \frac{Q}{8}\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} + \frac{Q}{4}\,\frac{\cos\alpha\,\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)\,\sin(2\alpha-\beta)},$$

$$S_3 = -\,Q\,\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}\right) + \frac{Q}{8}\sin\alpha,$$

$$X_2 = Q\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}\right);\ U_2 = \frac{Q}{16}\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)},$$

Fig. 206.

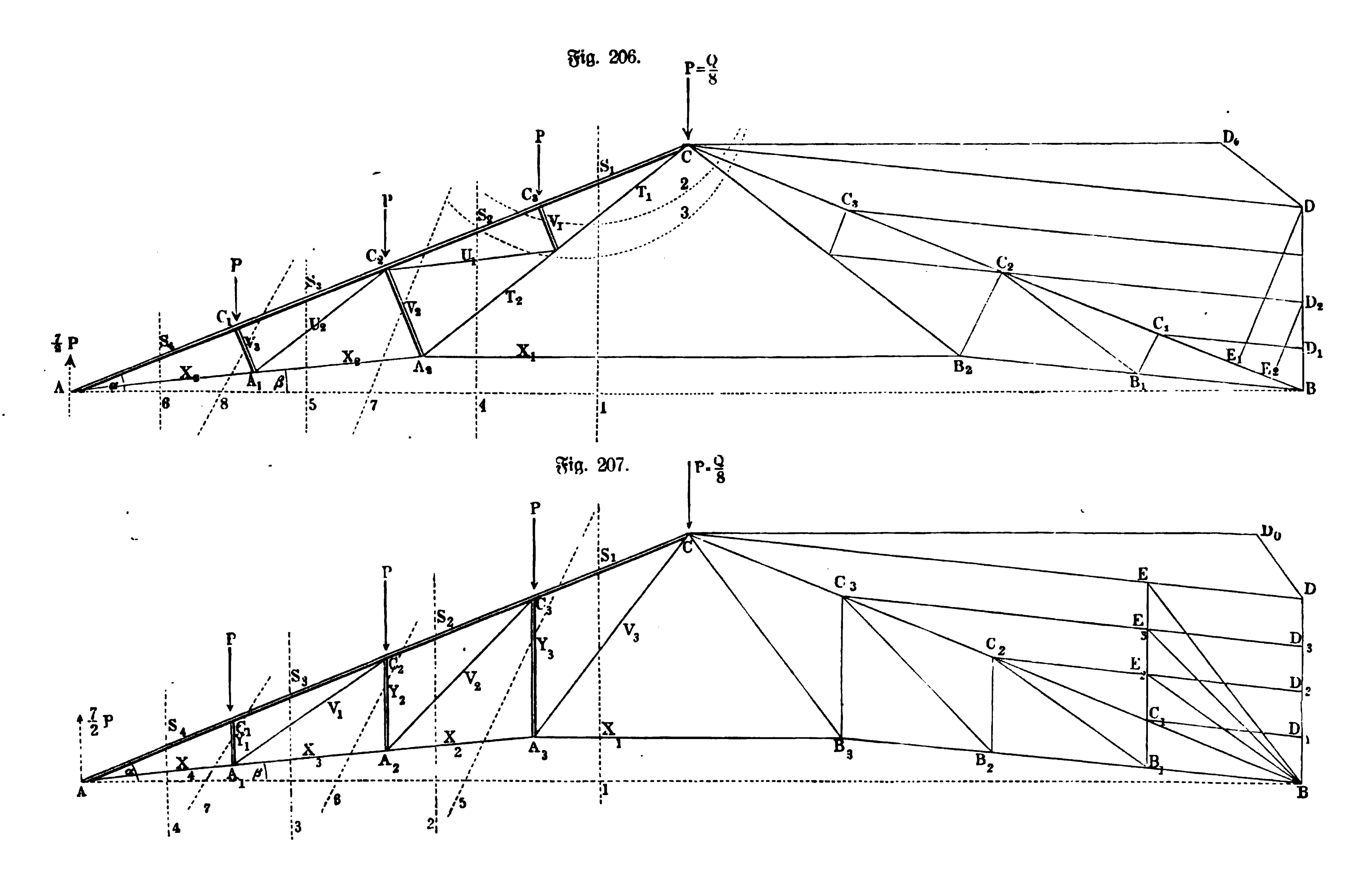


Fig. 207.

$$S_4 = - Q \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)} (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16}),$$
$$X_3 = Q \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)} (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16}),$$
$$V_2 = - \frac{Q}{4} \cos\alpha; \; V_3 = - \frac{Q}{8} \cos\alpha.$$

Es sei BD normal zu AB; CD, C_2D_2 und C_1D_1 werden mit BB_2 parallel gezogen, ebenso CD_0 parallel mit AB, und DD_0 parallel mit CB_2; endlich seien DE und D_2E_2 normal zu BC, dann ist, das Maß von BD gleich dem Maß von $\frac{Q}{4}$ gesetzt:

$$S_1 = BC + BC_2 + BC_1 - BE - BE_2 = 7\,BC_1 - 3\,BE_2,$$
$$S_2 = BC + BC_2 + BC_1 - BE = 7\,BC_1 - 2\,BE_2,$$
$$S_3 = BC + BC_2 + BC_1 - BE_2 = 7\,BC_1 - 1\,BE_2,$$
$$S_4 = BC + BC_2 + BC_1 = 7\,BC_1,$$
$$X_1 = CD_0; \; X_2 = CD + C_2D_2 = 6\,C_1D_1;$$
$$X_3 = CD + C_2D_2 + C_1D_1 = 7\,C_1D_1,$$
$$T_1 = C_2D_2 + C_1D_1 + DD_0 = 3\,C_1D_1 + DD_0;$$
$$T_2 = C_2D_2 + DD_0 = 2\,C_1D_1 + DD_0,$$
$$U_1 = U_2 = C_1D_1; \; V_1 = V_3 = D_2E_2; \; V_2 = DE.$$

Rücken die Punkte A_2 und B_2 in die Horizontale AB, so fällt D_0 mit D zusammen, deshalb ist DD_0 gleich Null und

$$T_1 = C_2D_2 + C_1D_1 = 3\,C_1D_1; \; T_2 = C_2D_2 = 2\,C_1D_1.$$

Für die in Figur 207 dargestellte Konstruktion gilt folgendes: Es sei BD normal zu AB; CD, C_3D_3, C_2D_2, C_1D_1 werden mit BB_3 parallel gezogen; ferner sei CD_0 mit AB, und DD_0 mit CB_3 parallel. Zieht man noch C_1E parallel mit BD, verbindet E, E_3, E_2 mit B, welche Linien den Stangenrichtungen B_3C, B_2C_3, B_1C_2 parallel laufen, und setzt man das Maß von BD gleich dem Maß von $\frac{Q}{4}$, so ist:

$$S_1 = BC + BC_1; \; S_2 = BC + 2\,BC_1; \; S_3 = S_4 = BC + 3\,BC_1;$$
$$V_1 = BE_2; \; V_2 = BE_3; \; V_3 = BE + DD_0;$$
$$X_1 = CD_0; \; X_2 = CD + DE; \; X_3 = CD + 2\,DE; \; X_4 = CD + 3\,DE;$$
$$Y_1 = 2\,C_1E_2; \; Y_2 = 3\,C_1E_2; \; Y_3 = 4\,C_1E_2.$$

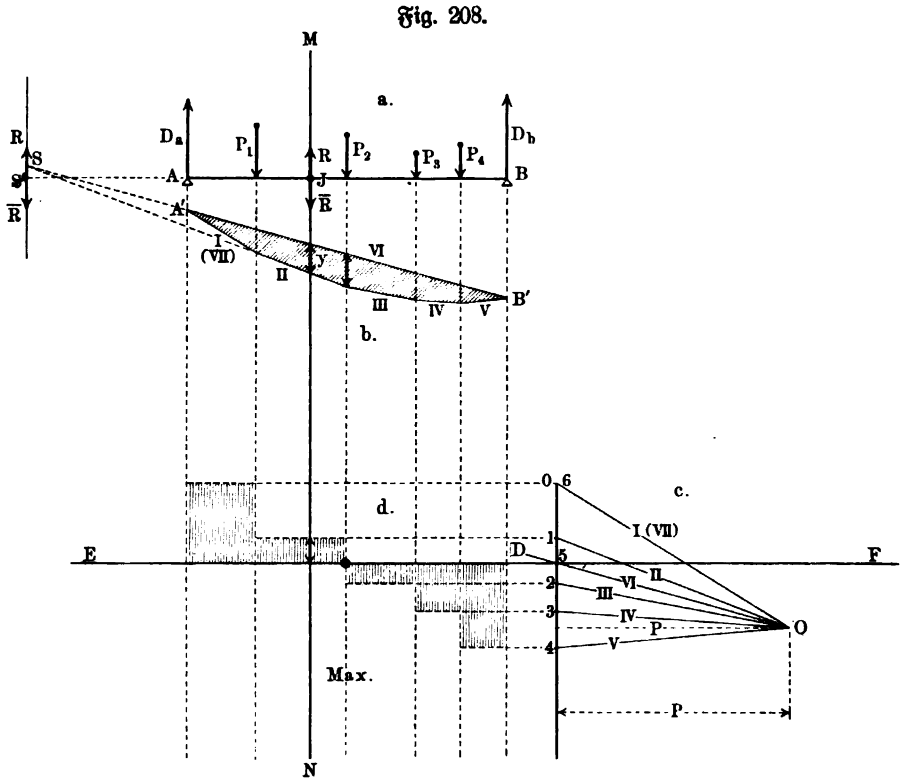
Rücken die Punkte A_3 und B_3 in die Horizontale AB, so fällt D_0 mit D zusammen, DD_0 wird also Null und V_3 wird gleich BE.

8. Konstruktive (graphostatische) Behandlung von Balken mit Einzellasten bei einfacher horizontaler Lagerung. Bei einem frei auf zwei Stützen wagerecht ruhenden Balken (vergl. Fig. 208 a. f. S.), der durch einzelne Kräfte senkrecht zu seiner Achse (Einzellasten) beansprucht ist, hat man zunächst wieder die Wirkung der Stützen als Kräfte (Auflagerreaktionen D_a und

D_b) darzustellen. Rechnerisch geschieht dies am besten durch den Momentensatz, indem man den Drehpunkt einmal nach A und einmal nach B legt, wobei die Gleichung $D_a + D_b = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ zur Kontrolle dient.

Bei der graphostatischen Behandlung hat man zwar $D_a + D_b$, nicht aber D_a und D_b, und demgemäß fehlt auch in der Nebenfigur für die Folge P_1, P_2, P_3, P_4, D_b, D_a zunächst der Teilpunkt 5 und demnach auch der Polstrahl $O\,5$ oder VI. Legt man trotzdem das Seileck, das sich hier schließen muß, in die Hauptfigur ein, so erhält man durch V den Schnittpunkt B'

Fig. 208.



und durch VII, welches ja mit I zusammenfällt, den Schnittpunkt A', d. h. $A'B'$ ist VI. Die Parallele OD in der Nebenfigur zu $A'B'$ in der Hauptfigur giebt also die Lage von Punkt 5. Dadurch ist $D_a + D_b = \overline{40}$ zerlegt in $D_b = \overline{45}$ und $D_a = \overline{50}$.

Um nun die inneren Kräfte (vergl. § 65) an einer beliebigen Schnittstelle J, entsprechend dem Schnitt MN, kennen zu lernen, haben wir entweder das Trägerstück rechts vom Schnitte oder das Trägerstück links vom Schnitte fortzudenken und zu fragen, welche Kräfte an seine Stelle im Schnitte anzubringen sind. Mit dem linken Trägerstücke beseitigt man die Kräfte $[D_a]$ und $[P_1]$. Da $D_a = \overline{50}$ und $P_1 = \overline{01}$ ist, so ist die Resultante dieser Kräfte durch $\overline{51}$ bestimmt. Die Lage dieser Resultante wird bestimmt durch den

Schnittpunkt der offenen Enden eines Seilecks, welches den Kräften $\overline{50}$ und $\overline{01}$ entspricht. Dieses braucht nicht besonders gezeichnet zu werden, da es durch VI, I, II der Hauptfigur gegeben wird, so daß der Schnitt S von VI und II einen Punkt der Resultante $[R]$ liefert. Das Moment von $[R]$ für einen Punkt J der Schnittstelle als Drehpunkt ist zunächst $+ R \,.\, S'J$, wofür aber (vergl. S. 327) auch $+ y \,.\, P$ gesetzt werden darf, falls man die Strecke auf MN durch y und die Poldistanz durch P bezeichnet.

Mit dem rechten Trägerstück beseitigt man die Kräfte $[P_2]$, $[P_3]$, $[P_4]$ und $[D_b]$. Da $P_2 = \overline{12}$, $P_3 = \overline{23}$, $P_4 = \overline{34}$ und $D_b = \overline{45}$ ist, so ist die Resultante dieser Kräfte durch die Strecke $\overline{R} = \overline{15}$ bestimmt. Das entsprechende Seileck wird durch II, III, IV, V, VI der Hauptfigur gegeben, so daß der Schnitt der offenen Enden II und VI wieder den Punkt S für die Resultante liefert. Ihr Moment ist zunächst $- R \,.\, S'J$, wofür auch $- y \,.\, P$ gesetzt werden kann.

Aus diesen Betrachtungen fließt die Regel: Um die inneren Kräfte an einer Stelle J des Balkens kennen zu lernen, legt man an dieser, senkrecht zur Achse des Balkens, einen geraden Schnitt. Verlängert man die Seiten des Seilecks, welche von diesem Schnitte getroffen werden, bis zu ihrem Schnittpunkte S, so gehen die Resultanten $[R]$ und $[\overline{R}]$ der beiden Gruppen der äußeren Kräfte, welche der Schnitt abgrenzt, durch diesen Punkt. Die Größe dieser Resultanten, welche Gegenkräfte sind, bestimmt man aus dem Krafteck der Nebenfigur. Die Momente der beiden Kräftegruppen für die Schnittstelle als Drehpunkt werden durch die Produkte $+ y \,.\, P$ und $- y \,.\, P$ dargestellt, in denen y die Strecke bezeichnet, welche das Seileck auf der Schnittgeraden MN abgrenzt, während P die Poldistanz ist, welche auch von vornherein gleich der Einheit der Kräfte gezeichnet werden kann, da die Lage von O ja völlig willkürlich ist.

Bringt man an der Schnittstelle in der Geraden MN die Kräfte $[R]$ und $[\overline{R}]$ an, welche sich aufheben, so kann man entweder $[R]$ in S' und $[\overline{R}]$ in J zu einem Kräftepaar vom Moment $+ y \,.\, P$ zusammenfassen, während noch $[R]$ in J übrig bleibt, oder man kann $[\overline{R}]$ in S' und $[R]$ in J zu einem Kräftepaar vom Momente $- y \,.\, P$ zusammenfassen, während $[\overline{R}]$ in J übrig bleibt.

Thut man beides, nachdem man an der Schnittfläche die Kräfte $[R]$ und $[\overline{R}]$ zweimal angebracht hat, so halten sich an der Schnittstelle $[R]$ und $[\overline{R}]$, sowie $+ y \,.\, P$ und $- y \,.\, P$ das Gleichgewicht, wie im voraus zu ersehen ist. Man nennt $[R]$ und $[\overline{R}]$ in J die (vertikalen) Schubkräfte oder Transversalkräfte der Schnittstelle, man nennt ferner $+ y \,.\, P$ und $- y \,.\, P$ die Drehungsmomente der Schnittstelle.

Die Kenntnis dieser Schubkräfte und Drehungsmomente ist für die Beurteilung der Leistungsfähigkeit des Trägers durchaus erforderlich. Sind die Schubkräfte zu groß, so zersplittert der Balken in der Vertikalen, sind die Drehungsmomente zu groß, so zerbricht der Balken durch Biegung.

Wählt man die eine Gruppe der Schubkräfte, z. B. die Gruppe, welcher $[R]$ angehört, für die Untersuchung aus, so kann man sie leicht, wie es Fig. 208 d zeigt, mit Hülfe des Kraftecks unterhalb des Balkens graphisch

veranschaulichen, so daß jeder Schnitt MN die zu J gehörige Schubkraft liefert.

Klappt man die Fig. 208 d um die Gerade EF herum, so daß sie wieder in die Ebene der Zeichnung fällt, so erhält man die graphische Darstellung für die andere Gruppe, der ein Krafteck von der Folge P_4, P_3, ... entsprechen würde.

Die schraffierte Fläche, welche das Seileck (Fig. 208 b) umschließt, heißt Momentenfläche.

Das Maximum von y, welches auf dem Reißbrette durch Verschiebung von $A'B'$ gefunden wird, bezeichnet die Stelle, für welche das Moment ein Maximum ist, man nennt sie die gefährliche Stelle, den dort befindlichen Balkenquerschnitt den gefährlichen Querschnitt, weil dort die Gefahr einer Zerstörung durch Biegung am größten ist. Sie liegt in diesem Falle stets in einem der Belastungspunkte des Balkens und zwar in dem, für welche die Schubkraft (vergl. Fig. 208 d) den Wert „Null" hat.

Das Maximum der Schubkraft liegt unter der Stütze, so daß also hier die Gefahr einer Zerstörung durch diese (Abscheren) am größten ist.

In Fig. 208 entsprechen die Balkenteile von links nach rechts 1,5; 2,0; 1,5; 1,0; 1,0 Metern und die Kräfte in derselben Folge 12, 10, 6, 8 Tonnen (= 1000 kg). Ferner ist $P = 50$ t.

Man nennt die Figuren 208 b, 208 c, 208 d den zu Fig. 208 a gehörigen Kräfteplan.

9. Behandlung von Balken mit stetiger Belastung bei einfacher horizontaler Lagerung. Wird der Balken der Nr. 8 nicht durch einzelne Kräfte in Anspruch genommen, sondern (wie es z. B. dem eigenen Gewichte des Balkens entspricht) durch eine stetige Belastung, so hat man zunächst für jedes Element der Balkenachse, dessen Belastung entsprechend, ein Lot errichtet zu denken; die Endpunkte dieser Lote bestimmen die sogenannte Belastungslinie.

Teilt man die Fläche zwischen Belastungslinie und Balkenachse, die sogenannte Belastungsfläche, senkrecht zur Balkenachse, in Streifen von gleicher Breite, so kann man in dem Schwerpunkt jedes Streifens dessen Fläche als Belastung wirksam denken. Damit ist dieser Fall in beliebiger Annäherung auf den vorigen Fall zurückgeführt. Es ist zweckmäßig, die Breite der Streifen so gering zu nehmen, daß sie innerhalb der Grenzen der beabsichtigten Annäherung als Rechtecke angesehen werden können, so daß die Schwerpunkte auf halber Höhe liegen und die Belastungen stets diesen Höhen proportional sind.

Die Belastungslinie ist oft durch die Angabe der Art der Belastung geometrisch genau gegeben. Dies tritt z. B. in dem einfachsten, aber auch wichtigsten Falle ein, nämlich bei der gleichmäßigen Belastung der Horizontalen. Eine solche Belastung stellt z. B. das Eigengewicht jedes sonst unbelasteten prismatischen Balkens bei horizontaler Lagerung dar.

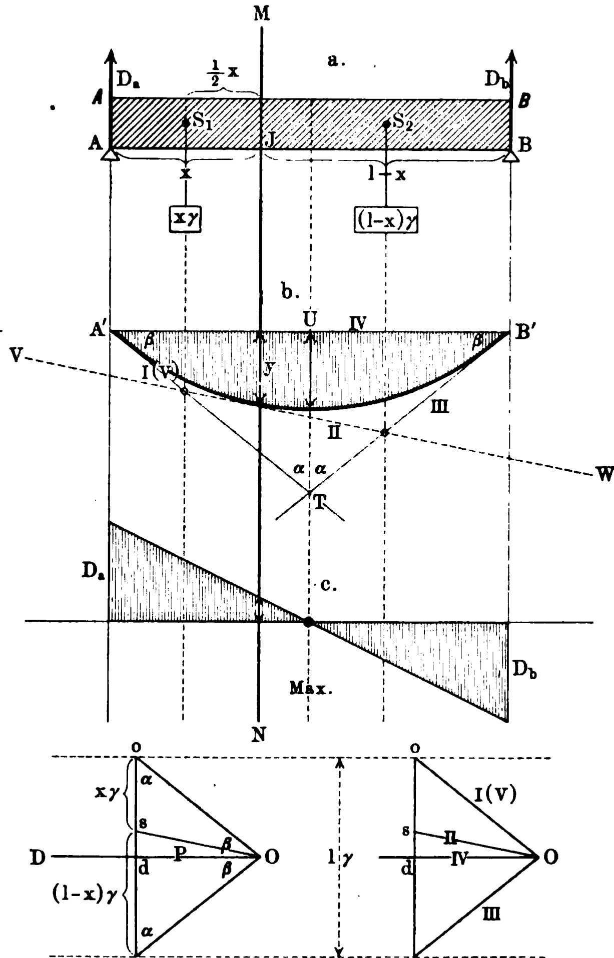
Die Belastungslinie ist hier (vergl. Fig. 209) eine Parallele $\mathbf{AB}$ zur Balkenachse AB, die Belastungsfläche ein Rechteck $AB\mathbf{BA}$.

Beträgt die Belastung für den laufenden Meter, einschließlich des Eigengewichtes des Balkens, γ kg, so hat ein Balken von der Länge l die Belastung $Q = l\gamma$ zu tragen ($AB = l$, $AA = \gamma$).

Die Auflagerreaktionen [D_a] und [D_b] werden hier einander gleich, d. h. man hat $D_a = D_b = \frac{1}{2} Q$.

Für einen Schnitt, der von A den Abstand x hat, ist die Schubkraft $D_a - x\gamma$, da AJ die Belastung $x\gamma$ trägt.

Fig. 209.



Die Schubkraft hat für $x = \frac{D_a}{\gamma} = \frac{1}{2} l$ den Wert Null, für $x = o$ den Wert D_a und für $x = l$ den Wert $-D_a$. In Fig. 209 c ist die Schubkraft graphisch dargestellt.

Um das Moment für die Schnittstelle J zu bestimmen, hat man zu beachten, daß sich die Belastung $x\gamma$ der Strecke x in ihrem Schwerpunkt konzentriert denken läßt, also am Arme $\frac{x}{2}$ wirkt für J als Drehpunkt. Man hat also, das linke Trägerstück benutzend, für das Moment y den Ansatz:

$$y = D_a \, . \, x - (x\gamma)\,\frac{x}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\gamma\,(lx - x^2).$$

Es ist $y = 0$ für $x = 0$ und für $x = l$, während für $x = \frac{l}{2}$ erhalten wird $y = \frac{1}{8}\gamma l^2 = \frac{1}{8} Q l$.

Die graphische Darstellung des Momentes führt zu einer Parabel (vergl. Fig. 209 b).

Das **Maximum** des **Momentes** liegt in der Mitte, entsprechend dem Werte „**Null**“ der **Schubkraft**, deren Maxima wieder an den Enden liegen.

Für das Krafteck ist $\overline{on} = l\gamma = Q$ und $P = 1$ und $Oo = On$. Die Polstrahlen Oo und On liefern die Endtangente $A'T$ und $B'T$ der Seilkurve (Parabel) in Fig. 209 b.

Wegen der Ähnlichkeit von $\triangle\ A'UT$ und Odo ist

$$UT : \tfrac{1}{2} l\gamma = \frac{l}{2} : P,$$

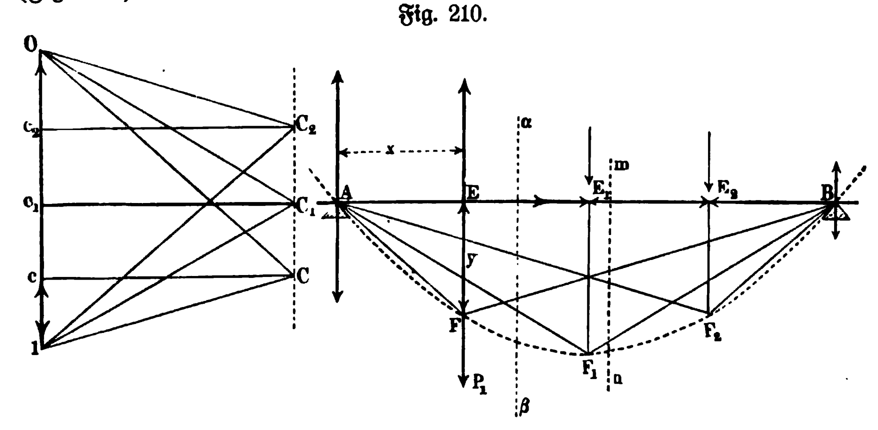
d. h. man hat $UT = \frac{1}{4}\gamma l^2 = \frac{1}{4} Ql$ für $P = 1$, so daß der Scheitel der Parabel UT halbiert.

Um eine beliebige Tangente der Parabel VW und damit das zugehörige y zu erhalten, ohne die Parabel selbst zu zeichnen, verfährt man folgendermaßen. Denkt man sich statt der stetigen Belastung zwei, dem Schnitte MN entsprechende Belastungen in S_1 und S_2 bezw. vom Werte $x\gamma$ und $(l - x)\gamma$, so würde Fig. 209 e das zugehörige Krafteck darstellen, mit dessen Hülfe I, II, III, IV, V in Fig. 209 b eingezeichnet werden könnte. Demnach ist II die Verbindungsgerade der Schnittpunkte von $A'T$ mit der Vertikalen durch S_1 und von $B'T$ mit der Vertikalen durch S_2 bezw. die Parallele zu II der Nebenfigur durch einen dieser Schnittpunkte.

Teilt man AB in eine Anzahl gleicher Teile, so erhält man nach Vorstehendem leicht die, den Schnitten dieser Teilung entsprechenden Tangenten, wobei die Parabel ausschattiert wird.

10. Der Balken mit beweglichen Lasten. Ein Balken AB sei in horizontaler Lage an beiden Enden unterstützt und beliebig belastet, und es bewege sich außerdem eine Last P_1 von A nach B über den Balken fort (Fig. 210).

Fig. 210.



Man denke die Kraft P_1 in einer bestimmten Lage auf dem Balken, z. B. den Querschnitt in E angreifend, wobei AE gleich $\frac{1}{4} AB$ sein mag, dann ist der von P_1 herrührende, in A wirksame Druck gleich $\frac{3}{4} P_1$ und der in B wirksame gleich $\frac{1}{4} P_1$. Bei der Zeichnung des Kräfteplanes ist $O1 = P_1$ und c auf $O1$ so gewählt, daß $Oc = \frac{3}{4} O1$, also $1c$ und cO die Re-

aktionen in B und A vorstellen. Errichtet man nun in c eine Normale cC und nimmt diese als Polabstand P, verbindet C mit O und 1, so sind CO, Cc und $C1$ die Richtungen der Seilpolygonseiten für den Pol C und die angenommene Lage von P_1, die Schlußlinie des Seilpolygons ist daher mit AB parallel und kann in AB selbst gelegt werden, wodurch das Seilpolygon AFB entsteht.

Die in demselben mit EF parallel gezogenen Ordinaten stellen die von der beweglichen Last P_1 herrührenden Momente in den einzelnen Querschnitten vor, um welche sich also die in den Querschnitten bereits vorhandenen Momente, hervorgerufen durch stetig verteilte und konzentrierte Lasten, vergrößern. Zugleich ersieht man, daß dieses hinzuzufügende Moment für den Querschnitt am größten ist, über dem sich die bewegende Kraft gerade befindet. Während der Bewegung von P_1 **vergrößert sich also das Moment** Mo **der außerhalb eines beliebigen Querschnitts wirkenden äußeren Kräfte, und zwar desto mehr, je mehr sich** P_1 **diesem Querschnitt nähert.** Denkt man in gleicher Weise für verschiedene Lagen von P_1 den Kräfteplan verzeichnet, indem man die Schlußlinie AB des Seilpolygons beibehält, so muß sich der Pol C des Kräftepolygons in einer zu $O1$ parallelen Linie bewegen. In der Figur sind unter dieser Voraussetzung noch die beiden Kräftepläne verzeichnet für den Fall, daß P_1 die Mitte E_1 des Balkens sowie den Punkt E_2 erreicht, welcher auf $\frac{3}{4}$ der Länge von AB angenommen worden ist. Nach dem Vorigen handelt es sich hauptsächlich um den geometrischen Ort der Punkte F, welcher zur Beurteilung der größten Momente genügt und die Verzeichnung der Kräftepläne für die verschiedenen Lagen von P_1 erübrigt. Es sei $AE = x$, $EF = y$ und $AB = l$, so ist das, durch P_1 hervorgerufene, Moment Mo für den Querschnitt in E

$$Mo = y = P_1 \frac{(l - x)x}{l}.$$

Verlegt man den Koordinaten-Anfangspunkt nach F_1 und nimmt den positiven Teil der Y-Achse nach oben gerichtet, so ergiebt sich als Gleichung des geometrischen Ortes für F

$$-y + \frac{P_1 l}{4} = \frac{P_1}{l}\left(\frac{l}{2} - x\right)\left(\frac{l}{2} + x\right)$$

oder

$$x^2 = \frac{l}{P_1} y,$$

woraus sich ergiebt, daß dieser geometrische Ort eine Parabel ist.

Behufs Untersuchung der Veränderung der Transversalkräfte in den einzelnen Querschnitten durch die von A nach B fortschreitende Last P_1 sei für eine beliebige Stelle E des Balkens die Kraft P_1 mit dem zugehörigen Kräfteplane verzeichnet, und es stelle mn den durch die stetig verteilten und konzentrierten Lasten bestimmten gefährlichen Querschnitt vor, für welchen also, abgesehen von der beweglichen Last P_1, die Transversalkraft Null, das Moment der äußeren Kräfte dagegen ein Maximum ist. Durch die bewegliche und in E angekommene Last vergrößert sich die in A bereits vor-

handene Reaktion um cO, und diese Vergrößerung ist in B gleich $1c$. Für irgend einen rechts von E gelegenen Querschnitt, z. B. $\alpha\beta$, kommt zu der bereits vorhandenen Transversalkraft durch die bewegliche Kraft die abwärts wirkende Kraft $cO - P_1$ hinzu. Sehen wir die nach aufwärts gerichtete Kraftrichtung als die positive an, so wird hiernach die Transversalkraft in allen Querschnitten zwischen E und mn, für welche die Mittelkraft der bereits vorhandenen äußeren Kräfte nach oben gerichtet ist, um $cO - P_1 = c1$ vermindert, in den Querschnitten zwischen mn und B dagegen, für welche die Mittelkraft der bereits vorhandenen äußeren Kräfte nach unten gerichtet ist, um denselben Wert $c1$ in absoluter Hinsicht vergrößert. Mit dem Fortschreiten von P_1 nimmt cO ab, während sich $c1$ vergrößert. Je näher also P_1 dem in Betracht gezogenen Querschnitt kommt, desto größer wird $c1$, und diese Änderung der Transversalkraft in $\alpha\beta$ erreicht ihr Maximum, sobald P_1 in den fraglichen Querschnitt rückt. Überschreitet jetzt die Last P_1 den Querschnitt $\alpha\beta$, ist sie also z. B. nach E_2 gekommen, so erfahren die in den Querschnitten von A bis mn auftretenden Transversalkräfte, welche von den vorhandenen Belastungen herrühren und nach oben gerichtet sind, eine Vermehrung um cO, während die in den Querschnitten von mn bis E_2 wirksamen Transversalkräfte in absoluter Hinsicht um denselben Wert cO vermindert werden, da deren Resultante nach unten gerichtet ist. Auch diese Änderung war am größten, als sich die Last in dem in Betracht gezogenen Querschnitt befand. Hiernach tritt in den einzelnen Querschnitten, sobald die Last darüber fortgeht, eine plötzliche Änderung der zugehörigen Transversalkraft ein, indem die vor dem gefährlichen Querschnitte gelegenen Querschnitte eine Verminderung ihrer Transversalkraft erleiden, bis die Last an den betreffenden Querschnitt gelangt, in welchem Augenblicke die größte Verminderung sich plötzlich in die größte Vermehrung umsetzt, d. h. für diese Querschnitte springen die Transversalkräfte von ihrem Minimal- zu ihrem Maximalwerte. Für die Querschnitte, welche hinter dem gefährlichen liegen, tritt das umgekehrte Verhalten ein, indem beim Überschreiten der Last der Maximalwert der Transversalkraft sich plötzlich in seinen Minimalwert verwandelt.

Da beim Bewegen der Last P_1 die Summe der Transversalkräfte für die vor dem gefährlichen Querschnitte gelegenen Querschnitte kleiner, für die nach demselben gelegenen aber größer wird, der gefährliche Querschnitt aber jederzeit die Stelle einnimmt, für welche diese Summe gleich Null ist, so folgt daraus, daß der gefährliche Querschnitt der von dem einen Ende herkommenden Last entgegenrückt. Sobald sich Last und gefährlicher Querschnitt getroffen, bewegt sich derselbe mit der Last vorwärts, überschreitet mit ihr seine ursprüngliche Lage und bleibt mit derselben bis zu der Stelle verbunden, wo er mit der von der entgegengesetzten Seite herkommenden Last zusammentreffen würde. Von hier aus bewegt sich der gefährliche Querschnitt wieder zurück und erreicht seine ursprüngliche Lage in dem Augenblicke, wo die Last den Balken verläßt.

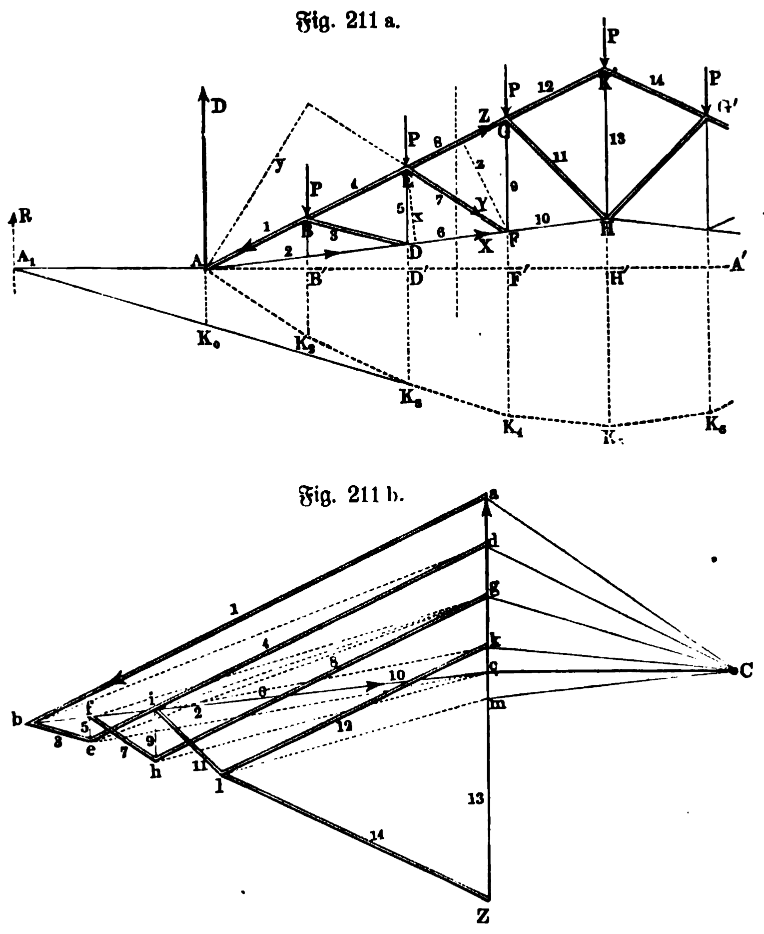
Wird der Kräfteplan der mobilen Last mit dem der stetig verteilten und der konzentrierten Belastung in gehöriger Weise verbunden, so lassen sich die Gesamt-Transversalkräfte, sowie das Moment der biegenden Kräfte für jeden

Querschnitt auf leichte Weise bestimmen, sowie sich dann auch die Quer- schnitte des Balkens ergeben, zwischen welchen der gefährliche Querschnitt hin- und hergeht.

11. Konstruktive (graphostatische) Behandlung eines Dachbinders. Die graphostatische Behandlung des ersten, der in Nr. 7 berechneten Dachbinder zeigt Fig. 211. Die früher für jedes Feld angenommene Belastung $\frac{Q}{8}$ ist gleich P gesetzt, und das Kräftepolygon $ad \ldots m$ in Fig. 211 b gezeichnet worden.

Fig. 211 a.

Fig. 211 b.



Wegen der gleichmäßigen Verteilung der Belastung auf beide Hälften des Dachbinders sind die Auflagerreaktionen gleich der halben Belastung und es ist demnach in A eine aufwärts wirkende Kraft gleich $\frac{7}{2} P = ca$ wirksam. Man zerlege ca nach Richtung von BA und DA, indem

man $ab // BA$ und $cb // DA$ zieht. Denkt man die Pfeile der Komponenten in die Stangenverbindungen eingetragen, so ersieht man, daß BA auf Druck, AD auf Zug in Anspruch genommen wird. An dem Knoten B wirken jetzt die beiden Kräfte 1 und P, welche sich zur Resultante bd vereinigen. Diese wird zerlegt nach Richtung BE und BD, wodurch sich die Komponenten de und be, welche Druckkräfte sind, ergeben. Die an dem Knoten D wirksamen Kräfte 2 und 3 werden zur Mittelkraft ec vereinigt und dann nach Richtung von DE und DF zerlegt, wodurch die Zugkräfte $ef = 5$ und $fc = 6$ entstehen. An dem Knoten E vereinigt sich 4, 5 und P zu fg, indem zuerst P mit 4 zu eg und eg mit ef zu fg vereinigt wird. Diese Kraft wird nach Richtung von EG und EF zerlegt, wodurch die Druckkräfte 7 und 8 entstehen. Die Vereinigung von 7 und 6 zu hc wird nach Richtung von FG und FH zerlegt, wodurch sich die Zugkräfte $hi = 9$ und $ic = 10$ ergeben. Die Vereinigung von 8, 9 und P liefert die Kraft ik an dem Knoten G, welche nach Richtung von GK und GH zerlegt, die Druckkräfte $il = 11$ und $lk = 12$ liefert. Für den Knoten K vereinigt man 12 und P zur Kraft lm und zerlegt diese nach Richtung von KH und KG', so entsteht die Druckkraft $lZ = 14 = lk$ und die Zugkraft $mZ = 13$. Auf der anderen Seite der Figur erleiden die entsprechend gelegenen Stangen dieselbe Inanspruchnahme wie die für die erste Hälfte bestimmten Stangen.

Man wähle den Pol C im Kräftepolygon so, daß Cc gleich der Kräfteeinheit, ziehe die Strahlen von C nur nach den äußeren Kräften und konstruiere das denselben zugehörige Seilpolygon, dessen Schlußseite parallel mit Cc oder mit AA' ausfällt, dann geben die Ordinaten im Seilpolygone die Momente der auf den betreffenden Querschnitt einwirkenden äußeren Kräfte. Wir denken ein Feld des Trägers durchschnitten, den rechts liegenden Teil der Figur entfernt und in den drei durchschnittenen Stangen die Kräfte Z, Y, X angebracht, welche das gestörte Gleichgewicht wieder herstellen. Es werde zur Berechnung der drei Kräfte Z, Y, X, den Bemerkungen auf S. 363 gemäß, der Momentenpunkt in F, A und E angenommen, so ist für F das Moment der äußeren Kräfte gleich $F'K_4$, und die Resultante R hat ihren Angriffspunkt in A_1. Es muß demnach $R \,.\, A_1F' = Zz = F'K_4$ sein, da die Kräfte Y und X verschwinden, unter z den Arm Z in Bezug auf F verstanden. Mißt man nun z auf dem Längenmaßstab, so ergiebt sich $Z = \frac{F'K_4}{z}$, und zwar muß Z dem in der Figur angebrachten Pfeile entgegen wirksam sein, d. h. Z stellt einen Druck vor. Für E als Momentenpunkt ist $R \,.\, A_1D' = X \,.\, x = D'K_3$, daher $X = \frac{D'K_3}{x}$, und zwar stellt diese Kraft eine Zugspannung dar. Für A als Momentenpunkt ist $R \,.\, AA_1 = Y \,.\, y = AK_0$, der Ähnlichkeit der Dreiecke gemäß, daher $Y = \frac{AK_0}{y}$, für welche Kraft der Pfeil wiederum umgedreht werden muß, da FE auf Druck beansprucht wird. In ähnlicher Weise lassen sich mittels der Momentenmethode die inneren Kräfte für die verschiedenen Felder berechnen, bloß für die Stangen

AB und AD wird man zweckmäßigerweise die oben durchgeführte Methode der Zerlegung anwenden.

In der Figur sind diejenigen Stangen, welche einen Druck zu erleiden haben, mit doppelten Linien ausgezogen. Als Einheiten wurden benutzt: für die Längenabmessungen $\frac{1}{8}$ cm $= 1$ m, für die Belastungen 1 cm $= 4500$ kg. Die auf jeden Knoten wirkende Last P ist nach dem Kräftepolygon gleich $Oa = \frac{2}{3}$ cm, also gleich 3000 kg, und die gemeinschaftliche Momentenbasis $Cc = 3\frac{1}{3}$ cm bezeichnet deshalb 15000 kg. Ferner ergiebt sich aus der Figur: $F'K_4 = 2$ cm, $D'K_3 = 1{,}6$ cm, $AK_0 = 0{,}77$ cm, $x = 1$ cm, $y = 2\frac{5}{9}$ cm, $z = 1\frac{1}{3}$ cm. Multipliziert man diese Abmessungen dem Längenmaßstabe gemäß mit 3, so erhält man die wirklichen Längen in Metern. Hiernach ist also $Xx = 15000$. $D'K_3 = 72000$ mkg, $Yy = -15000$. $AK_0 = -34500$ mkg, $Zz = -15000$. $F'K_4 = -90000$ mkg;

$$X = \frac{72000}{3} = 24000 \text{ kg}; \quad Y = -\frac{34500}{7\frac{2}{3}} = -4500 \text{ kg};$$

$$Z = -\frac{90000}{4} = -22500 \text{ kg}.$$

Die letzten drei Werte lassen sich durch Abmessen der Linien $6 = cf = 5\frac{1}{3}$ cm, $7 = fh = 1$ cm und $8 = hg = 5$ cm direkt erhalten, wenn man diese Abmessungen dem Belastungsmaßstabe gemäß mit 4500 multipliziert.

12. Berechnung eines Brückenträgers. Zwei Fachwerkträger, aus quadratischen Feldern mit einfachem diagonalen System bestehend, von denen der eine in Fig. 212 (a. f. S.) dargestellt ist, tragen die Bahn einer Brücke. Die Belastung besteht hier aus einer konstanten, dem Gewicht der Konstruktion entsprechenden, und aus einer veränderlichen Last, von einem Bahnzug, Menschengedränge 2c. herrührend. Die konstante Last betrage 1000 kg und die veränderliche 5000 kg auf jeden Meter Länge. Diese ist auf die beiden Fachwerksträger gleichmäßig verteilt anzunehmen, so daß also auf jeden derselben $\frac{1000}{2}$ kg und $\frac{5000}{2}$ kg für den laufenden Meter Länge in Rechnung zu bringen sind. Beträgt die Breite eines Feldes in jedem der beiden Träger 2 m, so hat also jedes Feld 1000 kg konstante und 5000 kg veränderliche Belastung auszuhalten, woraus sich für jeden der Knotenpunkte eine Belastung von $\frac{1000}{2}$ kg und $\frac{5000}{2}$ kg ergiebt. Dies ist die wirkliche Maximalbelastung der beiden Endpunkte des Trägers, während die übrigen Knotenpunkte im Maximum eine Belastung von 1000 kg und 5000 kg zu tragen haben.

Um die einzelnen Belastungen vom Werte 5000 unterscheiden zu können, geben wir ihnen die Marken, mit denen die unter ihnen liegenden Vertikalstangen (Y_0, Y_1, ...) bezeichnet sind (vergl. Fig. 212), und schreiben überdies $\frac{1}{2}.5000_0$ und $\frac{1}{2}.5000_8$ für 2500 an erster und letzter Stelle. Legt man den Drehpunkt in das Auflager rechts, so gilt zunächst für $[D]$ die Momentengleichung:

$$D \,.\, 16 = 1000\,(2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + \tfrac{1}{2}\,.\,16) + 5000_7\,.\,2 + 5000_6\,.\,4 + 5000_5\,.\,6 + 5000_4\,.\,8 + 5000_3\,.\,10 + 5000_2\,.\,12 + 5000_1\,.\,14 + 5000_0\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,16.$$

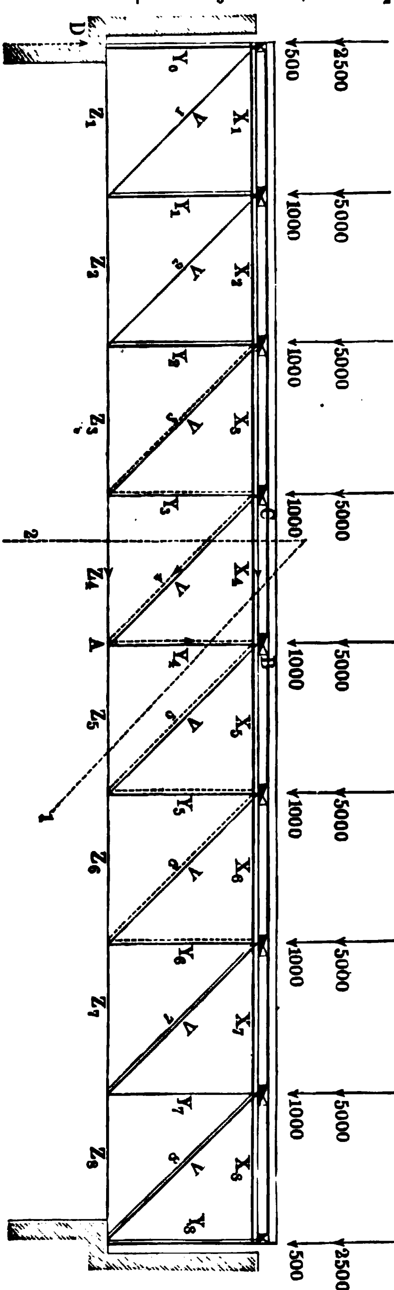


Fig. 212.

Man sieht sofort, daß der Fortfall jedes Gliedes der Gruppe 5000 den Wert von D verringert, d. h. D erhält bei **voller** Belastung seinen größten Wert (Maximum), und es ist

$$D_{Max} = 24\,000 \text{ kg}.$$

Um ferner z. B. $[X_4]$, $[Y_4]$, $[Z_5]$ zu bestimmen, benutzt man den Schnitt 1. Man hat für A als Drehpunkt:

$$X_4\,.\,2 + D\,.\,8 - 1000\,(2 + 4 + 6 + \tfrac{1}{2}8) - 5000_3\,.\,2 - 5000_2\,.\,4 - 5000_1\,.\,6 - 5000_0\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,8 = 0.$$

Setzt man für D den zuerst entwickelten Wert ein, so hat man

$$X_4\,.\,2 = -\,1000\,.\,32 + 1000\,.\,16 - 5000_7\,.\,1 - 5000_6\,.\,2 - 5000_5\,.\,3 - 5000_4\,.\,4 - 5000_3\,(5-2) - 5000_2\,(6-4) - 5000_1\,(7-6) - 5000_0\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,(8-8).$$

Man sieht wieder sofort, daß der Fortfall jedes Gliedes der Gruppe 5000 den Zahlenwert von X_4, welcher negativ (Druck) ist, verringert, so daß auch X_4 bei voller Belastung seinen größten Wert erhält, und es ist

$$(X_4)_{Max} = -\,48\,000 \text{ kg}.$$

Ebenso findet man mit Hülfe des Drehpunktes B, daß $[Z_5]$ bei voller Belastung seinen größten Wert (Zug) hat, und es ist

$$(Z_5)_{Max} = +\,48\,000 \text{ kg}.$$

Zur Berechnung von $[Y_4]$ müßte man nach der **Ritterschen** Regel den Schnittpunkt der Geraden von $[X_4]$ und $[Z_5]$ als Drehpunkt wählen. Dies geht nicht an, weil diese Geraden parallel sind. Statt dessen kann man unter Benutzung der Werte von $[X_4]$ oder $[Z_5]$ den Drehpunkt auf der Geraden

von $[Z_5]$ oder $[X_4]$ nehmen, z. B. in C. Da $[Y_4]$ vertikal liegt, so kann man statt dessen auch einfach die Summe der Vertikalkräfte bilden. Es ist dann:

$$D + Y_4 = 1000 \,.\, 3\tfrac{1}{2} + 5000_3 + 5000_2 + 5000_1 + \tfrac{1}{2} \,.\, 5000_0.$$

Bei Einführung des Wertes von D erhält man:

$$Y_4 = -1000 \,.\, \tfrac{1}{2} - 5000_7 \,.\, \tfrac{1}{8} - 5000_6 \,.\, \tfrac{2}{8} - 5000_5 \,.\, \tfrac{3}{8} - 5000_4 \,.\, \tfrac{4}{8}$$
$$+ 5000_3 (1 - \tfrac{5}{8}) + 5000_2 (1 - \tfrac{6}{8}) + 5000_1 (1 - \tfrac{7}{8})$$
$$+ 5000_0 \,.\, \tfrac{1}{2} (1 - \tfrac{8}{8}).$$

Bei voller Belastung ergiebt sich zunächst:

$$Y_4 = -3000\,\text{kg}.$$

Dieser Wert ist aber hier durchaus nicht das Maximum von Y_4.

Die Belastungen der Gruppe 5000 treten, soweit sie von der rechten Seite des Trägers stammen, mit negativem Zeichen, und soweit sie von der linken Seite des Trägers stammen, mit positivem Zeichen auf. Demnach läßt sich der negative Wert von Y_4 steigern, wenn mehrere oder alle Belastungen der Gruppe 5000 links von AB fortfallen, und man erhält

$$Y_4 = -6750\,\text{kg}$$

bei unbelasteter linker und voll belasteter rechter Seite. Bei unbelasteter rechter und voll belasteter linker Seite ergiebt sich

$$Y_4 = +3250\,\text{kg}.$$

Die Spannung $[Y_4]$ hat also nicht bei voller Belastung ihren größten Wert, sie ist eine Druckspannung, wenn die unbelastete Brücke von rechts aus belastet wird, mit dem Maximum 6750 kg und eine Zugspannung, wenn die unbelastete Brücke von links aus belastet wird, mit dem Maximum 3250 kg.

Die Bewegung einer Last von rechts nach links und die Bewegung einer Last von links nach rechts über die Brücke veranschaulicht diese Beziehungen.

Um etwa noch $[V_4]$ zu berechnen, benutzt man den Schnitt 2. Der Schnittpunkt von $[X_4]$ und $[Z_4]$ läge wieder im Unendlichen, so daß er als Drehpunkt unbrauchbar ist.

Wählt man den linken Auflagerpunkt als Drehpunkt, so kommt $[Z_4]$ nicht in Frage, und man hat zunächst den Abstand des Drehpunktes von $[V_4]$ festzustellen.

Da die Diagonale eines der Quadrate des Gitters $2\sqrt{2}\,\text{m}$ ist, so ist dieser Abstand $4\sqrt{2}\,m$.

Demnach gilt:

$$+ 4\sqrt{2} \,.\, V_4 + X_4 \,.\, 2 + 1000\,(6 + 4 + 2)$$
$$+ 5000_3 \,.\, 6 + 5000_2 \,.\, 4 + 5000_1 \,.\, 2 = 0.$$

Nach Einführung von X_4 erhält man:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \,.\, V_4 = 500 + 5000_7 \,.\, \tfrac{1}{8} + 5000_6 \,.\, \tfrac{2}{8} + 5000_5 \,.\, \tfrac{3}{8} + 5000_4 \,.\, \tfrac{4}{8}$$
$$- 5000_3 \,.\, \tfrac{3}{8} - 5000_2 \,.\, \tfrac{2}{8} - 5000_1 \,.\, \tfrac{1}{8}.$$

Der Wert $+ \frac{1}{2}\sqrt{2} \,.\, V_4$ stimmt überein mit $- Y_4$ und demnach gelten für V_4 ähnliche Beziehungen wie für Y_4. Bei unbelasteter linker und belasteter rechter Seite erhält V_4 sein Maximum als Zug im Werte von ungefähr

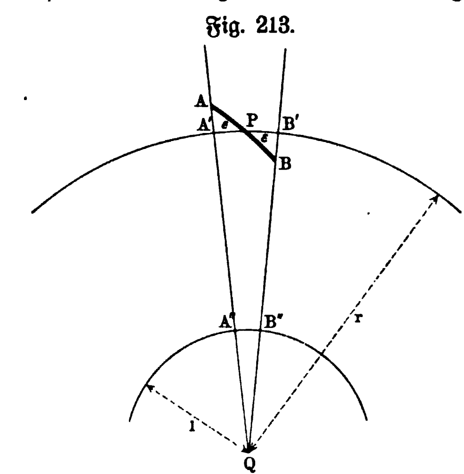
9550 kg, bei unbelasteter rechter und belasteter linker Seite erhält V_4 sein Maximum als Druck im Werte von ungefähr 4600 kg.

Die weitere Rechnung bietet keine Schwierigkeiten.

13. Das Potential der konzentrisch-homogen-geschichteten Kugel bei Geltung des Newtonschen Gesetzes. Wenn die gegenseitige Einwirkung der Atome zweier starrer Körper durch das Newtonsche Gesetz bestimmt wird, wie es für Körper der Außenwelt der Fall ist, so wirkt an jedem der beiden Körper ein System von unendlich-vielen Kräften [1]). Sind die beiden Körper konzentrisch-homogen-geschichtete Kugeln, wie es bei den Himmelskörpern angenähert zutrifft, so ist die Behandlung der entsprechenden Kraftsysteme verhältnismäßig leicht durchzuführen.

Wir betrachten dazu einen solchen Körper, d. h. wir setzen voraus, daß uns eine Kugel vom Radius R gegeben ist, welche in n konzentrische Schichten zerlegt werden kann, und zwar so, daß die einzelne Schicht homogen ist, während die Dichtigkeit von Schicht zu Schicht wechseln kann.

Fig. 213.



Die äußerste Schicht hat dann bei einer Dicke d den Inhalt $\frac{4}{3}R^3\pi - \frac{4}{3}(R-d)^3\pi = 4R^2d\pi - 4Rd^2\pi + \frac{4}{3}d^3\pi$, so daß $4\pi R^2 d$ bei kleinem d die erste Annäherung dieses Inhaltes darstellt.

Die Masse dieser Schicht läßt sich bei einer Dichtigkeit δ durch $4\pi R^2 d\delta$ ausdrücken.

Zu einem unendlich-kleinen, bei P gelegenen Flächenteilchen f der äußeren Begrenzung einer solchen Schicht gehört dann ein Körperteilchen von der Masse $fd\delta$. Steht dieses mit einem materiellen Punkte Q von der Masse μ in gegenseitiger Einwirkung nach dem Newtonschen Gesetze, so hat die entsprechende Kraft für $PQ = r$ den Wert

$$k \cdot \frac{(fd\delta)\mu}{r^2}.$$

Der Bau dieses Ausdruckes, in welchem nur $\frac{f}{r^2}$ für die einzelnen Körperteilchen der Schicht veränderlich ist, legt eine zweckmäßige Veranschaulichung nahe. Schlägt man, wie Fig. 213 andeutet, um Q mit r eine Kugel, welche f in P unter dem Winkel ε schneidet, so hat die Centralprojektion (entsprechend $A'B'$) von f (entsprechend AB) aus Q als Centrum auf diese Kugel den Wert $f \cos \varepsilon$.

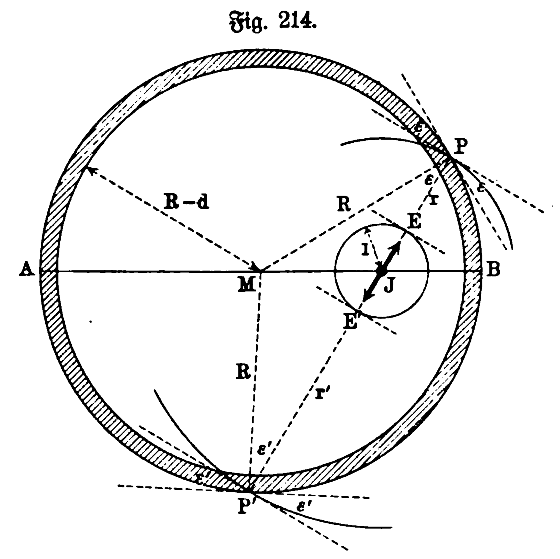
[1]) Vergl. dazu des Verfassers „Beiträge zur Theorie der centrodynamischen Körper", Braunschweig, Programm, 1892.

Reduziert man diese Projektion $f \cos \varepsilon$ auf eine Einheitskugel vom Mittelpunkte Q, so hat diese reduzierte Projektion (entsprechend $A''B''$) wegen der Ähnlichkeit der Abbildungen den Wert:

$$\frac{f \cos \varepsilon}{r^2}.$$

Wir betrachten nun zunächst, wie es Fig. 214 zeigt, eine Schicht in ihrer gegenseitigen Einwirkung mit einem materiellen Punkte J, der in ihrem Hohlraume liegt. Ordnet man dem bei P gelegenen Flächenteilchen f durch Centralprojektion in Bezug auf das Centrum J das bei P' gelegene Flächenteilchen f' zu, so sind die Fig. 213 entsprechenden Flächen auf der Einheitskugel um J als Gegenflächen einander gleich, d. h. man hat:

Fig. 214.



$$\frac{f \cos \varepsilon}{r^2} = \frac{f' \cos \varepsilon'}{r'^2}.$$

Da außerdem $\varepsilon = \varepsilon'$ ist wegen der Gleichschenkligkeit von $\triangle\ PMP'$, so ist auch:

$$\frac{f}{r^2} = \frac{f'}{r'^2}.$$

Demnach sind die Kräfte, welche die bei P und P' gelegenen Körperteilchen auf den materiellen Punkt in J ausüben, Gegenkräfte, d. h. sie heben sich auf. Da die ganze Schicht in solche Paare von Flächenteilchen f und f' zerlegt werden kann, so hat die Kraft, welche der gegenseitigen Einwirkung der ganzen Schicht und des materiellen Punktes in J entspricht, den Wert 0, d. h. die Schicht und ein in ihrem Innenraum gelegener materieller Punkt beeinflussen sich überhaupt nicht.

Um nun ferner den Einfluß einer Schicht auf einen äußeren Punkt U zu bestimmen (vergl. Fig. 215 a. f. S.), ziehen wir den Satz heran, daß PU und PJ in dem bestimmten Verhältnisse $BU : BJ$ stehen (Kreis des Apollonius), wenn A, J, B, U harmonische Punkte sind. Bestimmt man also zu U den Punkt J so, daß A, J, B, U harmonische Punkte sind, so gilt für $PU = \bar{r}$ und $P'U = \bar{r}'$, falls $\frac{BU}{BJ} = \lambda$ ist, $\bar{r} = r \,.\, \lambda$ und $\bar{r}' = r' \,.\, \lambda$.

Die Körperelemente, welche bei P und P' bezw. zu den Flächenelementen f und f' gehören, liefern also in ihrer gegenseitigen Einwirkung mit dem materiellen Punkte U, bezw. Kräfte vom Werte:

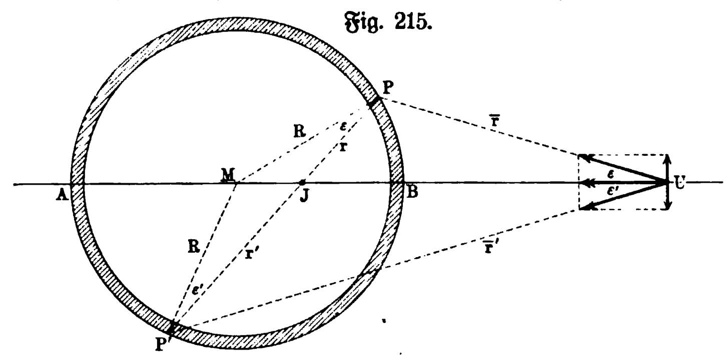
$$k\,\frac{(f d\delta)\mu}{(\bar{r})^2} = k\,\frac{(f d\delta)\mu}{r^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{und} \quad k\,\frac{(f' d\delta)\mu}{(\bar{r}')^2} = k\,\frac{(f' d\delta)\mu}{r'^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2}.$$

Diese Kraftwerte sind einander gleich, wenn $\frac{f}{r^2} = \frac{f'}{r'^2}$ ist, d. h. wenn man f und f' wiederum durch Centralprojektion aus J abgrenzt.

Setzt man dieses fest, so sind in den Geraden PU und $P'U$ Kräfte von gleichem Werte nach dem Parallelogrammgesetze zu vereinigen.

Da $MJ \cdot MU = R^2$, d. h. $\frac{MJ}{R} = \frac{R}{MU}$ ist, so ist $\triangle JMP \sim \triangle PMU$, weil diese Dreiecke außerdem im $\measuredangle\, PMU$ übereinstimmen, und demnach ist $\measuredangle\, PUM = \varepsilon$; ebenso ist $\measuredangle\, P'UM = \varepsilon'$. Da also $\measuredangle\, PUM = \measuredangle\, P'UM$

Fig. 215.



ist, so zerstören sich die Komponenten der Kräfte in U, welche senkrecht zu UM sind, während sich die Komponenten auf UM addieren und die Kraft

$$2\,k\,\frac{(f d\delta)\mu}{r^2} \cdot \cos\varepsilon \cdot \frac{1}{\lambda^2}$$

liefern, die von irgend einem auf UM gelegenen Punkte ausgehend gedacht werden kann.

Da $\frac{f\cos\varepsilon}{r^2}$ die Centralprojektion von f auf die Einheitskugel aus J ist, so läßt sich die Resultante der P und P' entsprechenden Kräfte herleiten, wenn man die Centralprojektion von f oder von f' auf die Einheitskugel mit der Konstante $2\,k\,\frac{d\,\delta\,\mu}{\lambda^2}$ multipliziert.

Legt man nun durch J irgend eine Ebene, so zerlegt diese die gegebene Kugel in zwei Kalotten, deren Centralprojektionen aus J auf die Einheitskugel einander gleich und zwar gleich der halben Oberfläche (2π) der Einheitskugel sind. Zerlegt man die eine Kalotte in lauter Elemente f und ordnet man jedem dieser Elemente f durch Centralprojektion aus J ein Element f' zu, so fallen die Elemente f' der anderen Kalotte aus.

Demnach entspricht der gegenseitigen Einwirkung der ganzen Kugelschicht und des materiellen Punktes U eine in der Geraden UM gelegene Kraft, deren Wert erhalten wird, indem man die Summe 2π der Centralprojektionen aller Elemente f oder aller Elemente f' aus J auf die Einheitskugel mit der Konstante $2\,k\,\frac{d\,\delta\,\mu}{\lambda^2}$ multipliziert.

Diese Kraft hat also den Wert:

$$K = k \cdot \frac{4\pi d\delta\mu}{\lambda^2}.$$

Da $\lambda = \frac{BU}{BJ} = \frac{PU}{PJ}$ wegen der Ähnlichkeit von $\triangle\ PMJ$ und $\triangle\ MUP$ den Wert $\frac{MU}{R}$ hat, so erhält man für $MU = \varrho$:

$$K = k \cdot \frac{(4\pi R^2 d\delta) \cdot \mu}{\varrho^2}.$$

Bezeichnet man die Masse der Schicht durch m, so ist:

$$K = k\frac{m\mu}{\varrho^2},$$

d. h. die Kraft entspricht zwei materiellen Punkten von den Massen m und μ und dem Abstande $\varrho = MU$.

Denkt man sich also die Masse m der Kugelschicht in ihrem Mittelpunkte M verdichtet, so entspricht die Kraft K der gegenseitigen Einwirkung zweier materieller Punkte M und U bezw. von den Massen m und μ.

Für weitere Anwendungen ist noch die Bemerkung wichtig, daß jede Ebene durch J die Kugelschicht in zwei Teile von gleicher gegenseitiger Einwirkung mit U zerlegt. Führt man im besondern die Ebene durch J senkrecht zu UM, so bemerkt man, daß der von U aus sichtbare Teil und der von U aus unsichtbare Teil der Kugelschicht zwei solche Teile sind.

Hat man nun eine konzentrisch-homogen-geschichtete Kugel, so ist für einen materiellen Punkt U, der außerhalb liegt, die Kraft K der gegenseitigen Einwirkung leicht zu bestimmen. Zerlegt man die Kugel in beliebig dünne Schichten und denkt man die Massen der einzelnen Schichten in deren Mittelpunkten, welche mit dem Mittelpunkt M der Kugel zusammenfallen, verdichtet, so erhält man für $UM = \varrho$

$$K = k\frac{m\mu}{\varrho^2},$$

falls man jetzt die Summe der Massen der einzelnen Schichten, d. h. die Masse der Kugel mit m bezeichnet. Rückt U auf die Kugeloberfläche, deren Radius wieder R sein mag, so ist $\varrho = R$. Bezeichnet man die mittlere Dichtigkeit der Kugel mit δ, so ist $m = \frac{4}{3}\pi R^3\delta$ und man hat

$$K = k\frac{(\frac{4}{3}\pi R^3\delta)\mu}{R^2} = (k\tfrac{4}{3}\pi\delta\mu)\ .\ R.$$

Für einen materiellen Punkt J im Innern der Kugel, bestimmt man K, indem man durch J eine konzentrische Kugel legt. Für die Schichten, die außerhalb dieser Hülfskugel liegen, ist J ein Punkt im Innern, so daß für ihre Gesamtheit $K = 0$ ist; für die Schichten, die innerhalb dieser Hülfskugel liegen, ist J ein äußerer Punkt, so daß man die Massen der innerhalb der Hülfskugel gelegenen Schichten in dem Mittelpunkte verdichtet denken kann.

Hat die gesamte Masse innerhalb der Hülfskugel die mittlere Dichtigkeit δ', so ist diese für $MJ = \varrho$ vom Werte

$$\tfrac{4}{3}\pi\varrho^3\delta'$$

und demnach hat man

$$K = k\frac{(\frac{4}{3}\pi\varrho^3\delta')\mu}{\varrho^2} = (\tfrac{4}{3}k\pi\delta'\mu) \,.\, \varrho.$$

Damit sind die Ansätze auf S. 162 u. f., welche auch den Entwickelungen auf S. 280 u. f. zu Grunde liegen, gerechtfertigt.

Gemäß diesen früheren Betrachtungen sind die Potentiale für U und J demnach bezw.

$$-\frac{km\mu}{\varrho} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(\tfrac{4}{3}k\pi\delta'\mu) \,.\, \varrho^2.$$

Das erste bedeutet die Arbeit, welche erforderlich ist, um U aus seiner Lage (ϱ) ins Unendliche zu bewegen, das zweite bedeutet die Arbeit, welche erforderlich ist, um J aus seiner Lage (ϱ) in den Mittelpunkt der Kugel zu bewegen.

Soll auch für einen Punkt J die Arbeit berechnet werden, welche erforderlich ist, um ihn ins Unendliche zu bewegen, so verfährt man folgendermaßen.

Wäre der materielle Punkt von der Oberfläche der Kugel nach deren Mittelpunkt zu bewegen, so hätte die entsprechende Arbeit, da δ die mittlere Dichtigkeit der ganzen Kugel bezeichnet, den Wert

$$(\tfrac{2}{3}k\pi\delta\mu)R^2.$$

Demnach hat die Arbeit für eine Bewegung von der Oberfläche bis zur Stelle (ϱ) von J den Wert

$$(\tfrac{2}{3}k\pi\delta\mu)R^2 - (\tfrac{2}{3}k\pi\delta'\mu)\varrho^2.$$

Mit umgekehrtem Vorzeichen stellt letzterer Ausdruck die Arbeit dar für eine Bewegung von der Stelle (ϱ) bis zur Oberfläche, während die Arbeit für eine Bewegung von der Oberfläche bis ins Unendliche den Wert hat

$$-\frac{km\mu}{R} = -k\frac{(\frac{4}{3}R^3\pi\delta)\mu}{R} = -\tfrac{4}{3}k\pi\delta\mu \,.\, R^2.$$

Demnach ist die gesuchte Arbeit $\mathfrak{A}$ gegeben als

$$\mathfrak{A} = (\tfrac{2}{3}k\pi\delta'\mu)\varrho^2 - (2k\pi\delta\mu)R^2.$$

Da sich dieser Ausdruck $\mathfrak{A}$ von dem Potential für J nur durch eine Konstante unterscheidet und da die Betrachtungen auf S. 280 u. f. bestehen bleiben, wenn man dort alle Potentialwerte um dieselbe Konstante vermehrt, so pflegt man wohl auch $\mathfrak{A}$ als Potential für J zu bezeichnen.

Man hat dann den Vorteil, daß die Potentiale für U und für J durch eine Definition umfaßt werden.

Ist $\delta = \delta'$, wie es unter anderem bei einer homogenen Vollkugel der Fall ist, so ist einfacher

$$\mathfrak{A} = (2k\pi\delta\mu)\,[\tfrac{1}{3}\varrho^2 - R^2].$$

Für eine **homogene** Hohlkugel von endlicher Wandstärke, welche durch die Radien R und R' begrenzt wird, gilt in Bezug auf einen Punkt J im Innern ihrer Masse folgendes.

Würde noch eine Kugel vom Radius R' in die Höhlung eingesetzt, so erhielte man wieder das vorige Ergebnis. Da J für diese Kugel ein äußerer Punkt ist, so ist das Potential dieser Kugel in Bezug auf J

$$-k\frac{(\frac{4}{3}R'^3\pi\delta)\mu}{\varrho}$$

und demnach bezeichnet

$$\mathfrak{A} = (2k\pi\delta\mu)\,[\tfrac{1}{3}\varrho^2 - R^2] + k\frac{(\frac{4}{3}R'^3\pi\delta)\mu}{\varrho}$$

$$= (2k\pi\delta\mu)\left[\tfrac{1}{3}\varrho^2 - R^2 + \tfrac{2}{3}\frac{R'^3}{\varrho}\right]$$

die Arbeit, welche hier erforderlich ist, um J ins Unendliche zu bewegen.

Liegt J im Hohlraume der Kugel, so ist für die Bewegung bis zur Oberfläche der Kugel vom Radius R' keine Arbeit zu leisten, während von da an die vorige Betrachtung gilt. Man hat demnach die vorige Formel für $\varrho = R'$ anzusetzen, d. h. man hat

$$\mathfrak{A} = (2k\pi\delta\mu)\,[R'^2 - R^2].$$

Für einen Punkt U ist nichts hinzuzufügen.

Im Sinne vorstehender Betrachtungen spricht man auch von dem **Selbstpotential** einer Kugel und versteht darunter die Arbeit, welche nötig ist, um die einzelnen konzentrischen Schichten der Kugel von außen bis zum Mittelpunkte der Reihe nach ins Unendliche zu bewegen.

Um diese Arbeit für eine **homogene** Kugel zu bestimmen, betrachten wir eine Kugel vom Radius x und der Dichtigkeit δ, auf welcher eine konzentrische Schicht von gleicher Dichtigkeit δ lagert. **Für einen materiellen** Punkt der Schicht von der Masse μ ist das Potential ($\varrho = x$), falls m die Masse der Kugel bezeichnet,

$$-k\frac{m\mu}{x}$$

und demnach für die ganze Schicht, falls d deren Dicke ist,

$$-\frac{km(4x^2\pi d\,.\,\delta)}{x}.$$

Ersetzt man noch m durch $\frac{4}{3}x^3\pi\delta$, so erhält jenes Potential den Wert

$$-k\tfrac{16}{3}\pi^2\delta^2x^4\,.\,d.$$

Zerlegt man die homogene Kugel in n Schichten von der Dicke d, so ist beim Abtragen dieser Schichten der Reihe nach für x zu setzen $R-d$, $R-2d, \ldots R-\overline{n-1}\,d$, $R-nd=0$.

Die Summation ($R = n\,.\,d$) ergiebt für das gesuchte Selbstpotential

$$-k\tfrac{16}{15}\pi^2\delta^2R^5 = -k\frac{(\frac{4}{3}R^3\pi\delta)^2}{R}\,.\,\tfrac{3}{5}.$$

Bezeichnet man die Masse der Kugel durch M, so geht dieser Wert über in

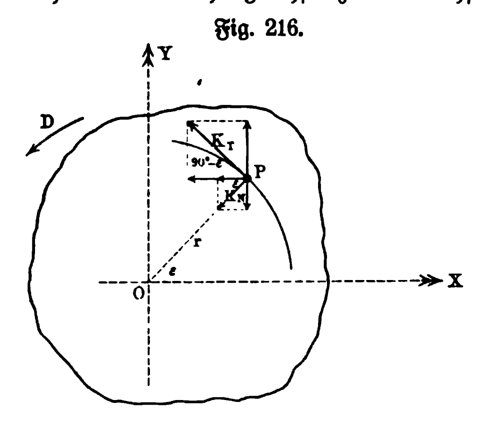
$$- \frac{3}{5} k \frac{M^2}{R}.$$

Diese Arbeit entspricht auch, bei umgekehrtem Vorzeichen, dem umgekehrten Vorgange, d. h. der Verdichtung der zerstreuten Masse M zu einer Kugel infolge der gegenseitigen Massenanziehung nach Newtons Gesetz.

Die Übertragung der Untersuchung auf zwei Kugeln bietet keine Schwierigkeit.

14. Die Effektivkräfte bei der Achsendrehung starrer Körper. Wir wählen die Drehungsachse zur Z-Achse eines dreiachsigen rechtwinkligen Koordinatensystems und legen zunächst durch einen beliebigen Punkt P von der Masse μ, der dem Körper angehört, eine Ebene, parallel zur XY-Ebene. In dieser Ebene, welche Fig. 216 darstellt, wirken an P in normaler und in tangentialer Richtung bezw. die Kräfte $[K_T]$ und $[K_N]$. Bei einer beschleunigten Bewegung entspricht $[K_T]$ dem Drehungspfeile D, bei einer verzögerten Bewegung ist $[K_T]$ umgekehrt gerichtet. Für die beschleunigte Bewegung, welche Fig. 216 darstellt, liefert die Zerlegung von $[K_T]$ und $[K_N]$ nach den Achsen in deren Richtung die Kräfte

Fig. 216.



$$K_x = - K_N \cos \varepsilon - K_T \sin \varepsilon$$
$$K_y = - K_N \sin \varepsilon + K_T \cos \varepsilon.$$

Bei einer Winkelgeschwindigkeit φ und einer Winkelbeschleunigung ι ist (vergl. S. 242):

$$K_N = \mu r \varphi^2 \quad \text{und} \quad K_T = \mu r \iota,$$

falls $OP = r$ gesetzt wird, und demnach

$$K_x = - \mu \varphi^2 \,.\, r \cos \varepsilon - \mu \iota \,.\, r \sin \varepsilon$$
$$K_y = - \mu \varphi^2 \,.\, r \sin \varepsilon + \mu \iota \,.\, r \cos \varepsilon$$

oder auch, da $r \cos \varepsilon = x$ und $r \sin \varepsilon = y$ ist,

$$K_x = - \mu \varphi^2 x - \mu \iota y$$
$$K_y = - \mu \varphi^2 y + \mu \iota x.$$

Da Punkt P in der Richtung der Z-Achse keine Bewegung hat, so ist für ihn

$$K_z = 0.$$

Die Komponenten $[K_x]$, $[K_y]$, $[K_z]$ am Punkte P, dessen Koordinaten x, y, z sind, liefern (vergl. S. 335) die Momente für die

X-Achse: $z \,.\, K_y - y \,.\, K_z = -\mu\varphi^2 yz + \mu\iota xz$
Y-Achse: $x \,.\, K_z - z \,.\, K_x = +\mu\varphi^2 xz + \mu\iota yz$
Z-Achse: $y \,.\, K_x - x \,.\, K_y = -r \,.\, K_T = -\mu\iota r^2$.

Da φ und ι für alle Punkte des starren Körpers dieselben Werte haben, so gelangt man bei der Vereinigung der Effektivkräfte der einzelnen Punkte des Körpers zu dem Ergebnis:

$$\begin{aligned} X &= \Sigma K_x = -\varphi^2 \Sigma\mu x - \iota\Sigma\mu y \\ Y &= \Sigma K_y = -\varphi^2 \Sigma\mu y + \iota\Sigma\mu x \\ Z &= \Sigma K_z = 0 \\ M_x &= -\varphi^2 \Sigma\mu yz + \iota\Sigma\mu xz \\ M_y &= +\varphi^2 \Sigma\mu xz + \iota\Sigma\mu yz \\ M_z &= -\iota\Sigma\mu r^2. \end{aligned}$$

Bestimmt man die Koordinaten ξ, η, ζ für den Massenmittelpunkt des Körpers, so ist (vergl. S. 238) für $\Sigma\mu = M$

$$M \,.\, \xi = \Sigma\mu x, \quad M \,.\, \eta = \Sigma\mu y, \quad M \,.\, \zeta = \Sigma\mu z$$

und man hat

$$\left.\begin{aligned} X &= -\varphi^2 M\xi - \iota M\eta \\ Y &= -\varphi^2 M\eta + \iota M\xi \\ Z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 107\,a)$$

Die Größen $\Sigma\mu xz$ und $\Sigma\mu yz$, welche in den Momenten M_x und M_y auftreten, heißen Deviationsmomente oder auch Centrifugalmomente, sie können kurz bezw. durch D_y und D_x bezeichnet werden.

Die Größe $\Sigma\mu r^2$, durch welche M_z bestimmt wird, ist das Trägheitsmoment des Körpers (vergl. S. 255) in Bezug auf die Z-Achse und mag daher durch $\mathfrak{Tr}_z$ bezeichnet werden.

Demnach hat man:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\varphi^2 D_x + \iota D_y \\ M_y &= +\varphi^2 D_y + \iota D_x \\ M_z &= -\iota\mathfrak{Tr}_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 107\,b)$$

Ist die Fig. 216 entsprechende Bewegung verzögert, so tritt in den entwickelten Formeln $-\iota$ für $+\iota$ ein.

Geht die Drehungsachse durch den Massenmittelpunkt (Schwerpunkt), so ist $\xi = 0$ und $\eta = 0$ und man hat

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0 \quad \ldots\ldots \quad 108\,a)$$

Hat die Drehungsachse eine Lage, für welche $D_x = 0$ und $D_y = 0$ ist, so gilt

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = -\iota\mathfrak{Tr}_z \quad \ldots\ldots \quad 108\,b)$$

Sind die beiden Bedingungen der Formeln 108a) und 108b) erfüllt, so bleibt nur bestehen

$$M_z = -\iota\mathfrak{Tr}_z \quad \ldots\ldots\ldots \quad 109)$$

Bei gleichförmiger Drehung des Körpers ($\iota = 0$) gehen die allgemeinen Gleichungen der Nr. 107 über in

$$\left.\begin{array}{l} X = -\varphi^2 M\xi \\ Y = -\varphi^2 M\eta \\ Z = 0 \end{array}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{array}{l} M_x = -\varphi^2 D_x \\ M_y = +\varphi^2 D_y \\ M_z = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 110) .$$

Da bei gleichförmiger Drehung **nur** die Centripetalkräfte bezw. deren fingierte Gegenkräfte, d. h. die **Centrifugalkräfte** auftreten und da schon zu deren Bestimmung die Größen D_x und D_y nötig sind, so heißen diese Größen, welche aus theoretischen Gründen Deviationsmomente genannt werden, auch **Centrifugalmomente**.

Eine weitere Untersuchung zeigt, daß es durch jeden Punkt eines beliebig gestalteten starren Körpers mindestens drei aufeinander senkrecht stehende Gerade giebt, für welche die drei Deviationsmomente

$$D_x = \Sigma\mu y z, \quad D_y = \Sigma\mu x z, \quad D_z = \Sigma\mu x y$$

den Wert Null erhalten; sie heißen **Hauptachsen** des Punktes.

Wählt man irgend eine dieser Geraden zur Drehungsachse, so gilt stets Formel Nr. 108 b.

Wählt man im besondern den Massenmittelpunkt als Schnittpunkt dreier solcher Geraden, so ist für jede dieser Geraden als Drehungsachse auch Formel 108 a in Geltung, d. h. das System der Effektivkräfte führt dann nur zu der Gleichung (vergl. S. 255)

$$M_z = -\iota \mathfrak{T}_z.$$

Jede dieser drei Geraden heißt „**eine freie Achse**“ des Körpers. Weil nämlich nach dem Principe von **d'Alembert** das System der äußeren, auf den Körper einwirkenden Kräfte, einschließlich der von etwaigen Befestigungen der Achse ausgehenden Reaktionen, dem Systeme der Effektivkräfte gleichwertig ist, so ist das System der äußeren Kräfte in diesem Falle M_z gleichwertig, d. h. **die Achse bedarf keiner Befestigung**, falls die äußeren Kräfte nur in dem Momente M_z bestehen.

Diesen Fall stellen uns die Achsendrehungen der Himmelskörper (angenähert) dar.

Da man **bei technischen Verhältnissen** von der gegenseitigen Einwirkung der betrachteten Körper und der Erde nicht absehen kann, so ist hier stets das **Gewicht der Körper** als äußere Kraft in Rechnung zu stellen, und darum muß die Befestigung mindestens dieses im Gleichgewicht halten.

Diesen Fall stellt uns ein rotierender Kreisel, dessen Achse senkrecht auf dem Fußboden steht, angenähert dar — hier wirkt die Reibung auf den Fußboden als verzögerndes Kraftmoment.

Ähnliches gilt für Maschinenkörper mit stehenden Achsen, falls diese freie Achsen sind.

Bei den Körpern, welche die Technik verwendet, kann man die Lage der freien Achsen meist ohne weiteres angeben. Hat der Körper eine Symmetrieebene, so ist eine Gerade durch seinen Massenmittelpunkt, senkrecht zur Symmetrieebene eine freie Achse. Wählt man nämlich die Symmetrieebene als XY-Ebene, so entspricht jedem Punkt P_1 von der Masse μ auf der einen Seite der Ebene je ein Punkt P_2 von der Masse μ auf der anderen Seite

der Ebene und zwar so, daß $P_1 P_2$ auf der Ebene senkrecht steht und durch diese halbiert wird. Für die Koordinaten von P_1 und P_2 gilt demnach $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $+ z_1 = - z_2$. Bildet man $D_x = \Sigma \mu y z$, so ist der Teil, der von P_1 und P_2 herrührt, d. h. $\mu y_1 z_1 + \mu y_2 z_2 = 0$, und da dieses für alle Punktpaare von P_1 und P_2 gilt, so ist $D_y = 0$. Dasselbe gilt für D_x.

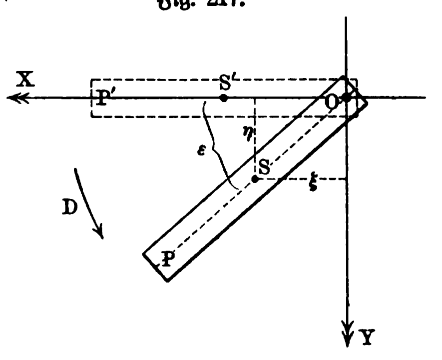
Hat der Körper zwei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen, so ist deren Schnittgerade eine freie Achse. Wählt man nämlich die beiden Ebenen bezw. als XZ-Ebene und als YZ-Ebene, so verschwinden D_y und D_x.

Bei einem homogenen geraden Kreiscylinder ist neben der Achse auch jede Gerade durch den Schwerpunkt, welche die Achse senkrecht schneidet, eine freie Achse.

Bei einer homogenen Kugel ist jeder Durchmesser eine freie Achse.

Wirkt ein Kräftepaar (vergl. S. 256) auf einen freien Körper, so tritt nur dann eine Drehung um eine dem Achsenmomente des Paares entsprechende Achse ein, wenn die Ebene des Paares senkrecht zu einer freien Achse des Körpers liegt.

Fig. 217.



Bemerkt mag noch werden, daß die Ausdrücke für X und Y in 107 a genau so gebaut sind, wie die Ausdrücke für K_x und K_y, aus denen sie entstanden sind. Es entspricht sich einerseits M und μ, anderseits ξ, η und x, y und demnach sind die Kräfte X, Y, Z so gebildet, als wenn die ganze Masse des Körpers in dessen Schwerpunkt vereinigt wäre. Demgemäß findet man auch, falls $\xi^2 + \eta^2 = \varrho^2$ gesetzt wird, als Resultante

$$R = M \varrho \sqrt{\varphi^4 + \iota^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 111)$$

wie bei einem materiellen Punkte von der Masse M.

Kommen die Gleichungen 107 b nicht in Frage, so lassen sich also die Effektivkräfte leicht veranschaulichen.

Als Beispiel behandeln wir die Bewegung einer prismatischen Pendelstange, welche eine Symmetrieebene senkrecht zur Drehungsachse hat. Die Stange mag sich zunächst, wie Fig. 217 andeutet, in der Lage OP' in Ruhe befunden haben und augenblicklich in der Lage OP sein. Der Massenmittelpunkt S, der bei einer Stangenlänge a angenähert die Koordinaten

$$\xi = \frac{a}{2} \cos \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \eta = \frac{a}{2} \sin \varepsilon$$

hat, ist aus der Ruhelage um η gesunken, so daß dabei die Arbeit $(Mg)\eta$ geleistet worden ist. Demnach gilt für die Winkelgeschwindigkeit φ gemäß S. 256

$$\tfrac{1}{2} \mathfrak{T}_z \varphi^2 - \tfrac{1}{2} \mathfrak{T}_z O^2 = M g \eta,$$

d. h. man hat

$$\varphi^2 = \frac{2\,Mg\,\eta}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}.$$

Da die bewegende Kraft (Mg) am Arme ξ wirkt, so gilt für den Zahlenwert ι

$$\iota = \frac{Mg\,\xi}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}.$$

Da hier $D_x = 0$ und $D_y = 0$ ist, so führt das System der Effektivkräfte nach Formel 107 a und 108 b zu

$$X = -\frac{3\,M^2 g\,\eta\,\xi}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z} = -\frac{3}{8}\,\frac{g\,M^2 a^2 \sin 2\,\varepsilon}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}$$

$$Y = \frac{M^2 g}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}\,(-2\,\eta^2 + \xi^2) = \frac{1}{8}\,\frac{g\,M^2 a^2 (3\cos 2\,\varepsilon - 1)}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}$$

$$Z = 0$$

$$M_x = 0$$

$$M_y = 0$$

$$M_z = -\,Mg\,\xi = -\,\tfrac{1}{2}\,g\,M\,a\cos\varepsilon.$$

Setzt man (vergl. § 100) noch $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z = \frac{1}{3}\,M a^2$, so ergiebt sich:

$$X = -\,\tfrac{9}{8}\,g\,M \sin 2\,\varepsilon$$

$$Y = \tfrac{3}{8}\,g\,M(3\cos 2\,\varepsilon - 1).$$

Da das System der äußeren Kräfte, welches hier aus der Größe Mg und der Reaktion der Befestigung besteht, dem System der Effektivkräfte gleichwertig sein muß, so ist für eine horizontale Reaktion [H] und eine vertikale Reaktion [V] in O

$$H = X \quad \text{und} \quad Mg + V = Y$$

zu setzen, so daß

$$H = -\,\tfrac{9}{8}\,g\,M \sin 2\,\varepsilon$$

$$V = -\,\tfrac{1}{8}\,g\,M(11 - 9\cos 2\,\varepsilon).$$

H hat seine Maxima für $\sin 2\,\varepsilon = \pm 1$, d. h. für $\varepsilon = 45^0$ und $\varepsilon = 135^0$, sie betragen $\mp \frac{9}{8}\,g\,M$. V hat sein Maximum für $\cos 2\,\varepsilon = -1$, d. h. für $\varepsilon = 90^0$, es beträgt $-\frac{5}{2}\,g\,M$.

H hat sein Minimum 0 für $\sin 2\,\varepsilon = 0$, d. h. für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 90^0$ und $\varepsilon = 180^0$. V hat sein Minimum $-\frac{1}{4}\,Mg$ für $\cos 2\,\varepsilon = 1$, d. h. für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 180^0$.

Während [V] stets nach oben gerichtet ist, ist [H] beim Herschwingen erst nach rechts und dann nach links, beim Rückschwingen erst nach links und dann nach rechts gerichtet.

Ähnliche Verhältnisse treten bei schwingenden Glocken auf.

Übungen zu der Lehre von den Kräften am starren Körper.

---

1. An einer Stelle des senkrecht geführten Seiles eines Rammklotzes sind vier Seile angebracht, um vier Arbeitern zum Angriffe zu dienen. Welche Kraft wirkt auf den Rammklotz, wenn jeder Arbeiter mit einer Kraft von 60 kg zieht und wenn die Seile dabei eine gerade quadratische Pyramide mit senkrechter Achse bilden, deren Kanten an der Spitze Winkel von 30° bilden? Welche Arbeit entspricht einer Hebung des Klotzes um 1,5 m?

223 kg; 334,5 mkg.

2. Um einen Baumstumpf auszuroden, ziehen drei Arbeiter an drei umgeschlungenen Seilen mit je einer Kraft von 50 kg. Die Seile konvergieren nach einem Punkte und bilden bezw. mit dem Horizonte die Neigungswinkel 10°, 20°, 30°, während ihre Horizontalprojektionen bezw. die Winkel 20° und 15° bilden. Welche Kraft [R] wird entwickelt?

$$R = 144{,}4 \text{ kg}.$$

Nimmt man die Horizontalprojektion der ersten Kraft zur X-Achse und senkrecht dazu, im Angriffspunkt der Kräfte horizontal die Y-Achse so, daß die Horizontalprojektion der zweiten Kraft 20°, die der dritten Kraft 35° Neigung gegen die X-Achse hat, und endlich die Z-Achse nach oben gerichtet, so bildet [R] mit den Achsen bezw. die Winkel

$$26^\circ\, 49'\, 30''; \quad 73^\circ\, 32'\, 40''; \quad 69^\circ\, 24'\, 40''.$$

3. Es ist das Moment einer Kraft in Bezug auf eine Achse zu bestimmen, wenn die Projektion [K] der Kraft auf eine, zur Achse senkrechte Ebene den Wert 50 kg hat und wenn diese Projektion von der Achse den Abstand $r = 2$ m hat.

$$Mo = \pm K \,.\, r = \pm 100 \text{ mkg}.$$

4. Die vorige Aufgabe ist durchzuführen unter der Voraussetzung, daß der Angriffspunkt der Projektion der Kraft in ihrer Ebene in Bezug auf ein rechtwinkliges Kreuz, dessen Nullpunkt in die Achse fällt, die Koordinaten $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 3$ hat und daß diese Projektion mit der X-Achse den Winkel $\alpha = 30^\circ$ bildet.

$$r = \bar{y} \,.\, \cos\alpha - \bar{x} \sin\alpha$$
$$Mo = K(\bar{y} \cos\alpha - \bar{x} \sin\alpha).$$

5. Es ist das Moment einer Kraft vom Werte $K = 100$ kg in Bezug auf eine Achse zu bestimmen, wenn diese Achse Z-Achse eines rechtwinkligen Kreuzes ist und wenn in diesem der Angriffspunkt der Kraft die Koordinaten $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 3$, $\bar{z} = 5$ hat und die Kraft selbst die Richtungswinkel $\alpha = 38^0 40'$ und $\beta = 65^0 20'$ bezw. gegen die X-Achse und Y-Achse hat und γ ein spitzer Winkel ist.

Die Projektion der Kraft auf die XY-Ebene ist $K_{xy} = \sqrt{K^2 \cos^2\alpha + K^2 \cos^2\beta}$, deren Richtung ($\varphi$) gegen die X-Achse ist bestimmt durch $\frac{K\cos\alpha}{K_{xy}} = \cos\varphi$ und $\frac{K\cos\beta}{K_{xy}} = \sin\varphi$, ihr Abstand r von der Z-Achse ist $\bar{y}\cos\varphi - \bar{x}\sin\varphi$. Man hat also:

$$Mo = K_{xy} \,.\, r = K(\bar{y}\cos\alpha - \bar{x}\cos\beta).$$

6. Es ist die Arbeit der Kraft in Nr. 3 für eine Drehung von $\varepsilon^0 = 30^0$ um die Achse zu bestimmen.

$$\mathfrak{A} = Mo \,.\, arc\,\varepsilon = \pm\, 100 \cdot \frac{\pi}{6}\,\text{mkg}.$$

7. Es ist die Arbeit der Kraft in Nr. 5 unmittelbar zu bestimmen für eine Kraftverschiebung, bei der sich der Angriffspunkt nach dem Punkte (5; 7; 9) bewegt.

Bezeichnet man die Projektionen der Verschiebung [s] auf die Achsen durch [s_x], [s_y], [s_z], so sind die Winkel der Verschiebung gegen die Achsen λ, μ, ν gegeben durch

$$\cos\lambda = \frac{s_x}{s}, \quad \cos\mu = \frac{s_y}{s}, \quad \cos\nu = \frac{s_z}{s}.$$

Es ist

$$s_x = 5 - 2, \quad s_y = 7 - 3, \quad s_z = 9 - 5$$

und

$$s = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2 + (9-5)^2}.$$

Der Winkel ω zwischen Verschiebung und Kraft ist (vergl. S. 34) gegeben durch

$$\cos\omega = \cos\alpha\,\cos\lambda + \cos\beta\,\cos\mu + \cos\gamma \,.\, \cos\nu.$$

Man hat also:

$$\mathfrak{A} = K \,.\, s \,.\, \cos\omega = K\cos\alpha\, s_x + K\cos\beta\, s_y + K\cos\gamma\, s_z.$$

Derselbe Ausdruck ergiebt sich mittelbar bei der Bildung der Arbeit aus den Seitenkräften.

8. Zwei Kräfte von 17 kg und 33 kg wirken in paralleler Richtung an zwei fest miteinander verbundenen Punkten, die 8 m voneinander entfernt sind. Es ist die Resultante und deren Angriffspunkt zu bestimmen:

50 kg; 5,28 m und 2,72 m.

9. Zwei parallele Kräfte von 12,5 kg und 25 kg wirken an zwei fest miteinander verbundenen Punkten nach derselben Richtung. Die Mittelkraft wirkt in einer Entfernung von 4 m von dem Angriffspunkt der Kraft von 12,5 kg.

Welche Entfernung haben die beiden Kräfte?

6 m.

10. Eine Kraft von 52 kg soll in zwei parallele Kräfte zerlegt werden, die nach derselben Richtung wirken,

a. wenn die zu bestimmenden Kräfte um 2 m und 3 m von der gegebenen entfernt sind,

b. wenn die eine Seitenkraft gleich 20 kg werden soll und 2 m von der gegebenen Kraft entfernt ist.

a. 31,2 kg und 20,8 kg; b. 32 kg und 1,25 m.

11. Eine Kraft von 20 kg soll in zwei parallele Kräfte zerlegt werden, von denen die eine der Kraft von 20 kg entgegenwirkt,

a. wenn die zu bestimmenden Kräfte 3 m und 8 m von der gegebenen entfernt sind,

b. wenn die der Kraft von 20 kg entgegenwirkende Kraft gleich 30 kg ist und 6 m von der gegebenen entfernt liegt.

a. 32 kg und 12 kg; b. 50 kg und 3,6 m.

12 bis 15. Die Nrn. 8 bis 11 sind konstruktiv (graphostatisch) zu behandeln.

16. Ein Kräftepaar vom Momente + 150 kgm soll in einem Parallelstreifen seiner Ebene von der Breite 15 m eingetragen werden. Welche Kräfte sind auf den Grenzen des Streifens anzulegen?

10 kg.

17. Ein Kräftepaar, dessen Kraft 40 kg und dessen Arm 2 m beträgt, soll in ein Kräftepaar verwandelt werden, dessen Kraft 10 kg beträgt. Welcher Arm ist zu verwenden?

8 m.

18. Vier Kräftepaare haben bezw. die Kräfte 20 kg, 30 kg, 40 kg, 60 kg und die Arme 1 m, 2 m, 3 m, 4 m. Welches Kräftepaar vom Arme 11 m entspricht der Gesamtwirkung,

a. wenn sie alle der Uhrzeigerbewegung entsprechend drehen,

b. wenn das erste und dritte mit der Uhr, das zweite und vierte gegen die Uhr dreht?

a. 40 kg am Arme 11 m, mit der Uhr drehend,
b. 14,5 kg am Arme 11 m, gegen die Uhr drehend.

19 und 20. Konstruktive Behandlung von Nr. 17 und 18.

21. Es ist ein festes System von fünf materiellen Punkten durch die folgenden Koordinaten gegeben: $x_1 = 5$, $y_1 = 10$; $x_2 = 9$, $y_2 = 12$; $x_3 = 17$, $y_3 = 14$; $x_4 = 20$, $y_4 = 13$; $x_5 = 15$, $y_5 = 8$. Die daran wirksamen Kräfte sind der Reihe nach: 50, 30, 70, 90, 120 kg. Die Winkel, welche die Kraftrichtungen mit der X-Achse bilden, seien: $\alpha_1 = 70^0$, $\alpha_2 = 300^0$, $\alpha_3 = 120^0$, $\alpha_4 = 210^0$, $\alpha_5 = 90^0$. Es ist die Resultante der Größe und Richtung nach zu bestimmen:

$$X = 50 \,.\, cos\, 70^0 + 30 \,.\, cos\, 300^0 + 70 \,.\, cos\, 120^0 + 90 \,.\, cos\, 210^0 + 120 \,.\, cos\, 90^0 = -80{,}842,$$

$$Y = 50 \,.\, sin\, 70^0 + 30 \,.\, sin\, 300^0 + 70 \,.\, sin\, 120^0 + 90 \,.\, sin\, 210^0 + 120 \,.\, sin\, 90^0 = +156{,}626,$$

$$R = \sqrt{80{,}842^2 + 156{,}626^2} = 176{,}259 \text{ kg}.$$

$$cos\, \alpha = -\frac{80{,}842}{176{,}259};\ sin\, \alpha = \frac{156{,}626}{176{,}259},\ \text{daher } \alpha = 117^0\, 18'\, 1''$$

$$Mo = \Sigma P(y\, cos\, \alpha - x\, sin\, \alpha)$$
$$= (50 \,.\, cos\, 70^0 \,.\, 10 - 50 \,.\, sin\, 70^0 \,.\, 5) + (30 \,.\, cos\, 300^0 \,.\, 12 - 30 \,.\, sin\, 300^0 \,.\, 9) + (70 \,.\, cos\, 120^0 \,.\, 14 - 70 \,.\, sin\, 120^0 \,.\, 17) + (90 \,.\, cos\, 210^0 \,.\, 13 - 90 \,.\, sin\, 210^0 \,.\, 20) + (120 \,.\, cos\, 90^0 \,.\, 8 - 120 \,.\, sin\, 90^0 \,.\, 15) = -3083{,}915 \text{ mkg}.$$

Zur Herstellung des Gleichgewichts müssen wir eine sechste Kraft von 176,259 kg anbringen, welche mit der X-Achse einen Winkel von $\bar{\alpha} = 297^0\, 18'\, 1''$ bildet.

Man hat: $r = 17{,}5$ m für $Rr = Mo$.

Die Gerade, auf welcher diese Kraft $\bar{R}$ liegt, hat die Gleichung:

$$y\, \bar{R}\, cos\, \bar{\alpha} - x\, \bar{R}\, sin\, \bar{\alpha} = -Mo.$$

Ein Punkt auf ihr ist durch $x = 12^1/_3$ und $y = 14^1/_4$ bestimmt (Mittelpunkt des Kraftsystems).

22. Graphostatische Behandlung von Nr. 21.

23. Fünf parallele Kräfte von 4, 12, 17, 25 und 60 kg wirken an fünf Punkten einer geraden Linie, wobei die Kräfte von 12 kg und 25 kg den übrigen gerade entgegengesetzt gerichtet sind. Von einem in derselben Geraden gegebenen Punkte haben die Angriffspunkte der Kräfte eine Entfernung von 5, 7, 9, 11 und 15 m.

Wo liegt der Angriffspunkt der Resultante und wie groß ist dieselbe?

Resultante . . . . = 44 kg
Entfernung von dem festen Punkte auf der geraden Linie = 16,23 m.

24. Die Koordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte zu finden, die in einer Ebene liegen und folgendermaßen gegeben sind:

$$P_1 = 33 \text{ kg}\quad x_1 = +25,\ y_1 = +13,$$
$$P_2 = 20 \text{ „}\quad x_2 = -10,\ y_2 = -15,$$
$$P_3 = -35 \text{ „}\quad x_3 = +15,\ y_3 = -27,$$
$$P_4 = -72 \text{ „}\quad x_4 = -31,\ y_4 = +17,$$
$$P_5 = 120 \text{ „}\quad x_5 = +23,\ y_5 = -19.$$

$$x = 77{,}15 \text{ m und } y = -36{,}82 \text{ m}.$$

25. Ein Stab von der Länge a ist an seinen beiden Enden unterstützt. Auf denselben wirken drei parallele Kräfte P, Q, R rechtwinkelig zum Stabe, wodurch derselbe in die Abschnitte b, c, d, e geteilt wird. Es sind die Drucke auf die Unterstützungspunkte zu bestimmen:

$$D_1 = \frac{P(a-b) + Q(d+e) + Re}{a}$$

$$D_2 = \frac{R(a-e) + Q(b+c) + Pb}{a}.$$

Es sei $P = 400$ kg, $Q = 300$ kg, $R = 500$ kg; $a = 16$ m, $b = 2$ m, $c = 4$ m und $d = 6$ m, dann ist:

$$D_1 = 662{,}5 \text{ kg}, \quad D_2 = 537{,}5 \text{ kg}.$$

26, 27, 28. Graphostatische Behandlung von Nr. 23, 24, 25.

29. Zwei Kräftepaare von den Momenten 10,5 mkg und 8 mkg liegen in zwei Ebenen, die sich senkrecht schneiden. Welches Paar resultiert?

Die Ebene des resultierenden Paares von 13,2 mkg teilt den einen Winkel der Ebenen bezw. in $52^0 42'$ und $37^0 18'$ und zwar so, daß die Achsenmomente der gegebenen Paare das Achsenmoment des resultierenden Paares als Resultierende haben.

30. Die Ebenen zweier Paare von den Momenten $56^2/_3$ mkg und 18 mkg bilden einen Winkel von $62^0 40'$. Wie groß ist das resultierende Paar,

a. wenn die Achsenmomente den Winkel $62^0 40'$,

b. wenn sie den Winkel $117^0 20'$ bilden?

a. 66,87 mkg bei einer Teilung des Winkels in $13^0 50'$ und $48^0 50'$ durch das resultierende Achsenmoment,

b. 50,98 mkg bei einer Teilung des Winkels in $99^0 3'$ und $18^0 17$ durch das resultierende Achsenmoment.

31. Konstruktive Lösung von Nr. 30 mittelst der Achsenmomente.

32. An einem festen System von vier materiellen Punkten wirken vier Kräfte nach beliebigen Richtungen, deren Gesamtwirkung zu bestimmen ist. Die Punkte sind durch ihre Koordinaten x, y, z, die Kräfte durch ihre Größe P, und deren Richtungen durch die Winkel α, β, γ mit drei Koordinatenachsen gegeben.

$$\begin{aligned}
P_1 &= 50 \text{ kg}, & \alpha_1 &= 60^0, & \beta_1 &= 40^0, & \gamma_1 &\text{ spitz},\\
P_2 &= 70 \;\text{"}, & \alpha_2 &= 65^0, & \beta_2 &= 45^0, & \gamma_2 &\text{ stumpf},\\
P_3 &= 90 \;\text{"}, & \alpha_3 &= 70^0, & \beta_3 &= 50^0, & \gamma_3 &\text{ spitz},\\
P_4 &= 120 \;\text{"}, & \alpha_4 &= 75^0, & \beta_4 &= 55^0, & \gamma_4 &\text{ stumpf},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, & y_1 &= 0, & z_1 &= 0,\\
x_2 &= 1 \text{ m}, & y_2 &= 4 \text{ m}, & z_2 &= 7 \text{ m},\\
x_3 &= 2 \;\text{"}, & y_3 &= 5 \;\text{"}, & z_3 &= 8 \;\text{"},\\
x_4 &= 3 \;\text{"}, & y_4 &= 6 \;\text{"}, & z_4 &= 9 \;\text{"}
\end{aligned}$$

Der dritte Winkel bestimmt sich nach der Formel:

$$\cos \gamma^2 = -\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

$$\begin{aligned}
X &= 116{,}423 \text{ kg}, & \alpha &= 62^0\; 9'48'' & M_x &= 1838{,}608, & \lambda &= 26^0 54' 20''\\
Y &= 214{,}480 \;\text{"}, & \beta &= 30^0 39' 20'' & M_y &= -928{,}947, & \mu &= 116^0 46' 45''\\
Z &= -51{,}057 \;\text{"}, & \gamma &= 101^0 49' & M_z &= 86{,}903, & \nu &= 87^0 35' 4''
\end{aligned}$$

$$R = 249{,}325 \text{ kg}, \qquad Mo = 2061{,}789 \text{ mkg}.$$

Gleichgewicht ist nicht vorhanden, daher zu untersuchen, ob sich *Mo* und *R* zu einer Gesamtresultante *R'* vereinigen lassen. Zu dem Ende muß $M_x \cdot X + M_y \cdot Y + M_z \cdot Z = 0$ sein. Es ist aber:

$$1838{,}608 \cdot 116{,}423 - 928{,}947 \cdot 214{,}480 - 86{,}903 \cdot 51{,}057 = 10378{,}7$$

und deshalb eine Vereinigung unmöglich.

33. In der vorigen Aufgabe mögen die Koordinaten x_4, y_4, z_4 der Kraft von 120 kg so umgeändert werden, daß eine Vereinigung zwischen *R* und *Mo* möglich werde. Es behalten hierbei X, Y, Z, R, α, β, γ die berechneten Werte, dagegen erhalten wir:

$$\begin{aligned} M_x &= 659{,}575 + 68{,}829 \cdot z_4 + 93{,}262 \cdot y_4, \\ M_y &= -369{,}639 - 93{,}262 \cdot x_4 - 31{,}058 \cdot z_4, \\ M_z &= 107{,}042 + 31{,}058 \cdot y_4 - 68{,}829 \cdot x_4. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$(M_x - 659{,}575)\, 31{,}058 + (M_y + 369{,}639)\, 68{,}829 = (M_z - 107{,}042)\, 93{,}262 \quad \text{oder}$$

$$M_x + 2{,}216\, M_y - 3{,}003\, M_z = -481{,}034 \quad \ldots \quad 1)$$

Die zweite Gleichung erhalten wir aus der Bedingung der Vereinigung:

$$M_x \cdot 116{,}423 + M_y \cdot 214{,}480 - M_z \cdot 51{,}057 = 0 \quad \text{oder}$$

$$M_x + 1{,}842\, M_y - 0{,}4386\, M_z = 0 \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$0{,}374\, M_x - 2{,}564\, M_y = -481{,}034.$$

Wir behalten den früheren Wert von $M_y = -928{,}947$ bei, setzen ihn in die vorstehenden Gleichungen ein und bestimmen dadurch

$$M_z = 52{,}108 \text{ und}$$
$$M_x = 1733{,}975.$$

Setzen wir diese Werte in die obigen Gleichungen ein für x_4, y_4, z_4, so entsteht:

$$\begin{aligned} 68{,}829\, z_4 + 93{,}262\, y_4 &= 1074{,}400 \\ 93{,}262\, x_4 + 31{,}058\, z_4 &= 559{,}308 \\ 31{,}058\, y_4 + 68{,}829\, x_4 &= -54{,}934, \end{aligned}$$

oder, da die drei Gleichungen voneinander abhängig sind:

$$\begin{aligned} x_4 &= -0{,}333\, z_4 + 5{,}997 \\ y_4 &= -0{,}738\, z_4 + 11{,}520. \end{aligned}$$

Es sind hiernach $z_4 = 0$, $x_4 = 5{,}997$, $y_4 = 11{,}52$ zusammengehörige brauchbare Koordinaten des vierten Punktes.

34. Bei Benutzung der in der vorigen Aufgabe gefundenen Werte soll die Vereinigung von *Mo* und *R* zur Gesamtresultante vorgenommen werden. Es ist

$R = 249{,}325$ kg; $\alpha = 62^\circ 9' 48''$; $\beta = 30^\circ 39' 20''$; $\gamma = 101^\circ 49'$,
$X = 116{,}423$ kg; $Y = 214{,}480$ kg; $Z = -51{,}057$ kg,

$M_x = 1733{,}975$; $M_y = -\ 928{,}947$; $M_z = 52{,}108$.
$Mo = 1967{,}823$; $\lambda = 28^0\,13'$; $\mu = 118^0\,10'\,7''$; $\nu = 88^0\,28'\,57''$.

Die Koordinaten x, y, z eines Punktes der Resultante bestimmen sich durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1733{,}975 &= Yz - Zy = 214{,}480\,z + 51{,}057\,y, \\ -\ 928{,}947 &= Zx - Xz = -\ 51{,}057\,x - 116{,}423\,z, \\ 52{,}108 &= Xy - Yx = 116{,}423\,y - 214{,}480\,x. \end{aligned}$$

Aus diesen drei abhängigen Gleichungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} x &= -\ 2{,}2802\,z + 18{,}194, \\ y &= -\ 4{,}2008\,z + 33{,}961. \end{aligned}$$

Es sind hiernch $z = 0$, $x = 18{,}194$, $y = 33{,}961$ zusammengehörige brauchbare Koordinaten des Angriffspunktes der Gesamtmittelkraft R'.

Gleichgewicht kann hergestellt werden durch eine fünfte Kraft $P_5 = 249{,}325$ **kg**, deren Richtung durch die Winkel

$$\alpha_5 = 117^0\,50'\,12'',\ \beta_5 = 149^0\,20'\,40'',\ \gamma_5 = 78^0\,11'$$

bestimmt ist, und welche einen Punkt des festen Systems angreift, als dessen Koordinaten $x = 18{,}194$, $y = 33{,}961$, $z = 0$ genommen werden können.

35. Ein festes System von fünf materiellen Punkten, deren Lage durch die folgenden Koordinaten gegeben ist

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,\ y_1 = 0,\ z_1 = 0 \\ x_2 &= 1,\ y_2 = 2,\ z_2 = 3 \\ x_3 &= 2,\ y_3 = 3,\ z_3 = 4 \\ x_4 &= 3,\ y_4 = 4,\ z_4 = 5 \\ x_5 &= 4,\ y_5 = 5,\ z_5 = 6, \end{aligned}$$

werde durch parallele Kräfte von folgender Größe und Richtung angegriffen:

$$P_1 = +\ 60\,\mathbf{kg},\ P_2 = +\ 70\,\mathbf{kg},\ P_3 = -\ 90\,\mathbf{kg},\ P_4 = -\ 150\,\mathbf{kg},$$
$$P_5 = +\ 200\,\mathbf{kg}.$$

Es sind die Resultante sowie die Koordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte zu berechnen:

$$\begin{aligned} R = \Sigma P = 90\,\mathbf{kg};\ 90\,x &= \Sigma Px = 240, \\ 90\,y &= \Sigma Py = 270, \\ 90\,z &= \Sigma Pz = 300, \end{aligned}$$
$$x = \tfrac{8}{3};\ y = 3;\ z = \tfrac{10}{3}.$$

36. Zwei gewichtslose Stangen von ungleicher Länge sind mit je einem Ende durch ein Charnier verbunden, während die anderen Enden auf dem Fußboden ruhen, wobei die Richtungen der Stangen in einer zu demselben normalen Ebene liegen und die Winkel α und β bilden. Auf das Charnier wird nach einer zum Fußboden normalen Richtung ein Druck P ausgeübt. Vergl. Fig. 218 (a. f. S.).

Wie groß ist der dadurch ausgeübte Druck auf den Fußboden?

$$P_1 = P\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\quad P_2 = P\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$S_1 = P_1\cos\alpha = P\frac{\cos\alpha\,\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$S_2 = P_2\cos\beta = P\frac{\cos\alpha\,\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

d. h.
$$S_1 = S_2.$$

$$D_1 = P\frac{\sin\alpha\,\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\quad D_2 = P\frac{\sin\beta\,\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

d. h.
$$D_1 + D_2 = P.$$

Fig. 218.

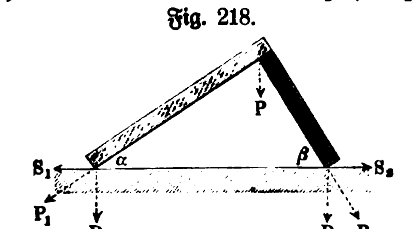
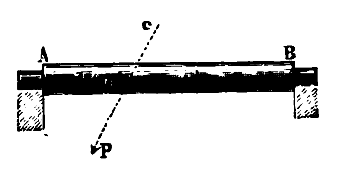


Fig. 219.



37. Es stelle AB (Fig. 219) eine feste Achse vor. In dem Punkte C derselben wirkt eine Kraft P, die mit der Achse den Winkel α bildet. Wie groß ist der Druck auf die Punkte A und B?

In der Richtung der Achse ist ein Druck gleich $P\cos\alpha$ wirksam; der Druck normal zur Achse ist in A und B bezw.

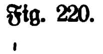
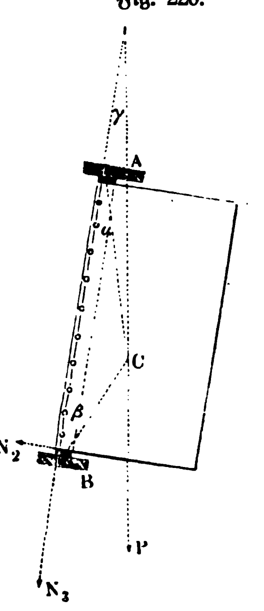


Fig. 220.

$$\frac{b}{a+b}P\sin\alpha \quad \text{und} \quad \frac{a}{a+b}P\sin\alpha.$$



38. Eine feste Ebene ist mit der Drehachse AB fest verbunden (Fig. 220). Am Punkte C dieser Ebene wirke eine Kraft P, deren Richtung in diese Ebene fällt, und die mit der Drehachse den Winkel γ bildet.

Wie groß ist der Druck auf die Punkte A und B? Wie groß ist derselbe, wenn die Kraft parallel der Drehachse wirkt?

Bilden die Verbindungslinien CA und CB mit der Drehachse die Winkel α und β, so ist der in Richtung von AB ausgeübte Druck

$$N_3 = P\cos\gamma.$$

Die zur Drehachse normalen Drucke sind für A und B bezw.

$$N_1 = P\frac{\sin(\beta+\gamma)\,\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$N_2 = P\frac{\sin(\alpha-\gamma)\,\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Für $\gamma = 0$ erhalten wir:

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{cotg\,\alpha + cotg\,\beta}.$$

N_1 und N_2 sind um so kleiner, je kleiner die Winkel α und β, d. h. je größer die gegenseitige Entfernung der Punkte A und B ist.

$$N_3 = P.$$

39. Eine Ebene sei in drei Punkten A, B, C (Fig. 221), die nicht in gerader Linie liegen, unterstützt. Eine zur Ebene normal wirkende Kraft P habe ihren Angriffspunkt S innerhalb des durch die Punkte A, B, C bestimmten Dreiecks. Es ist der auf die Unterstützungen ausgeübte Druck zu berechnen.

Fig. 221.



Wir nehmen BC, CA, AB als Drehungsachsen und bezeichnen mit D_1, D_2, D_3 die Drucke auf die drei Unterstützungspunkte, die Höhen des Dreiecks ABC mit h_1, h_2, h_3 und die von S auf die Dreiecksseiten gefällten Normalen mit p, q, r. Man hat dann:

$$\begin{aligned} D_1 + D_2 + D_3 - P &= 0 \\ Pp - D_1 h_1 &= 0 \\ Pq - D_2 h_2 &= 0 \\ Pr - D_3 h_3 &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$D_1 = P\,\frac{p}{h_1} \qquad D_2 = P\,\frac{q}{h_2} \qquad D_3 = P\,\frac{r}{h_3}.$$

Liegen die vier Punkte A, B, S, C in einer geraden Linie, so erscheinen die Drucke D_1, D_2, D_3 sämtlich unter der Form $\frac{0}{0}$, d. h. dieselben sind unbestimmt. Diese Unbestimmtheit erklärt sich daraus, daß die vier Kräfte parallele Kräfte in einer Ebene sind und demnach nur durch zwei Gleichungen verbunden erscheinen.

Die drei unbekannten Drucke D_1, D_2, D_3 sind aus diesen beiden Gleichungen nicht bestimmbar, wenn wir nicht noch andere Voraussetzungen machen. Geben wir z. B. einem der Drucke einen bestimmten Wert, so lassen sich die beiden anderen aus den obigen Gleichungen finden.

40. Auf drei Punkte A, B, C einer horizontalen (gewichtslosen) Platte wirken bezw. die aufwärts gerichteten Kräfte 200 kg, 128,57 kg, 171,43 kg. In welchem Punkte der Platte wirkt deren Resultante, falls $BC = 3$ m ist und durch die Höhe $AA' = 4$ m aus A im Verhältnisse $BA' : A'C = 4 : 3$ geteilt wird?

Die Resultante vom Werte 500 kg teilt die Höhe AA' im Verhältnisse 3 : 2.

41. Ein Seil, das gemäß Fig. 193 befestigt ist, wird durch $K = 200$ kg gespannt. Wie groß ist der Zug an der Befestigung für $\alpha = 60$?

100 kg.

Konstruktive Ausführung der Nebenfigur Nr. 193.

42. An zwei Punkten P_1 und P_2, die eine wagerechte Entfernung von 6,5 m und einen Höhenunterschied von 2 m haben, ist ein Seil von 9 m Länge befestigt. Wird dieses durch ein Gewicht gespannt, das sich mittels eines Ringes auf dem Seile bewegen kann, so bildet sich ein loser Knoten. Welchen Winkel α bilden die Seilstücke im Knoten mit der Vertikalen? Wie groß sind die Spannungen S_1 und S_2 in den Seilstücken bei einer Belastung von 170 kg?

$$\alpha = 46^0\,14'$$

$$S_1 \sim 123\,\text{kg} \quad \text{und} \quad S_2 \sim 123\,\text{kg}.$$

43. Konstruktive Behandlung der vorigen Aufgabe. In einer Vertikalebene durch P_1 und P_2 sind diese Punkte die Brennpunkte einer Ellipse, für welche die große Achse mit der Seillänge übereinstimmt. Da die Gewichtsvertikale eine Normale dieser Ellipse ist, so hat man, um diese Vertikale zu bestimmen, die horizontale Tangente der Ellipse zu konstruieren. Dies läßt sich ausführen, ohne daß die Ellipse selbst gezeichnet zu werden braucht.

44. Mit einer festen Rolle wird eine Last von 50 kg gehoben. Wie groß ist der Achsendruck a. bei parallelen Seilen, b. bei Seilen, die einen Winkel von 60° einschließen?

a. 100 kg; b. 86,6 kg.

45. Mit einer losen Rolle wird eine Last von 50 kg gehoben. Wie groß ist die dazu erforderliche Kraft bei parallelen Seilen?

25 kg + halbes Rollengewicht.

46. Mit einer losen Rolle von 24 cm Radius wird durch eine Kraft von 100 kg eine Last gehoben. Wie groß ist diese, falls das Seil an der Rolle eine Sehne von 36 cm umspannt?

150 kg — Rollengewicht.

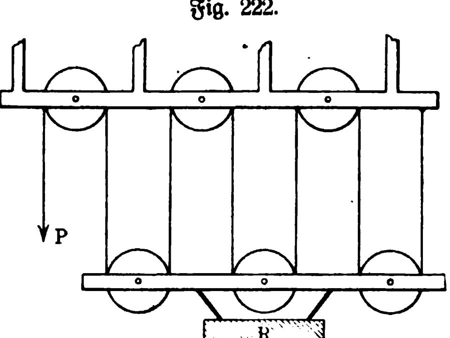
47. Mit einem Rollenzuge von vier losen Rollen, deren jede 3 kg wiegt, sollen 1000 kg gehoben werden. Welche Kraft ist dazu erforderlich?

65,31 kg.

48. Wieviel lose Rollen von je 6 kg Gewicht muß man in einem Rollenzuge verwenden, um 400 kg mit 50 bis 60 kg emporzuziehen?

3 Rollen.

Fig. 222.



49. Es ist der gemeine Flaschenzug (vergl. Fig. 222) zu untersuchen, falls jede Rolle das Gewicht G hat und ein Flaschenrahmen G' wiegt.

Bezeichnet man mit n die Gesamtzahl der festen und losen Rollen, so ist:

$$P = \frac{R + \frac{n}{2} G + G'}{n}.$$

Für $R = 1000$ kg, $G = 4$ kg, $G' = 1$ kg, $n = 8$ ist also $P \sim 127$ kg.

50. Die Untersuchung der vorigen Nummer ist durchzuführen für den Fall, daß das Seil an der unteren (losen) Flasche befestigt ist.

Hier wird n ungerade, da die feste Flasche eine Rolle mehr enthält als die lose.

$$P = \frac{R + \frac{n-1}{2} G + G'}{n}.$$

51. Es ist die in Fig. 223 dargestellte Rollenverbindung zu untersuchen, falls die lose Rolle das Gewicht G hat.

$$P = \frac{R + G}{3}.$$

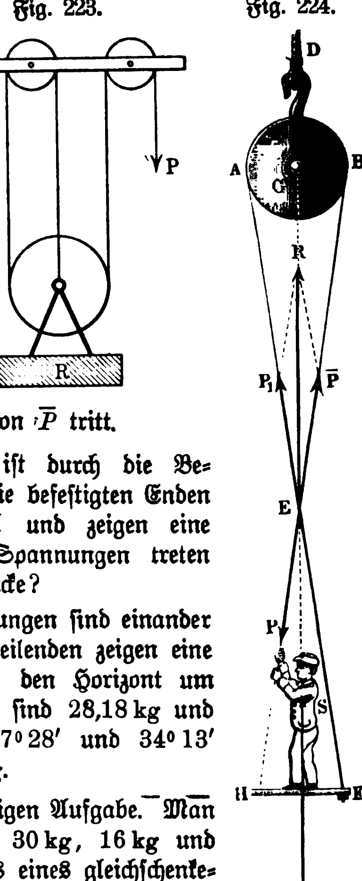


Fig. 223. Fig. 224.

52. Mit welcher Kraft P muß ein Mann an der in Fig. 224 dargestellten Vorrichtung wirken, um sich emporzuziehen?

Bezeichnet G das Gewicht des Mannes und des Trittbrettes, so ist für $\measuredangle\, CEA = \measuredangle\, CEB = \alpha$

$$P = \frac{G}{2 \cos \alpha}.$$



P wirkt als P_1, wozu noch die Reaktion $\overline{P}$ tritt.

53. Ein Seileck von vier Seiten ist durch die Belastungen 20 kg, 30 kg, 16 kg gespannt. Die befestigten Enden bilden mit dem Horizonte gleiche Winkel und zeigen eine Horizontalspannung von 25 kg. Welche Spannungen treten auf? Welche Richtungen haben die Seilstücke?

Die Vertikalspannungen beider Befestigungen sind einander gleich, jede beträgt 33 kg; die befestigten Seilenden zeigen eine Spannung von 41,40 kg und sind gegen den Horizont um 52° 51′ geneigt. Die anderen Spannungen sind 28,18 kg und 30,23 kg, die anderen Neigungswinkel 27° 28′ und 34° 13′ entsprechend der Folge 20 kg, 30 kg, 16 kg.

54. Konstruktive Behandlung der vorigen Aufgabe. Man bildet das Krafteck (Gerade) aus 20 kg, 30 kg, 16 kg und macht die so entstandene Gerade zur Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks von der, 25 kg entsprechenden Höhe. Die Spitze des Dreiecks ist der Pol der Konstruktion.

55. Um einen Pfahl aus dem Boden zu ziehen, wird an seinem Kopfe ein Seil befestigt, senkrecht hochgeführt und an einem, zwischen zwei Baumästen angeknüpften Seile AB verknotet. Mit welcher Kraft X wird der Pfahl emporgezogen, wenn sich ein Mann von $G = 80$ kg Gewicht an das Seil AB hängt und wenn dabei ein Seileck entsteht, dessen Mittelstück hori-

zontal liegt, während das dem Pfahl benachbarte Ende eine Neigung $\alpha = 80^0$ und das andere Ende eine Neigung $\beta = 10^0$ gegen den Horizont hat?

Durch Zerlegung der senkrechten Kraft von 80 kg in ihre Komponenten erhält man zunächst die Horizontalspannung und die Spannung des benachbarten Seilendes.

$$X = G \,.\, tang\,\alpha \,.\, cot\,\beta \sim 2600\,\text{kg}.$$

56. Für eine Kettenbrücke, bei welcher die Horizontale angenähert gleichmäßig belastet ist, gilt, gemäß Fig. 200, $\gamma = 400\,\text{kg}$, $l = 80\,\text{m}$, $h = 10\,\text{m}$.

Man berechne H, sowie V, S und σ für eine Reihe von Schnitten und vergl. die Ergebnisse der Rechnung mit der Konstruktion.

57. Für eine gemeine Kettenlinie ist die Spannweite $2\,l = 16\,\text{m}$ und die Pfeilhöhe $h = 2{,}5\,\text{m}$. Wie groß ist die Länge der Kette? Wie groß die Strecke c, welche die Horizontalspannung mißt? Wie groß die Neigung des Kettenendes gegen den Horizont?

Bei Verwendung der Näherungsformeln der Anwendung 3 erhält man

$$2\,\lambda \sim 17\,\text{m}; \quad c \sim 13{,}22\,\text{m}; \quad \alpha \sim 32^0\,50'.$$

58. Für eine gemeine Kettenlinie ist die Spannweite $2\,l = 9{,}5\,\text{m}$ bei einer Länge $2\,\lambda = 10\,\text{m}$. Wie groß ist die Pfeilhöhe? Wie groß ist die Strecke c, welche die Horizontalspannung mißt?

$$h \sim 1{,}34\,\text{m}; \quad c \sim 8{,}67\,\text{m}.$$

59. Eine Kette von der Länge $2\,\lambda = 30\,\text{m}$ und einem Eigengewichte von 8 kg ist an ihren Enden über Rollen geführt und durch je 20 kg gespannt. Wie groß ist die Horizontalspannung H? Wie groß ist die Neigung α gegen die Horizontale am Ende? Wie groß ist die Strecke c? Wie groß die Spannweite $2\,l$? Wie groß die Pfeilhöhe?

$$H \sim 19{,}6\,\text{kg}; \quad \alpha = 11^0\,32'; \quad c \sim 73{,}48\,\text{m}; \quad 2\,l \sim 29{,}79\,\text{m}; \quad h \sim 1{,}52\,\text{m}.$$

60. Eine Kette von der Länge $2\,\lambda = 5\,\text{m}$ hat ein Eigengewicht von 15 kg. Wie groß ist bei einer Pfeilhöhe $h = 2\,\text{m}$ die Belastung für den laufenden Meter, die Strecke c und die Horizontalspannung?

Bei Anwendung der genauen Formeln ergiebt sich

$$\gamma = 3\,\text{kg}; \quad c = \tfrac{9}{16}\,\text{m}; \quad H = 1{,}69\,\text{kg}.$$

61. Ein Punkt einer gemeinen Kettenlinie hat die Koordinaten $x = 3\,\text{m}$ und $y = 2\,\text{m}$ für das übliche Achsensystem durch den Scheitel. Wie groß ist für diese Kurve die Strecke c?

Nach der Näherungsformel erhält man $c \sim 2{,}58$, nach der genauen Formel $c = 2{,}53$.

62. Anwendung 4 ist durchzurechnen für $\alpha_1 = 32^0\,20'$, $\alpha_2 = 25^0\,10'$, $P_1 = 20\,\text{kg}$. Wie groß ist P_2 für den Fall des Gleichgewichtes? Wie groß ist in diesem Falle S und D? Wie stellt sich die Rechnung für $P_2 = 15\,\text{kg}$? Wie groß sind S_1 und S_2 bei Berücksichtigung der Rollenbewegung, wenn für diese $r = 2\,\text{cm}$ und $\mathfrak{T}r = 192$ ist?

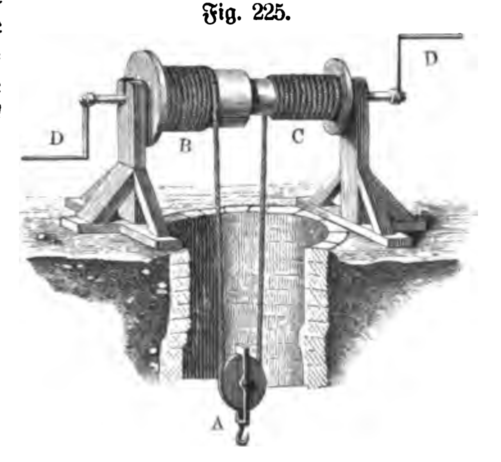
63. Setzt man in Anwendung 5 für $P_1 \sin \alpha_1$ und $P_2 \sin \alpha_2$ bezw. K_1 und K_2, so können von den vier Größen K_1, K_2, r_1, r_2 für den Fall des Gleichgewichtes drei willkürlich gewählt werden.

Gegeben: $r_2 = 0{,}13\,\text{m}, r_1 = 0{,}52\,\text{m}, \quad K_2 = 60\,\text{kg}$. Gesucht: $K_1 = 15\,\text{kg}$
$r_2 = 0{,}13\,\text{m}, r_1 = 0{,}474\,\text{m}, K_1 = 10\,\text{kg}$. $K_2 = 36\,\text{kg}$
$K_1 = 20\,\text{kg}, K_2 = 350\,\text{kg}, \quad r_2 = 0{,}2\,\text{m}$. $r_1 = 3{,}5\,\text{m}$
$K_1 = 30\,\text{kg}, K_2 = 370\,\text{kg}, \quad r_1 = 1{,}7\,\text{m}$. $r_2 = 0{,}14\,\text{m}$.

64. Anwendung 5 ist durchzurechnen für $\alpha_1 = 32^0\,20'$, $\alpha_2 = 25^0\,10'$, $P_1 = 20\,\text{kg}$, $r_1 = 0{,}02\,\text{m}$, $r_2 = 0{,}01\,\text{m}$. Wie groß ist P_2 für den Fall des Gleichgewichts? Wie stellt sich die Rechnung für $P_1 = 15\,\text{kg}$? Wie groß sind S_1 und S_2, wenn $\mathfrak{T}r = 250$ ist?

65. Es ist die Differentialhaspel (vergl. Fig. 225) zu untersuchen für den Fall des Gleichgewichts. Eine Kraft Q wirkt hier an der losen Rolle A senkrecht abwärts, und die Enden des Seiles, welches diese Rolle trägt, sind nach entgegengesetzter Richtung um eine horizontal gelagerte Welle BC gewickelt, die an diesen Stellen verschiedene Durchmesser hat. Die Welle wird mittels der Kurbeln D durch eine Kraft P gedreht. Wie heißt die Bedingung des Gleichgewichtes, wenn die Länge des Kurbelarmes mit R, die Halbmesser der verschieden starken Welle mit r_1 und r_2 bezeichnet werden?

Fig. 225.



$$P = \frac{Q}{2}\,\frac{r_1 - r_2}{R}.$$

Für $Q = 4700\,\text{kg}$, $R = 0{,}470\,\text{m}$, $r_1 = 0{,}130\,\text{m}$, $r_2 = 0{,}118\,\text{m}$ ist $P = 60\,\text{kg}$.

Fig. 226.

66. Ein Räderwerk bestehe aus m Wellen $A, B, C, D \ldots$ (Fig. 226), von denen jede ein größeres und ein kleineres Rad trägt. An dem Umfange des größeren Rades der ersten Welle, d. i. in der Figur am Kurbelarme, wirke die Kraft P nach tangentialer Richtung, und an dem Umfange des kleineren Rades der letzten Welle wirke tangential

die Kraft Q. Die Halbmesser der Räder sind der Reihe nach durch R_1, R_2, R_3, ... R und r, r_1, r_2, r_3 ... bezeichnet. Wie heißt die Bedingung des Gleichgewichtes?

$$\frac{PR}{Qr} = \frac{r_1}{R_1}\frac{r_2}{R_2}\frac{r_3}{R_3}\ldots = u,$$

unter u das in Nr. 37 der Übungen des ersten Abschnittes entwickelte Umsetzungsverhältnis verstanden. Bezeichnet man die Drucke zwischen den Zähnen je zweier miteinander arbeitender Räder, von der Kraft Q aus gerechnet, mit X_1, X_2, X_3 ..., so hat man dafür:

$$X_1 = Q\frac{r}{R_1}; \quad X_2 = Q\frac{r}{R_1}\frac{r_1}{R_2}; \quad X_3 = Q\frac{r}{R_1}\frac{r_1}{R_2}\frac{r_2}{R_3}.$$

67. Eine Welle, die durch eine Kurbel von 0,300 m Länge gedreht wird, trägt ein kleines Zahnrad von 0,140 m Durchmesser. Dieses steht mit einem Rade von 0,700 m Durchmesser im Eingriff, und auf dessen Welle ist eine hölzerne Trommel von 0,300 m Durchmesser angebracht. Ein Widerstand von 50 kg soll mittels eines Seiles, das sich auf die Trommel wickeln kann, gehoben werden. Wie groß ist die an der Kurbel zur Herstellung des Gleichgewichtes notwendige Kraft P?

$$\frac{P\,.\,0{,}300}{50\,.\,0{,}150} = \frac{0{,}140}{0{,}700},$$

d. h. $P = 5$ kg. Der Druck zwischen den Zähnen der miteinander arbeitenden Räder ist $X = 10{,}7$ kg. Das Umsetzungsverhältnis u ist hier $\frac{140}{700} = \frac{1}{5}$.

68. Zwei Männer, von denen jeder mit einem Druck von 15 kg arbeitet, sollen mittels einer Bodenwinde eine Last von 750 kg heben. Die Länge der Kurbel sei 0,390 m, der Halbmesser der Windetrommel 0,130 m. Wie groß ist das Umsetzungsverhältnis?

$$u = \frac{2\,.\,15\,.\,0{,}390}{750\,.\,0{,}130} = \frac{3}{25}.$$

Diesem Werte zufolge hätte man bei der Winde ein doppeltes Vorgelege anzuwenden, so daß außer der Kurbel und Trommelwelle noch eine dazwischen liegende Vorgelegewelle gebraucht würde. Bezeichnen wir die Halbmesser der Räder von der Kurbel nach der Trommelwelle hin durch r_1, R_1, r_2, R_2, so ist hiernach

$$u = \frac{3}{25} = \frac{r_1}{R_1}\frac{r_2}{R_2}.$$

69. Ein Kran hat zwei Kurbeln von $R = 0{,}4$ m Länge, an denen jeder Arbeiter mit einer Kraft von $P = 15$ kg wirkt. Auf der Kurbelwelle sitzt ein Trieb von $r_2 = 0{,}08$ m Halbmesser und dieser steht im Eingriff mit einem Rad auf der Vorgelegewelle von $R_2 = 0{,}28$ m Halbmesser. Auf der Vorgelegewelle sitzt ein Trieb von $r_1 = 0{,}12$ m Halbmesser und treibt ein Rad auf der Kettentrommelwelle von $R_1 = 0{,}50$ m Halbmesser.

Wie groß muß der Halbmesser (r) der Kettentrommel genommen werden, wenn durch die Arbeiter einer Last von $Q = 1000$ kg das Gleichgewicht gehalten werden soll?

$$\frac{30 \cdot 0{,}4}{1000 \cdot r} = \frac{0{,}08}{0{,}28} \cdot \frac{0{,}12}{0{,}50},$$

d. h. $r = 0{,}175$ m. Die Drucke zwischen den Zähnen je zweier miteinander arbeitender Räder sind, von der Last Q aus gerechnet:

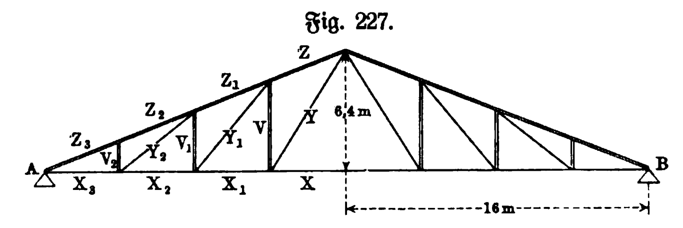
$$X_1 = 350 \text{ kg}, \; X_2 = 150 \text{ kg}.$$

Für $P = 30$ kg; $R = 448$ mm; $r_2 = 52$ mm; $R_2 = 260$ mm; $r_1 = 104$ mm; $R_1 = 624$ mm und $r = 112$ m gilt: $Q = 3600$ kg; $X_1 = 646{,}1$ kg; $X_2 = 258{,}4$ kg. Für $P = 25$ kg; $R = 448$ mm; $r_2 = 52$ mm; $r_1 = 78$ mm; $R_1 = 390$ mm; $r = 112$ mm und $Q = 3000$ kg gilt: $R_2 = 312$ mm; $X_1 = 861{,}5$ kg; $X_2 = 215{,}4$.

70. Für die Angaben der Nr. 64 sind die vertikalen und horizontalen Zapfendrucke im Falle des Gleichgewichts zu bestimmen, wenn das Gewicht der Radwelle mit $G = 5$ kg in Ansatz gebracht wird und wenn P_1, G, P_2 bei einer Achsenlänge von 15 cm von dem einen Ende der Achse bezw. die Entfernungen 5 cm, 9 cm, 12 cm haben.

71. Ein Dach von 32 m Spannweite wird durch Dachbinder, wie sie Fig. 227 zeigt, gebildet, welche 5 m voneinander abstehen. Die Berechnung

Fig. 227.



ist durchzuführen bei 200 kg Belastung für den Quadratmeter des Grundrisses, unter Voraussetzung gleichmäßiger Knotenbelastung. Zwischen zwei Bindern liegt ein Rechteck von 32 . 5 = 160 qm, welches 32 000 kg zu tragen hat. Jeder Binder trägt die Hälfte von zwei solchen Rechtecken, also 32 000 kg. Bei gleichmäßiger Belastung der Knoten trägt jedes der acht Felder des Binders 4000 kg, also jeder Knoten 4000 kg, während in A und B je 2000 kg unmittelbar von der Mauer aufgenommen werden. Die Reaktionen in A und B haben zusammen 7 . 4000 = 28 000 kg zu tragen, so daß jede (Symmetrie) zu 14 000 kg anzusetzen ist.

$X = +20000$ kg $\quad Y = +9434$ kg $\quad Z = -26925$ kg $\quad V = -8000$ kg
$X_1 = +25000$ „ $\quad Y_1 = +7810$ „ $\quad Z_1 = -32310$ „ $\quad V_1 = -6000$ „
$X_2 = +30000$ „ $\quad Y_2 = +6403$ „ $\quad Z_2 = -37695$ „ $\quad V_2 = -4000$ „
$X_3 = +35000$ „ $\quad\quad\quad\quad Z_3 = -37695$ „

Die gedrückten Stangen (Z und V) sind in Fig. 227 doppelt ausgezogen.

72. Es ist der parabolische Träger der Fig. 228 zu berechnen, bei 1000 kg dauerndem Druck und 5000 kg veränderlicher Belastung der einzelnen Knoten der oberen Gurtung.

Die Maxima für alle Horizontalstangen sind — 48 000 kg. Die Maxima für die Stangen der unteren Gurtung der Reihe nach + 52 500 kg, 50 300 kg, 48 900 kg, 48 100 kg von links bis zur Mitte.

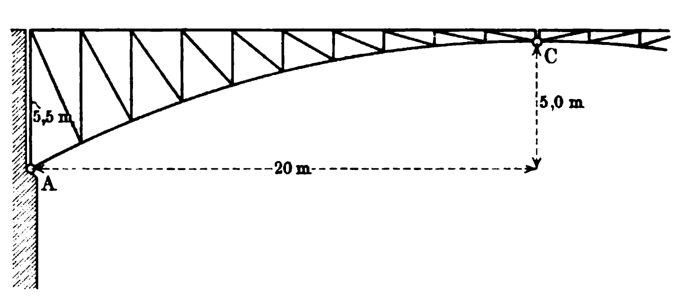
Fig. 228.

Die Maxima für die Vertikalstangen sind in derselben Folge — 6000 kg, — 7560 kg und + 560 kg, — 8500 kg und + 1500 kg, — 8800 kg und + 1800 kg. Die Maxima für die schrägen Stangen sind in derselben Folge: ± 6250 kg, ± 6850 kg, ± 7080 kg.

Für die rechte Hälfte findet man dieselben Zahlen wie für die linke.

73. Es ist die Bogenbrücke der Fig. 229 zu berechnen bei 2400 kg = 2,4 t dauernder und 4000 kg = 4 t veränderlicher Belastung der einzelnen

Fig. 229.



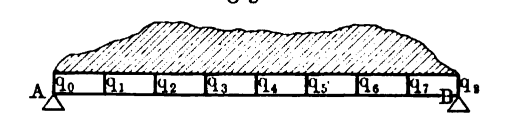
Knoten der oberen Gurtung. Hier haben alle Stangen Zug und Druck auszuhalten, nur die Stangen der unteren Gurtung werden lediglich gedrückt.

Hängt man die Brücke auf, anstatt sie zu stützen, so gilt dieselbe Berechnung, aber alle Spannungszahlen wechseln das Vorzeichen.

74. Es ist der Träger der Fig. 208 graphostatisch zu behandeln, falls er auch noch durch eine gleichmäßige Belastung (z. B. Eigengewicht) in Anspruch genommen wird.

75. Wie ändern sich die Ergebnisse für Fig. 208 und Fig. 209 bei indirekter Belastung, d. h. wenn die Belastung, wie es Fig. 230 zeigt, durch $n+1$ gleichmäßig verteilte Querträger $q_0, q_1, q_2, q_3 \ldots q_n$ auf den Balken AB übertragen wird?

Fig. 230.



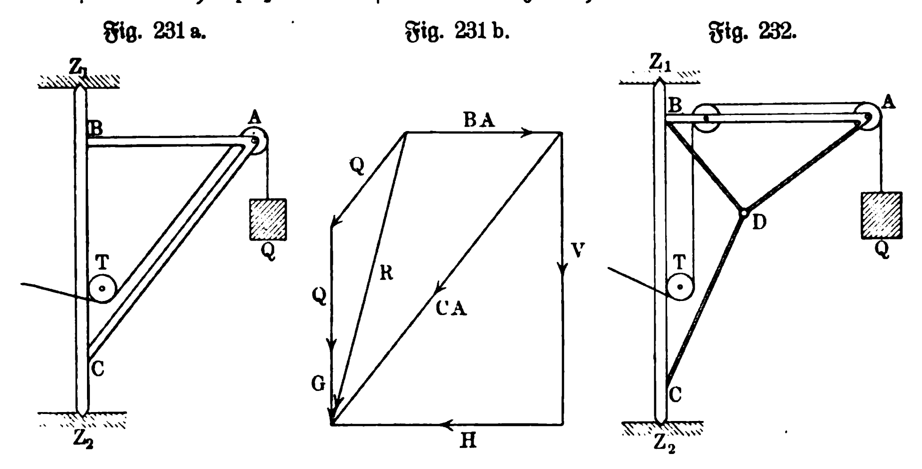
Die Belastung zwischen q_p und q_{p+1} zerlegt sich nach dem Gesetze für Parallelkräfte in Kräfte, welche in q_p und q_{p+1} wirken, so daß z. B. bei gleichmäßiger Belastung der Horizontalen als Momentenfläche statt

der Parabel ein Vieleck, statt des geradlinigen Diagramms der Vertikalkräfte eine treppenförmige Begrenzungslinie auftritt.

76. bis **78.** Die Aufgaben 71 bis 73 sind graphostatisch zu behandeln.

79. Der Drehkran mit horizontaler Zugstange, den Fig. 231 darstellt, soll graphostatisch behandelt werden.

Die Achse BC ist in den Zapfenlagern Z_1 und Z_2 drehbar. Auf den Punkt A, in dem die Zugstange BA und die Strebe CA einen Knoten bilden, wirkt die Belastung Q, der Zug im Seile AT, der bei gleichförmiger Bewegung auch den Wert Q hat, und ein Gewicht G, welches sich aus dem Gewichte der Rolle bei A, der Kette und dem halben Gewichte der Strebe AB und AC zusammensetzt. Mit den Spannungen in BA und AC muß diese Inanspruchnahme von A im Gleichgewichte sein. Dem entspricht Fig. 231 b, in welcher der Druck für CA noch in $[H]$ und $[V]$ zerlegt ist. Es ist nun noch $Z_1 Z_2$ als belasteter Balken zu behandeln.



80. Dieselbe Untersuchung ist durchzuführen für einen Drehkran mit gebrochener Strebe (Fig. 232).

81. Behandlung eines Trägers mit Dreieckslast (Fig. 233). Die Belastung steigt von dem einen Ende des Balkens, proportional zu der Entfernung von diesem, an.

Fig. 233.

A B

82. Rechnerische Behandlung des Trägers in Fig. 208, falls die rechte Stütze fortgenommen und die linke durch eine feste Einklemmung ersetzt wird (Freiträger). Graphische Darstellung der Momentenfläche und der Vertikalkräfte gemäß Rechnung.

83. Dasselbe für den Träger in Fig. 209.

84. Dasselbe für den Träger in Fig. 233.

85. Graphische Darstellung des Potentials einer homogenen Kugelschale, einer homogenen Vollkugel und einer homogenen Hohlkugel.

86. Das Selbstpotential der homogenen Vollkugel (vergl. Anwendung 13) ist abzuleiten.

Welche Wärmemenge entspricht dem Selbstpotential der Sonne?

1 Wärmeeinheit (Kalorie) = 424 mkg.

87. Eine Stange AB, welche bei A mit der Achse AC verbunden ist und in B mit ihr durch einen Steg p zusammenhängt, dessen Gewicht vernachlässigt werden kann, dreht sich gleichförmig.

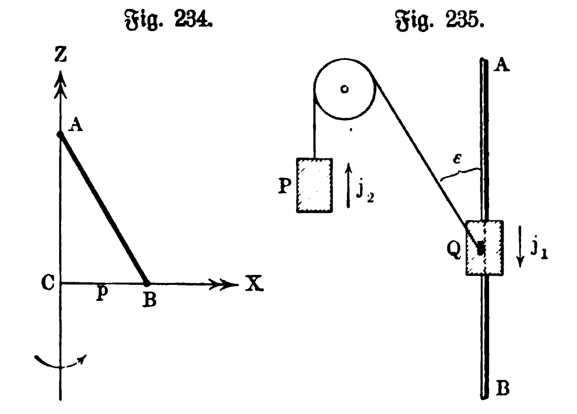


Fig. 234. Fig. 235.

Die Bewegung ist gemäß Anwendung Nr. 14 zu behandeln.

Wann ist der Steg p überflüssig?

88. Dasselbe für die Dreiecksfläche (unendlich-dünne Platte) der Fig. 234.

Wann ist die Befestigung bei C überflüssig?

89. Nach dem Princip von d'Alembert sind die vertikalen Beschleunigungen von Q, das sich auf der Stange AB bewegen kann, und von P zu bestimmen (vergl. Fig. 235).

$$j_1 = \frac{Q - P\cos\varepsilon}{P\cos^2\varepsilon + Q} \cdot g$$

$$j_2 = -j_1 \cdot \cos\varepsilon.$$

90. Nach dem Principe von d'Alembert ist die Bewegung des mathematischen Pendels bei einer Befestigung, wie sie Fig. 145 darstellt, zu behandeln.

Zweites Kapitel.

Der Schwerpunkt.

67. Die Bestimmung des Schwerpunktes für materielle Gebilde. Nach dem Principe der Paarwirkung befinden sich alle Körper der Außenwelt in gegenseitiger Einwirkung. Für die Körper, welche in der Technik verwendet werden, ist die gegenseitige Einwirkung zwischen einem solchen Körper und der Erde von hervorragender Bedeutung. Diese Einwirkung stellt sich dar in dem System der Kräfte, welche zwischen den einzelnen Atomen des Körpers und den einzelnen Atomen der Erde zur Geltung kommen.

Dieses System wird übersichtlich, wenn man die Erde als eine homogen-konzentrisch-geschichtete Kugel auffaßt (vergl. Übung 13 des vorigen Kapitels), da in diesem Falle zunächst der Mittelpunkt der Erde den einzelnen Atomen des (beliebig gestalteten) Körpers als dynamisches Centrum gegenübertritt. Bei der großen Entfernung des Erdmittelpunktes von den Atomen der, in der Nähe der Erdoberfläche befindlichen Körper, können ferner die Verbindungsgeraden der einzelnen Körperatome mit dem Erdmittelpunkte als parallel angesehen werden, so daß für Atome von den Massen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ an diesen die Parallelkräfte $[\mu_1 g]$, $[\mu_2 g]$ ... anzusetzen sind.

Behandelt man diese Parallelkräfte gemäß Formel Nr. 66, so gelangt man zu einem Mittelpunkte des Systems, welcher zugleich der Massenmittelpunkt des Körpers (vergl. S. 240) ist und demnach auch durch die Formeln Nr. 64 und Nr. 65 gewonnen werden kann.

Für das betrachtete System von Kräften, welchem entweder der freie Fall des Körpers zur Erde oder der Druck bezw. Zug, welcher bei der Verhinderung dieser bestimmten Bewegung auftritt, d. h. das Gewicht des Körpers entspricht, führt der Massenmittelpunkt im besondern den Namen Schwerpunkt.

Im folgenden handelt es sich darum, die Lage des Schwerpunktes, der auch bisher schon gelegentlich verwendet wurde, für besondere materielle Gebilde wirklich zu bestimmen.

Dies geschieht, von einfachen Fällen abgesehen, stets durch die Formeln Nr. 64 bezw. 66. Gemäß ihrer Herleitung darf man jede dieser Formeln für sich verwenden, man kann sie aber auch zusammen

auf ein dreiachsiges Koordinatenkreuz beziehen, welches durchaus nicht rechtwinklig zu sein braucht.

Liegt das materielle Gebilde, dessen Schwerpunkt bestimmt werden soll, ganz innerhalb des ersten Winkelraumes (+, +, +) eines Kreuzes, so sind die Strecken x_p, y_p, z_p alle positiv und demnach auch x, y, z.

Aus dieser Lage läßt sich jede andere Lage durch Verschiebung des Kreuzes herstellen, so daß also die Formeln Nr. 64 bezw. Nr. 66 unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Koordinaten allgemein gelten. Schneidet z. B. die XY-Ebene das materielle Gebilde, so sind die Strecken z_p auf der positiven Seite der XY-Ebene positiv, die Strecke z_p auf der negativen Seite der XY-Ebene negativ anzusetzen. Daher kann z einen positiven oder einen negativen Wert erhalten und auch Null werden; für $z = 0$ geht die XY-Ebene durch den gesuchten Schwerpunkt, d. h. wenn das Massenmoment $\Sigma \mu_p z_p$ für die XY-Ebene verschwindet, so enthält diese den Schwerpunkt.

Da die Lage der XY-Ebene ganz beliebig ist, so gelten diese Betrachtungen für jede Ebene.

Eine Ebene, in welcher der Schwerpunkt des materiellen Gebildes liegt, pflegt man eine Schwerebene desselben zu nennen, und es ist klar, daß man im allgemeinen drei, sich in einem Punkte schneidende Schwerebenen kennen muß, um die Lage des Schwerpunktes zu bestimmen.

Dies zeigen auch die drei Gleichungen der Formeln Nr. 64 bezw. Nr. 66, deren jede zu einer der Koordinatenebenen eine Parallelebene bestimmt, in welcher der Schwerpunkt liegt, falls nicht der Sonderfall $x = 0$ oder $y = 0$ oder $z = 0$ vorliegt, in dem eine der Koordinatenebenen selbst Schwerebene ist.

Eine Gerade, in welcher der Schwerpunkt eines materiellen Gebildes liegt, pflegt man eine Schwergerade desselben zu nennen, und es ist klar, daß man im allgemeinen eine Schwerebene und eine (sie schneidende) Schwergerade oder zwei sich schneidende Schwergeraden kennen muß, um die Lage des Schwerpunktes bestimmen zu können.

Liegen die materiellen Punkte eines Gebildes, welche ja auch dynamische Centren sein können, in einer Ebene, so ist diese Ebene selbst eine Schwerebene des Gebildes. Wählt man diese z. B. als XY-Ebene, so braucht man von den Formeln Nr. 64 bezw. Nr. 66 nur die Gleichungen für x und y, welche hier zwei Parallelen zu den Achsen als Orte für den Schwerpunkt bestimmen. Diese lassen sich als Schwergerade der XY-Ebene auffassen oder auch als Schnitte zweier Schwerebenen mit der XY-Ebene. Liegen die materiellen Punkte eines Gebildes in einer Geraden, so ist diese Gerade selbst eine Schwergerade des Gebildes. Wählt man diese z. B. als Z-Achse, so braucht man von den Formeln Nr. 64 bezw. Nr. 66 nur die Gleichung für z.

Auf der Bestimmung von Schwerebenen bezw. Schwergeraden beruht auch die Bestimmung von Schwerpunkten durch Versuche, wie sie im ersten Lehrgange der Physik veranschaulicht wird.

Körper mit einer Symmetrieebene erfordern nur die Bestimmung zweier Schwerebenen, da die Symmetrieebene den Schwerpunkt enthält. Vergl. S. 240.

Für Körper mit zwei Symmetrieebenen ist deren Schnittgerade eine Schwergerade.

Bei Körpern mit drei (oder mehr) sich in einem Punkte schneidenden Symmetrieebenen ist die Lage des Schwerpunktes ohne weiteres gegeben.

Entsprechendes gilt für die sogenannte „schiefe Symmetrie", wie sie ein Schiefkant (schiefwinkliges Parallelepipedon) veranschaulicht.

Oft ist es auch nützlich, ein materielles Gebilde in Teile T_1, T_2 ... zu zerlegen, für diese Teile die Schwerpunkte S_1, S_2, ... zu bestimmen und endlich den Schwerpunkt S dieser, als dynamische Centren der Teile T_1, T_2, ... aufgefaßten Schwerpunkte aufzusuchen, welcher zugleich der Schwerpunkt des vorgelegten materiellen Gebildes ist. Daß dem so ist, läßt sich zunächst für eine Zweiteilung leicht zeigen. Teilt man die Atome des materiellen Gebildes in zwei Gruppen μ_1, μ_2, ... und μ_1', μ_2', ..., so gilt für den Abstand des Schwerpunktes der ersten Gruppe von der YZ-Ebene

$$\frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots} = x$$

und für den Abstand des Schwerpunktes der zweiten Gruppe von der YZ-Ebene

$$\frac{\mu_1' x_1' + \mu_2' x_2' + \cdots}{\mu_1' + \mu_2' + \cdots} = x'.$$

Für den entsprechenden Abstand des Schwerpunktes dieser, bezw. mit den Massen $(\mu_1 + \mu_2 + \cdots)$ und $(\mu_1' + \mu_2' + \cdots)$ behafteten Schwerpunkte gilt ferner

$$\xi = \frac{x(\mu_1 + \mu_2 + \cdots) + x'(\mu_1' + \mu_2' + \cdots)}{(\mu_1 + \mu_2 + \cdots) + (\mu_1' + \mu_2' + \cdots)}.$$

Setzt man in dem Ausdrucke für ξ die Werte von x und x' ein, so sieht man, daß ξ zugleich die entsprechende Koordinate für das ganze materielle Gebilde ist.

Entsprechendes gilt für die Abstände von den anderen Koordinatenebenen.

Die Ausdehnung des Beweises auf mehrere Gruppen bietet keine Schwierigkeiten dar.

Endlich mag noch darauf hingewiesen werden, daß der Schwerpunkt für die Parallelprojektion eines materiellen Gebildes zugleich die Parallelprojektion seines Schwerpunktes ist, falls man der Projektion eines materiellen Punktes dieselbe Masse giebt wie dem Punkte selbst.

Legt man nämlich die Z-Achse in die Richtung der Projektion, so haben die Punkte und ihre Projektionen bezw. dieselben Koordinaten x und y.

68. Die Schwerpunkte geometrischer Gebilde. Die Formeln Nr. 66 bezw. Nr. 64, in welchen Kräfte bezw. Massen von materiellen Punkten, d. h. von Atomen oder von dynamischen Centren vorkommen, gehen unter gewissen Bedingungen in rein geometrische Beziehungen über.

Ist die Masse m in einem Raumteile v verteilt, so nennt man $\frac{m}{v}$ die mittlere oder durchschnittliche Dichtigkeit des betreffenden Raumteiles.

Hat diese mittlere Dichtigkeit für beliebig kleine Teile eines Körpers stets denselben Wert δ, so daß also die Massen beliebig kleiner, unter sich gleicher Teile desselben selbst unter sich gleich sind, so heißt der Körper **homogen**; in diesem Falle, wo δ kurzweg die **Dichtigkeit des Körpers** genannt wird, gilt die Gleichung

$$m = v \cdot \delta$$

für beliebig zusammengehörige Teilmassen und Teilvolumina des Körpers.

Hat die mittlere Dichtigkeit für beliebig kleine Teile eines Körpers nicht stets denselben Wert, so muß man den Körper in Volumenelemente zerlegt und für jedes derselben den Grenzwert $\frac{m}{v}$ bestimmt denken; in diesem Falle, in dem der Körper **heterogen** heißt, erhält man für jedes **Volumenelement** $v_1, v_2, \ldots$ einen **besondern Wert der Dichtigkeit** $\delta_1, \delta_2, \ldots$, so daß sich die Masse m des Körpers gemäß der Gleichung

$$m = v_1 \delta_1 + v_2 \delta_2 + \cdots$$

nur durch einen Grenzübergang feststellen läßt.

Zerlegt man einen homogenen Körper von der Dichtigkeit δ in n **Teile, deren Schwerpunkte bereits bekannt sind**, so daß für diese die Strecken $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$ und $z_1, z_2, \ldots z_n$ der Formel Nr. 64 bestimmt werden können, so läßt sich jede Masse m_p eines Teiles vom Volumen v_p durch $v_p \,.\, \delta$ ersetzen. Demgemäß geht

$$x = \frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots}$$

über in

$$x = \frac{v_1 \delta x_1 + v_2 \delta x_2 + \cdots}{v_1 \delta + v_2 \delta + \cdots}$$

oder, nach Beseitigung von δ im Zähler und im Nenner, in

$$x = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots}{v_1 + v_2 + \cdots}.$$

Man gelangt also zu den Formeln:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{\Sigma v_p x_p}{\Sigma v_p}, \quad y = \frac{\Sigma v_p y_p}{\Sigma v_p}, \quad z = \frac{\Sigma v_p z_p}{\Sigma v_p} \\ p = 1, 2, \ldots n \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 112)$$

Dabei ist das Volumen V des Körpers durch Σv_p gegeben.

Dieselbe Betrachtung gilt auch für Systeme von homogenen Körpern, falls diese alle **gleiche** Dichtigkeit haben.

Als Teile von homogenen Körpern, deren Schwerpunkte bereits bekannt sind, sind zunächst Körper mit drei (oder mehreren) sich in einem Punkte schneidenden Symmetrieebenen verwendbar, namentlich das **Rechtkant**, dann auch Körper, deren Schwerpunkte mit Hülfe solcher symmetrischen Körper bereits bestimmt worden sind.

Entsprechendes gilt für die schiefe Symmetrie, z. B. für das Schiefkant.

Läßt sich der homogene Körper nicht in n Teile zerlegen, deren Schwerpunkte bereits bekannt sind, so muß man zu einer elementaren Teilung übergehen und die Abstände der Elemente von den Koordinatenebenen einführen.

Vorstehende Betrachtung gestattet, auch von den Schwerpunkten geometrischer Körper (im Gegensatz zu denen materieller Körper) zu sprechen, sie läßt sich weiter auf Flächen und Linien ausdehnen.

Legt man durch die Mitte der Höhe h eines homogenen geraden Prismas eine Ebene parallel zu der Grundfläche, so enthält diese als Symmetrieebene den Schwerpunkt des Prismas. Die der Grundfläche kongruente Figur, die auf ihr ausgeschnitten wird, soll die Mittelfläche des Prismas heißen.

Macht man nun irgend eine ebene Figur zur Mittelfläche eines homogen geraden Prismas von der Höhe h (homogene Massenbelegung der Figur), so kann man den Schwerpunkt dieses Prismas als Schwerpunkt jener ebenen Figur bezeichnen.

Demgemäß ist z. B. der Schwerpunkt eines Rechtecks (als Mittelfläche eines Rechtkants) der Schnittpunkt seiner Diagonalen und der Schwerpunkt einer Kreisfläche (als Mittelfläche eines geraden Cylinders) deren Centrum.

Zerlegt man die ebene Figur in n Teile $f_1, f_2, \ldots f_n$, so sind die zugehörigen Prismen $f_1 h, f_2 h, \ldots f_n h$, und die Formeln Nr. 112 gehen über in

$$\left.\begin{aligned} x = \frac{\Sigma f_p x_p}{\Sigma f_p}, \quad y = \frac{\Sigma f_p y_p}{\Sigma f_p}, \quad z = \frac{\Sigma f_p z_p}{\Sigma f_p} \\ p = 1, 2 \ldots n \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 113)$$

Dabei ist die Fläche selbst durch Σf_p bestimmt.

Die Zerlegung in $f_1, f_2, \ldots f_n$ muß natürlich wieder so vorgenommen werden, daß die Schwerpunkte der entstehenden Prismen bereits bekannt sind, andernfalls muß man wieder zu einer elementaren Teilung übergehen.

Um diese Betrachtung für Figuren auf krummen Flächen anwenden zu können, muß man auch diese mit einer homogenen Massenbelegung versehen denken.

Wählt man für die Massenbelegung eine Höhe h, welche verhältnismäßig klein ist gegen die Abmessungen der belegten Fläche, so gelangt man zu der Vorstellung plattenförmiger Körper oder Platten, wie sie ebene und gekrümmte Bleche veranschaulichen. Ist es erforderlich, so kann man h auch unendlich-klein denken (unendlich-dünne Platte).

Statt der hier dargestellten (prismatischen) Massenbelegung kann man auch andere Arten Massenbelegung einführen, selbstverständlich auch heterogene.

Unter dem Schwerpunkte einer Strecke soll der Schwerpunkt eines homogenen geraden Cylinders verstanden werden, dessen Achse jene Strecke ist (homogene Massenbelegung der Strecke), er liegt demnach in der Mitte der Strecke.

Für eine Gruppe von Strecken $l_1, l_2 \ldots l_n$, welche hier als Achsen homogener Cylinder von demselben Radius r und derselben Dichtigkeit δ

aufgefaßt werden, hat man in der Formel Nr. 112 $v_1 = l_1 r^2 \pi$, $v_2 = l_2 r^2 \pi, \ldots$ $v_n = l_n r^2 \pi$ zu setzen, so daß diese übergehen in

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\Sigma l_p x_p}{\Sigma l_p}, \quad y = \dfrac{\Sigma l_p y_p}{\Sigma l_p}, \quad z = \dfrac{\Sigma l_p z_p}{\Sigma l_p} \\ p = 1, 2, \ldots n \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 114)$$

Dabei bezeichnet Σl_p die Gesamtlänge der Strecken.

Um diese Betrachtung auf Kurven auszudehnen, hat man diese als Grenzgestaltungen von Streckenzügen anzusehen. Wählt man für die Massenbelegung einen Radius r, welcher verhältnismäßig klein ist gegen die Länge der belegten Linie, so gelangt man zu der Vorstellung stangenförmiger Körper oder Stangen, wie sie gerade und gekrümmte Drähte veranschaulichen.

Ist es erforderlich, so kann man r auch unendlich klein denken (unendlichdünne Stange).

Statt der dargestellten (cylindrischen) Massenbelegung kann man auch andere Arten von Massenbelegung einführen, selbstverständlich auch heterogene.

Besonders bemerkt werden mag noch, daß ein homogenes Gebilde durch Parallelprojektion im allgemeinen in ein heterogenes Gebilde übergeht, weil im allgemeinen gleichen Elementen des Gebildes nicht gleiche Elemente der Projektion entsprechen. (Wechselnde Neigungswinkel der Elemente!)

Bei homogen belegten ebenen Figuren und bei homogen belegten Strecken bleibt auch die Projektion homogen.

Der Schwerpunkt der Projektion kann natürlich (vergl. S. 411) stets durch Projektion des Schwerpunktes jedes homogenen Gebildes gewonnen werden, aber dieses Verfahren ist meist nur dann von Wert, wenn auch die Projektion homogen bleibt.

Projiziert man z. B. eine homogen belegte Halbkreislinie so, daß eine Halbellipsenlinie entsteht, so ist diese nicht homogen belegt. Da der, durch Projektion des Schwerpunktes der Halbkreislinie bestimmte Schwerpunkt der heterogen belegten Halbellipsenlinie im allgemeinen kein Interesse bietet, während dieses bei der homogen belegten Halbellipsenlinie der Fall ist, so führt die Projektion in diesem Falle zu keinem allgemein anwendbaren Ergebnisse.

Projiziert man dagegen die homogen belegte Halbkreisfläche und deren Schwerpunkt, so erhält man damit den Schwerpunkt der homogen belegten Halbellipsenfläche.

Vom Standpunkte der Geometrie aus kann man natürlich auch die Formeln Nr. 112 bis 114 selbständig aufstellen und durch sie für Körper, Flächen und Linien bestimmte zugehörige Punkte (x; y; z) bestimmen, denen man unter anderem auch den Namen „Schwerpunkt" geben kann.

Sollen diese Bestimmungen innerhalb der Mechanik benutzt werden, so hat man außerdem deren Verwendbarkeit hierfür nachzuweisen, was kaum anders möglich sein dürfte, als durch Einführung von Massenfüllungen und Massenbelegungen.

69. Die Verwendung des Schwerpunktes innerhalb der Geometrie. Die Formeln für die Bestimmung des Schwerpunktes von geometrischen Gebilden mit homogener Massenfüllung und mit homogener Massenbelegung sind rein geometrische Formeln. Deshalb läßt sich auch der Schwerpunkt bei rein geometrischen Untersuchungen gelegentlich mit Vorteil verwenden.

Wir beschränken uns hier darauf, mit Rücksicht auf die Verwendung in der Technik, folgendes hervorzuheben:

a) Die Schwerpunkte zweier ähnlicher Systeme (Körper, Flächen, Linien, Punktgruppen) sind entsprechende (homologe) Punkte, falls beide Systeme aus demselben homogenen Material hergestellt gedacht werden.

Der Beweis dieses Satzes, den schon Archimedes in gewissem Sinne benutzte, folgt für ähnlich gelegene ähnliche Systeme ohne weiteres aus den Formeln Nr. 66 bezw. aus deren Folgerungen.

b) Legt man senkrecht zu den Kanten eines schief abgeschnittenen Prismas eine Ebene (Normalschnitt), so hat sowohl dessen begrenzte Fläche f als auch die, diese begrenzende Linie (Umfang) u einen Schwerpunkt. Errichtet man in diesen beiden Schwerpunkten, welche bezw. als S_f und S_u bezeichnet werden mögen, Lote zum Normalschnitt, so schneiden die Grundflächen des Prismas auf diesen Loten Strecken ab, welche bezw. als s_f und s_u bezeichnet werden mögen.

Es gilt dann für das Volumen V des Prismas die Formel

$$V = f \, . \, s_f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 115)$$

und für den Mantel M des Prismas die Formel

$$M = u \, . \, s_u \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 116)$$

Nennt man die Strecken s_f und s_u bezw. Schwerpunktsachse der Fläche und Schwerpunktsachse des Umfanges, so hat man die Sätze:

Das Volumen eines schief abgeschnittenen Prismas ist das Produkt aus der Fläche des Normalschnittes und ihrer Schwerpunktsachse.

Der Mantel eines schief abgeschnittenen Prismas ist das Produkt aus dem Umfange des Normalschnittes und seiner Schwerpunktsachse.

Der Schwerpunkt der Fläche des Normalschnittes ist selbstverständlich die (senkrechte) Projektion der Schwerpunkte der Grundflächen. Dagegen ist der Schwerpunkt des Umfanges des Normalschnittes im allgemeinen nicht die (senkrechte) Projektion der Schwerpunkte der Umfänge der Grundflächen.

Natürlich können die beiden Schwerpunktsachsen zusammenfallen, wie es z. B. für den Kreis als Normalschnitt der Fall ist.

Die Beweise dieser Sätze finden sich in den meisten Lehrbüchern der Stereometrie.

c) Legt man durch die Achse eines Rotationskörpers eine Ebene, so bestimmt die Oberfläche des Rotationskörpers in dieser eine Fläche von bestimmter Begrenzung, für welche die Achse Symmetrale ist. Die, durch die Achse bestimmte Hälfte dieser Fläche wird Erzeugungsfläche f, die Begrenzung (Umfang) dieser Hälfte Erzeugungslinie u genannt, weil der Körper bezw.

seine Oberfläche durch eine volle Umdrehung dieser Fläche bezw. dieser Linie erzeugt werden kann.

Bezeichnet man den Achsenabstand der Schwerpunkte von f und u bezw. mit s_f und s_u, so gilt für das Volumen V des Körpers die Formel

$$V = f \,.\, 2 s_f \pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 117)$$

und für die Oberfläche O des Körpers die Formel

$$O = u \,.\, 2 s_u \pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 118)$$

Man hat also die Sätze:

Das Volumen eines Rotationskörpers ist das Produkt aus seiner Erzeugungsfläche und dem Wege ihres Schwerpunktes.

Die Oberfläche eines Rotationskörpers ist das Produkt aus seiner Erzeugungslinie und dem Wege ihres Schwerpunktes.

Legt man durch die Achse eines Rotationskörpers zwei Ebenen, welche den Winkel α bilden, so begrenzen diese in dem Körper einen keilförmigen Ausschnitt (α) vom Volumen V_α und der Oberfläche O_α. Es gilt dann

$$V_\alpha : V = \alpha : 360^0,$$

d. h.

und ebenso

$$\left.\begin{aligned} V_\alpha &= f \,.\, s_f \,.\, arc\,\alpha \\ O_\alpha &= u \,.\, s_u \,.\, arc\,\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 119)$$

V_α und O_α entsprechen der Umdrehung um α.

Obige Sätze sind zuerst von Pappus (Alexandriner um 350 n. Chr.) aufgefunden und später von Guldin (Jesuitenpater, De centro gravitatis, 1635) wieder entdeckt worden, man nennt sie deshalb die Pappus-Guldinschen Sätze.

Im übrigen gilt die Bemerkung am Schlusse von b).

d) Die Pappus-Guldinschen Sätze der Nr. c) lassen noch einige Erweiterungen zu.

Läßt man die Erzeugungsfläche bei einer gleichförmigen Erzeugung des Rotationskörpers an der Achse gleichförmig gleiten, so entsteht ein Schraubenkörper, dessen Inhalt für eine Umdrehung um α mit dem Inhalte des entsprechenden Rotationskörpers genau übereinstimmt.

Allgemein gilt: Wenn sich der Schwerpunkt einer ebenen Fläche auf einer Linie bewegt, und zwar so, daß die Fläche beim Durchlaufen jedes Linienelementes senkrecht zu dessen Projektion auf eine bestimmte Ebene steht, so ist das Volumen des erzeugten Körpers gleich dem Produkte aus der Erzeugungsfläche und der Projektion ihres Schwerpunktsweges.

Der Beweis folgt daraus, daß man durch die Projektion je zweier benachbarter Elemente der Linie je einen Kreis (Krümmungskreis) legen kann.

Ebenso gilt allgemein: Wenn sich der Schwerpunkt einer ebenen Fläche auf einer Linie bewegt und zwar so, daß die Fläche stets senkrecht zu dieser Linie steht, so ist das Volumen des erzeugten Körpers das Produkt aus der Erzeugungsfläche und dem Wege ihres Schwerpunktes.

Der Beweis folgt daraus, daß man durch je zwei benachbarte Elemente der Linie je einen Kreis (Krümmungskreis) legen kann.

70. Graphostatische Bestimmung des Schwerpunktes geometrischer Gebilde. Von den rein geometrischen Formeln für die Bestimmung des Schwerpunktes kann man auch schließlich wieder rückwärts zu den mechanischen Vorstellungen gelangen, von denen ausgegangen wurde. Es läßt sich dann eine Linie in ihrem Schwerpunkte belastet denken durch ein Gewicht, welches ihrer Länge proportional ist, ebenso eine Fläche u. s. w. Infolgedessen kann man auch die graphostatische Konstruktion mit Vorteil für die Bestimmung von Schwerpunkten verwenden. Handelt es sich z. B. um die Bestimmung des Schwerpunktes für den Umfang eines ebenen Fünfecks (Stangenpolygon), so hat man fünf Parallelkräfte den Seiten proportional in deren Mitten anzubringen und deren Resultante $[R_1]$ durch Krafteck und Seileck zu bestimmen. Dreht man die Parallelkräfte um einen beliebigen Winkel (z. B. 90°) um die Mitten der Seiten, so erhält man für die neue Lage eine zweite Resultante $[R_2]$. Der gesuchte Schwerpunkt liegt im Schnittpunkte von $[R_1]$ und $[R_2]$.

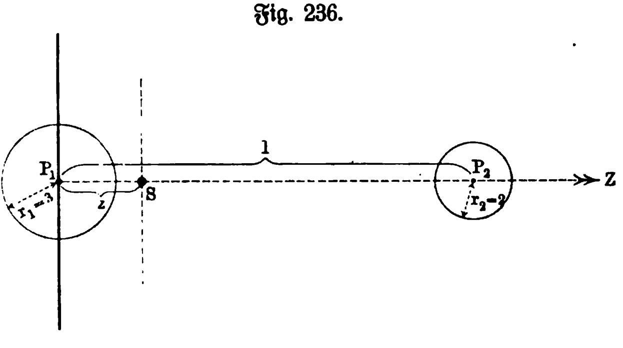
Handelt es sich um die Fläche des Fünfecks, so zerlegt man diese in drei Dreiecke und bringt in deren Schwerpunkten Parallelkräfte an, proportional den Dreiecksflächen u. s. w.

Da man Kurven und Flächen mit beliebiger Annäherung in Streckenzüge und Dreiecksnetze zerlegen kann, so ist obige Methode von weittragender Anwendbarkeit.

71. Schwerpunktsbestimmungen für Systeme einzelner materieller Punkte. Handelt es sich um einzelne materielle Punkte, so sind diese entweder als Atome oder als dynamische Centren aufzufassen, so daß sie in letzterem Falle z. B. als Mittelpunkte homogener Kugeln angesehen werden können.

a) Das System zweier Punkte. Der Schwerpunkt liegt auf der Verbindungsgeraden der Punkte P_1 und P_2 (vergl. Fig. 236). Wählt man diese als Z-Achse, so ist von den Formeln Nr. 64 nur die Gleichung für z erforderlich. Läßt man den Nullpunkt der Z-Achse mit P_1 zusammenfallen, so daß bei einem rechtwinkligen Kreuze die XY-Ebene in P_1 senkrecht auf der Ebene der Zeichnung steht, und zwar senkrecht zu P_1Z, so ist $z_1 = 0$ und $z_2 = l$. Für die Massen m_1 und m_2 hat man also

Fig. 236.



$$z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \,.\, 0 + m_2 \,.\, l}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot l.$$

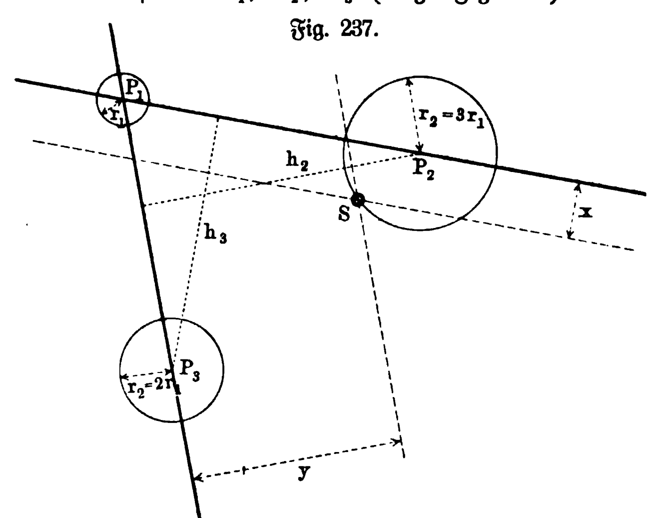
Für $m_1 : m_2 = 27 : 8$ ist z. B. $z = \frac{8}{35} l$, d. h. in diesem Falle liegt der gesuchte Schwerpunkt S auf $P_1 P_2$ und teilt dieses im umgekehrten

Massenverhältnis (vergl. S. 236) 8 : 27. Diesen Fall stellt Fig. 236 dar. Ist m_1 die Masse der Erde und m_2 die Masse des Mondes, so ist angenähert $m_1 : m_2 = 80 : 1$, d. h. man hat $x = \frac{1}{81} l$. Da der Radius der Erde angenähert $\frac{1}{60} l$ ist, so liegt der Schwerpunkt S von Erde und Mond noch innerhalb des Erdkörpers.

Für $m_1 = m_2$ rückt S natürlich in die Mitte von $P_1 P_2$.

b) Das System dreier Punkte. Der Schwerpunkt liegt in der Ebene der Punkte P_1, P_2, P_3 (vergl. Fig. 237). Wir bestimmen zunächst den Abstand des Schwerpunktes S von der Geraden $P_1 P_2$, die wir als Schnitt einer senkrecht auf der Ebene der Zeichnung stehenden Ebene mit dieser auffassen. Die (senkrechten) Abstände für P_1, P_2, P_3, denen bezw. die Massen m_1, m_2, m_3 zukommen mögen, sind dann bezw. 0, 0, h_3, so daß sich der (senkrechte) Abstand des Schwerpunktes S von $P_1 P_2$ bestimmt als

Fig. 237.



$$x = \frac{0 \cdot m_1 + 0 \cdot m_2 + h_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot h_3.$$

Ebenso ist der (senkrechte) Abstand des Schwerpunktes S von $P_1 P_3$ gegeben als

$$y = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot h_2.$$

Die Parallelen zu $P_1 P_2$ und $P_1 P_3$ bezw. in den Abständen x und y bestimmen die Lagen von S, dessen (senkrechter) Abstand von $P_2 P_3$ natürlich den Wert

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot h_1$$

hat.

Für $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 27 : 8$ ist $x = \frac{2}{9} h_3$ und $y = \frac{3}{4} h_2$, während der Abstand von $P_2 P_3$ den Wert $\frac{1}{36} h_1$ hat. Diesen Fall stellt Fig. 237 dar.

Für $m_1 = m_2 = m_3$ ist S der Schnittpunkt der Mittellinien für das Dreieck $P_1 P_2 P_3$, weil z. B. der Schwerpunkt C von P_1 und P_2 in die Mitte von $P_1 P_2$ rückt und S demnach auf $C P_3$ liegen muß. Teilungsverhältnis der Strecken 1 : 2.

c) **Das System von vier Punkten, die nicht in einer Ebene liegen.** Bezeichnet man in dem Tetraeder $P_1 P_2 P_3 P_4$, welches die vier Punkte bestimmen, die vier Höhen bezw. mit h_1, h_2, h_3, h_4, so gilt für die (senkrechten) Abstände von der Ebene $P_2 P_3 P_4$

$$x_1 = h_1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$$

und man hat also

$$x = \frac{h_1 \,.\, m_1 + 0 \,.\, m_2 + 0 \,.\, m_3 + 0 \,.\, m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \cdot h_1.$$

Ebenso gilt für die (senkrechten) Abstände von der Ebene $P_1 P_3 P_4$

$$y_1 = 0,\ y_2 = h_2,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0$$

und man hat also

$$y = \frac{0 \,.\, m_1 + h_2 \,.\, m_2 + 0 \,.\, m_3 + 0 \,.\, m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \cdot h_2.$$

Endlich gilt für die (senkrechten) Abstände von der Ebene $P_1 P_2 P_4$

$$z_1 = 0,\ z_2 = 0,\ z_3 = h_3,\ z_4 = 0$$

und man hat also

$$z = \frac{0 \,.\, m_1 + 0 \,.\, m_2 + h_3 \,.\, m_3 + 0 \,.\, m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \cdot h_3.$$

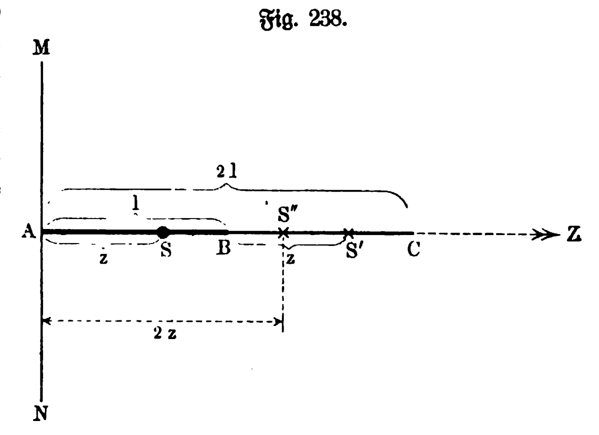
Die Parallelebenen zu den Ebenen $P_2 P_3 P_4$, $P_1 P_3 P_4$, $P_1 P_2 P_4$ bezw. in den Abständen x, y, z bestimmen die Lage von S, dessen senkrechter Abstand von $P_1 P_2 P_3$ natürlich den Wert $\frac{m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \cdot h_4$ hat.

Für $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ liegt S in dem Schnittpunkte der vier Strecken, von denen eine die Verbindungsstrecke von P_1 mit dem Schnittpunkte der Mittellinien des Dreiecks $P_2 P_3 P_4$ ist. Teilungsverhältnis der Strecken 1 : 3.

Die Beispiele a), b), c) zeigen deutlich, wie eine einmalige, eine zweimalige und eine dreimalige Anwendung des Momentensatzes nötig wird.

Anstatt im Falle b) und c) die senkrechten Abstände zu benutzen, wobei die eingeführten Ebenen voneinander unabhängig bleiben, hätte man auch schiefwinklige Koordinatensysteme einführen können.

Fig. 238.



72. Schwerpunktsbestimmungen für Linien. a) **Die homogen belastete Strecke.** Daß der Schwerpunkt in der

Mitte liegt, folgt auch aus dem Momentensatz im Verein mit der Bemerkung über ähnliche Systeme. Legt man durch die Strecke AB von der Länge l, wie Fig. 238 (a. v. S.) zeigt, die Z=Achse und zwar so, daß die XY=Ebene in MN senkrecht auf der Ebene der Zeichnung steht, so hat der Schwerpunkt S von l irgend einen Abstand z von MN. Verlängert man nun l um sich selbst, so hat der Schwerpunkt der Verlängerung BC von MN den Abstand $l + z$. Da die Strecke $2l$ aber der Strecke l ähnlich ist, nach dem Modul $2 : 1$, so hat der Schwerpunkt S'' dieser Strecke von MN den Abstand $2z$. Nach dem Momentensatze gilt nun:

$$l \, . \, z + l(l + z) = 2l \, . \, 2z,$$

d. h.

$$2lz = l^2 \quad \text{oder} \quad z = \tfrac{1}{2}l.$$

b) Die heterogen belastete Strecke. Bei der homogen belasteten Strecke ist jedes Element derselben gleich belastet. Wir wollen jetzt annehmen, daß jedes Element der Strecke AB proportional (γ) seinem Abstande von dem einen Endpunkte A der Strecke belastet ist. Teilt man die Strecke l in n gleiche Teile λ, die man vom Endpunkte A ab zählt, so hat der Anfangspunkt der p=ten Strecke den Abstand $(p-1)\lambda$ und die Belastung $(p-1)\lambda\gamma$. Bestimmt man den Abstand z des Schwerpunktes der Anfangspunkte der n Strecken, so hat man

$$z_1 = 0, \; z_2 = \lambda, \quad z_3 = 2\lambda, \quad \ldots \; z_n = (n-1)\lambda$$
$$m_1 = 0, \; m_2 = \lambda\gamma, \; m_3 = 2\lambda\gamma, \; \ldots \; m_n = (n-1)\lambda\gamma$$

und

$$z = \frac{0 + \lambda^2\gamma + 4\lambda^2\gamma + \cdots (n-1)^2\lambda^2\gamma}{0 + \lambda\gamma + 2\lambda\gamma + \cdots (n-1)\lambda\gamma}$$
$$= \frac{\lambda^2\gamma[1 + 4 + \cdots (n-1)^2]}{\gamma\lambda(1 + 2 + \cdots n - 1)}$$
$$= \lambda \cdot \frac{\dfrac{(n-1) \, . \, n \, . \, (2n-1)}{6}}{\dfrac{n(n-1)}{2}} = \frac{\lambda}{3}(2n-1) = \tfrac{2}{3}l\left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

Für die Endpunkte der n Strecken erhält man ebenso

$$z' = \tfrac{2}{3}l\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Für $\lim n = \infty$ hat man $z = z' = \frac{2}{3}l$, d. h. der Schwerpunkt der heterogenen Strecke hat den Abstand $\frac{2}{3}l$ vom Ende A.

Will man sich diese Belastung veranschaulichen, so kann man irgend ein Dreieck über AB zeichnen, wie es Fig. 239a zeigt. Für P ist dann $P'P$ ein Bild seiner Belastung, denn man hat $P'P = \frac{B'B}{AB} \cdot AP = AP \, . \, \gamma$ für $\frac{B'B}{AB} = \gamma$.

Zweckmäßiger ist es noch, zwei Dreiecke zu benutzen, wie es Fig. 239 b zeigt, so daß AB Mittellinie wird, und nun die Fläche $AB'B''$ als Mittelfläche eines homogenen Prismas anzusehen.

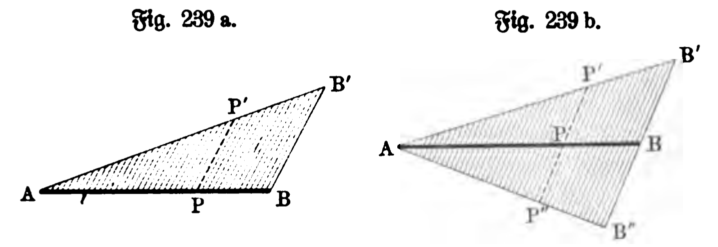


Fig. 239 a. Fig. 239 b.

Ist jedes Element der Strecke AB proportional zum Quadrate seines Abstandes von dem einen Endpunkte A belastet, so erhält man ebenso für $\lim n = \infty$

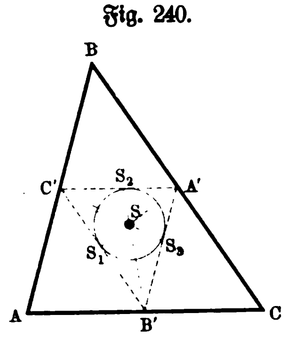
$$z = z' = \frac{3}{4} l.$$

Hier veranschaulicht man sich die Belastung am besten durch eine Pyramide, deren Spitze A ist, während man B zum Schwerpunkt ihrer Grundfläche nimmt. Vergl. hierzu die Anwendung Nr. 2.

c) Streckenzüge aus unter sich homogenen Strecken. Für homogene regelmäßige Vielecke (Stangenvielecke) liegt der Schwerpunkt in dem Mittelpunkte der zugehörigen Kreise (Symmetrie), ebenso ist der Mittelpunkt der homogenen Kreislinie deren Schwerpunkt.

Für ein beliebiges homogenes Dreieck (Stangendreieck) liegt der Schwerpunkt jeder Seite in der Mitte und ist dieser proportional belastet, so daß hier der Schwerpunkt eines Systemes von drei materiellen Punkten zu bestimmen ist. Man hat also für die Punkte A', B', C' der Fig. 240 bezw. die Masse $a\gamma$, $b\gamma$, $c\gamma$ anzusetzen. Der Schwerpunkt S_1 von B' und C' liegt auf $B'C'$ und teilt dieses im umgekehrten Massenverhältnisse, also im Verhältnisse $c : b$. Da $A'B' = \frac{1}{2}c$ und $A'C' = \frac{1}{2}b$, so ist $A'B' : A'C' = B'S_1 : C'S_1$, d. h. $A'S_1$ ist Winkelhalbierende für $\measuredangle\, B'A'C'$. Der gesuchte Schwerpunkt S liegt also auf den drei Winkelhalbierenden für $\triangle\, A'B'C'$, welches auch Mediandreieck von $\triangle\, ABC$ genannt wird, d. h. er ist für dieses Dreieck der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises. Zu demselben Ergebnisse führen die Formeln des § 71b. Es ist hier $x = \frac{c}{a+b+c} \cdot h_c'$,

Fig. 240.



falls man die Höhe aus C' auf $A'B'$ durch h_c' bezeichnet, welche $\frac{1}{2} h_c$ ist, und demnach ist $x = \frac{\frac{1}{2} c h_c}{a+b+c} = \frac{\text{Dreiecksfläche}}{\text{Umfang}}$; derselbe Wert ergiebt sich für y, so daß S von $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ denselben Abstand hat.

Bei der Behandlung ebener homogener Stangenvielecke leistet die folgende Betrachtung oft gute Dienste.

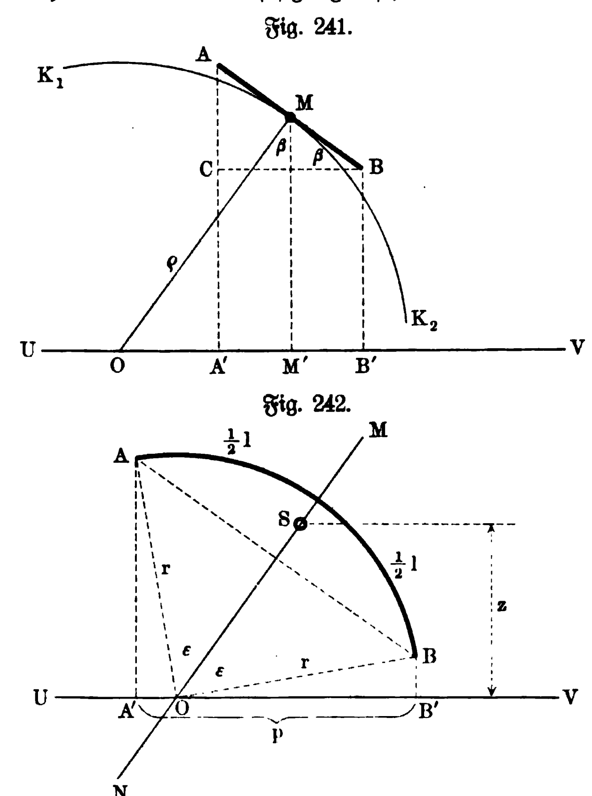
Bezeichnet UV eine Achse in der Ebene des Stangenvielecks, so ist das Moment einer Stange AB (vergl. Fig. 241) in Bezug auf die Ebene, senkrecht zur Ebene der Zeichnung in UV, zunächst bei einer Belastung γ der Längeneinheit

$$m = (AB \,.\, \gamma) \,.\, MM'.$$

Errichtet man für AB das Mittellot MO und projiziert man ferner AB auf UV, so ist, falls noch $BC // UV$ gezogen wird, $\triangle ABC \sim \triangle OMM'$ und man hat $BC : AB = MM' : OM$ oder $BC \,.\, OM = AB \,.\, MM'$. Demnach gilt auch

$$m = \gamma \,.\, BC \,.\, OM = \gamma \,.\, A'B' \,.\, OM.$$

Diese Betrachtung wird z. B. von Bedeutung, wenn für mehrere Strecken, nachdem einmal UV festgelegt ist, die Strecke OM denselben Wert erhält, weil sich dann in der Summe ihrer Momente der Faktor $\gamma \,.\, OM$ abspalten läßt, so daß die Summe ihrer Projektionen auf UV in die Klammer tritt.



Für einen homogenen regelmäßigen Streckenzug, welcher ein Teil eines homogenen regelmäßigen Vielecks sein kann, aber nicht ein solcher zu sein braucht, legt man UV durch das zugehörige Kreiscentrum, so daß OM nun den Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises bedeutet. Es ist dann die Summe der Momente der einzelnen Strecken $\gamma \cdot \varrho \,.\, p$, falls man unter p die Projektion des Streckenzuges bezw. der schließenden Sehne auf UV versteht.

Schneidet UV den Streckenzug, so muß auf die Vorzeichen der Momente bezw. der Projektionen geachtet werden.

Da dem Streckenzuge von der Länge l die Belastung $l\gamma$ entspricht, so ist nach dem Momentensatze der Abstand seines Schwerpunktes von UV bestimmt als

$$z = \frac{\gamma \cdot \varrho \cdot p}{\gamma \,.\, l} = \frac{\varrho \cdot p}{l}.$$

Die Parallele zu UV im Abstande z bestimmt mit der Symmetralen des Streckenzuges dessen Schwerpunkt.

Diese Betrachtung gilt auch noch für den Kreisbogen vom Radius r als Grenzgestalt des regelmäßigen Streckenzuges. In Fig. 242 bestimmt die Symmetrale MN des Bogens und die Parallele im Abstande $z = \frac{r \cdot p}{l}$ zu UV den Schwerpunkt S.

Für die in Fig. 243 gezeichnete Lage, in der die Symmetrale und UV aufeinander senkrecht stehen, ist p zugleich die Sehne des Bogens, so daß

$$p = 2r \cdot \sin \varepsilon$$

Fig. 243.

ist. Man hat also, da $\frac{1}{2} l = r \cdot \operatorname{arc} \varepsilon$ ist, hier

$$z = \frac{r \cdot \sin \varepsilon}{\operatorname{arc} \varepsilon} = OS. \qquad 120)$$

Für den Halbkreis ist $\varepsilon = 90^0$ und $\operatorname{arc} \varepsilon = \frac{\pi}{2}$, d. h. $z = \frac{2}{\pi} \cdot r$, also angenähert $\frac{2}{3} r$ oder genauer $\frac{7}{11} r$.

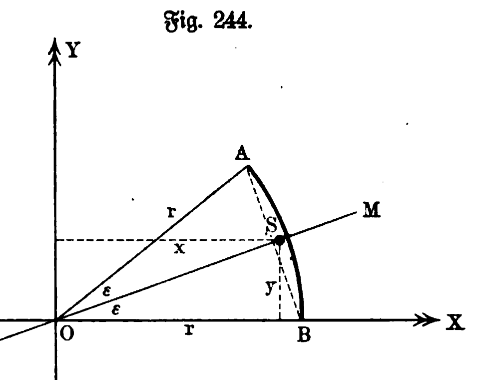
Für den vollen Kreis ist $\varepsilon = 180^0$ und $z = 0$.

Für die in Fig. 244 gezeichnete Lage ist

$$x = OS \cdot \cos \varepsilon = r \cdot \frac{\sin 2\varepsilon}{\operatorname{arc} 2\varepsilon}$$

$$y = OS \cdot \sin \varepsilon = r \cdot \frac{\sin^2 \varepsilon}{\operatorname{arc} \varepsilon}.$$

Fig. 244.



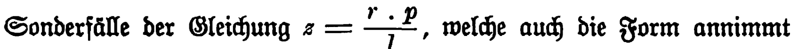
Diese Gleichungen lassen sich auch schreiben

$$r \operatorname{arc} 2\varepsilon : r \sin 2\varepsilon = r : x$$

und

$$r \operatorname{arc} 2\varepsilon : r(1 - \cos 2\varepsilon) = r : y.$$

So erscheinen sie als



Sonderfälle der Gleichung $z = \frac{r \cdot p}{l}$, welche auch die Form annimmt

$$l : p = r : z,$$

d. h.

$$\text{Bogen : Projektion des Bogens = Radius : Schwerpunktsabstand}. \qquad 121)$$

Sieht man in Fig. 243 UV als Drehungsachse an, so beschreibt l eine Kugelzone von der Höhe p, deren Oberfläche also $2r\pi \cdot p$ ist. Nach dem

einen der Pappus-Guldinschen Sätze gilt dann, da hier l die Erzeugungslinie und z deren Schwerpunktsabstand ist,

$$2 r\pi \,.\, p = 2 z\pi \,.\, l,$$

d. h.

$$z = \frac{r \,.\, p}{l}.$$

Der Schwerpunkt des Kreisbogens hat von seinem Scheitel auf der Symmetralen den Abstand $z' = r - r \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\operatorname{arc} \varepsilon}$. Für $\operatorname{arc} \varepsilon = a$ ist $\sin \varepsilon = a - \frac{a^3}{6} \pm \cdots$, so daß $z' \sim r \cdot \frac{a^2}{6}$ ist. Da die Höhe h des Kreisbogens durch $r - r \cos \varepsilon$ gegeben ist, so erhält man die Beziehung $h \sim r \cdot \frac{a^2}{2}$ für $\cos \varepsilon = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} \mp \cdots$ Demnach ist $z' \sim \frac{h}{3}$.

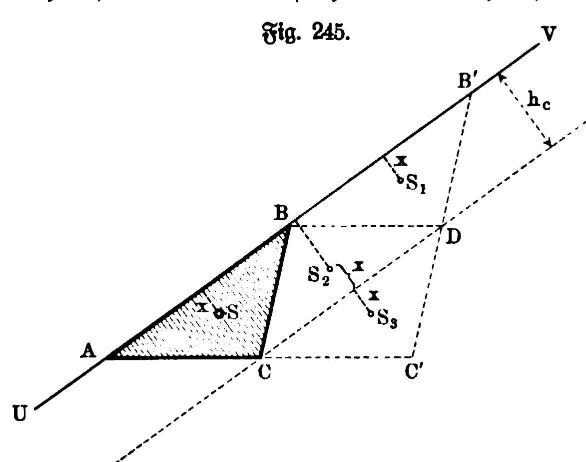
Die Schwerpunkte der Bogen bestimmter (ebener oder gewundener) Kurven sind im allgemeinen schwer zu bestimmen, doch kann man sie stets in beliebiger Genauigkeit durch Streckenzüge ersetzen und deren Schwerpunkte feststellen.

73. **Schwerpunktsbestimmungen für Flächen.** Für die Rechtecksfläche (Symmetrie) und für die Fläche des Parallelogramms (schiefe Symmetrie) ist die Lage des Schwerpunktes ohne weiteres gegeben, ebenso für die Flächen der regelmäßigen Vielecke, für die Kreisfläche und für die Fläche der Ellipse, vorausgesetzt, daß es sich dabei stets um homogene Belegungen handelt.

Da alle Flächen, gegebenen Falles bei elementarer Teilung, in Dreiecke zerlegt werden können, so spielt die Behandlung der Dreiecksfläche eine hervorragende Rolle.

a) Der Schwerpunkt der homogenen Dreiecksfläche. Daß der Schwerpunkt der Dreiecksfläche in dem Schnittpunkte ihrer Mittellinien liegt, folgt schon aus § 72 b. Man kann das Ergebnis auch gewinnen, indem man die Fläche parallel zu einer Seite in Streifen von gleicher Breite teilt und die Schwerpunkte der Streifen für eine unendlich-kleine Breite feststellt (Mittellinie).

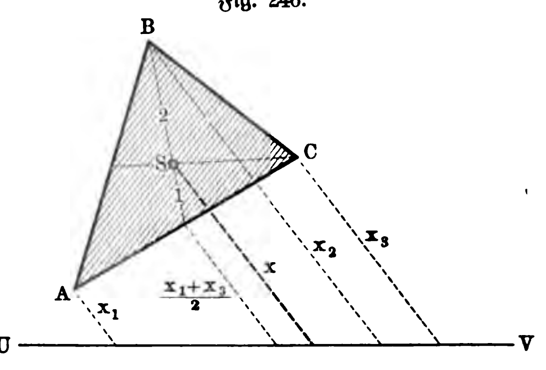
Fig. 245.



Am besten leitet man das Ergebnis wieder durch den Momentensatz her in Verbindung mit der Bemerkung über ähnliche Systeme.

Vergrößert man das Dreieck ABC, wie Fig. 245 zeigt, im Linearverhältnis 1 : 2, so daß $\triangle AB'C'$ entsteht, so zerfällt dieses Dreieck durch die Parallelen BD und CD bezw. zu AC und AB in vier kongruente Dreiecke. Hat der Schwerpunkt von $\triangle ABC$ von UV den Abstand x, so gilt das auch für $\triangle BB'D$, während die betreffenden Abstände für $\triangle CBD$ und $\triangle CDC'$ bezw. $h_c - x$ und $h_c + x$ sind. Da der Schwerpunkt des Dreiecks $AB'C'$ von UV den Abstand $2x$ hat, so gilt, falls die Fläche eines Teildreiecks mit f bezeichnet wird, nach dem Momentensatze

Fig. 246.



$$f \cdot x + f \cdot x + f(h_c - x) + f(h_c + x) = 4f \cdot 2x$$

d. h.

$$2fx + 2fh_c = 8fx \quad \text{oder} \quad 6fx = 2fh_c \quad \text{oder} \quad x = \tfrac{1}{3}h_c.$$

Demnach ist S von AB, BC, CA bezw. um $\frac{1}{3}h_c$, $\frac{1}{3}h_a$, $\frac{1}{3}h_b$ entfernt, d. h. er ist der Schnittpunkt der drei Mittellinien.

Zieht man von den Ecken eines Dreiecks und von dessen Schwerpunkte Parallelen (Koordinaten) nach einer Geraden, so ist (vergl. Fig. 246)

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 122)$$

Man hat für die Mittellinie aus B, welche durch S im Verhältnisse 2 : 1 geteilt wird, die Endkoordinaten x_2 und $\frac{x_1 + x_3}{2}$. Vergl. dazu ferner S. 237.

Sind die (rechtwinkligen) Koordinaten der Ecken eines Dreiecks $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, so ist dessen Fläche F gegeben durch

$$2F = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 123)$$

Mit vorstehenden Formeln läßt sich jede ebene Fläche, welche in Dreiecke von bekannter Lage zerlegt ist, behandeln.

b) **Der Schwerpunkt des homogenen Trapezes.** Teilt man das Trapez in zwei Dreiecke (vergl. Fig. 247 a. f. S.), welche die Schwerpunkte S_1 und S_2 haben, so ist S_1 mit der Fläche $\frac{ah}{2}$ und S_2 mit der Fläche $\frac{bh}{2}$ belastet, so daß für S in Bezug auf UV gilt

$$\frac{ah}{2} \cdot x_1 + \frac{bh}{2} \cdot x_2 = \left(\frac{ah}{2} + \frac{bh}{2}\right) \cdot x.$$

Da $x_1 = \frac{1}{3}h$ und $x_2 = \frac{2}{3}h$ ist, so ist

$$x = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}.$$

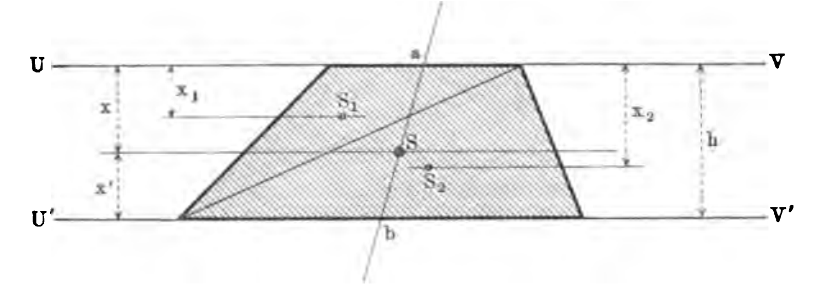
Ebenso ergiebt sich für $U'V'$

$$x' = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b}.$$

Es ist also

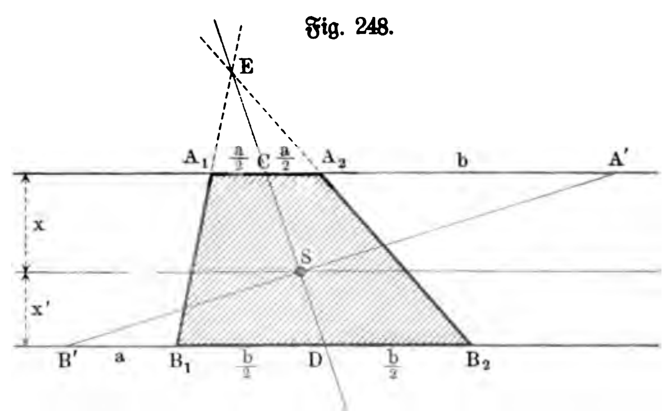
$$x : x' = (\tfrac{1}{2}a + b) : (a + \tfrac{1}{2}b) \quad \ldots\ldots \quad 124)$$

Fig. 247.



Ergänzt man das Trapez zu einem Dreiecke, so liegen (vergl. Fig. 248) die Schwerpunkte von $\triangle\ EB_1B_2$ und von $\triangle\ EA_1A_2$ bezw. auf den Mittellinien ED und EC, so daß ED auch für das Trapez Schwerlinie ist.

Fig. 248.



Trägt man a an $\frac{b}{2}$ und b an $\frac{a}{2}$, wie es Fig. 248 zeigt, so ist $CA' = \frac{a}{2} + b$ und $DB' = \frac{b}{2} + a$ und demnach gilt für den Schnittpunkt S von ED und $B'A'$

$$CS : SD = \left(\frac{a}{2} + b\right) : \left(a + \frac{b}{2}\right).$$

d. h. S ist der Schwerpunkt des Trapezes.

Diese Konstruktion von S beansprucht viel Platz. Gedrängter ist die Landsche Konstruktion, welche Fig. 249 darstellt. Man hat $A_1E//A_2B_2$, $B_1F = \frac{1}{3}B_1E = \frac{b-a}{3}$, $FG//B_1A_2$. Der Schnitt von FG und CD ist S.

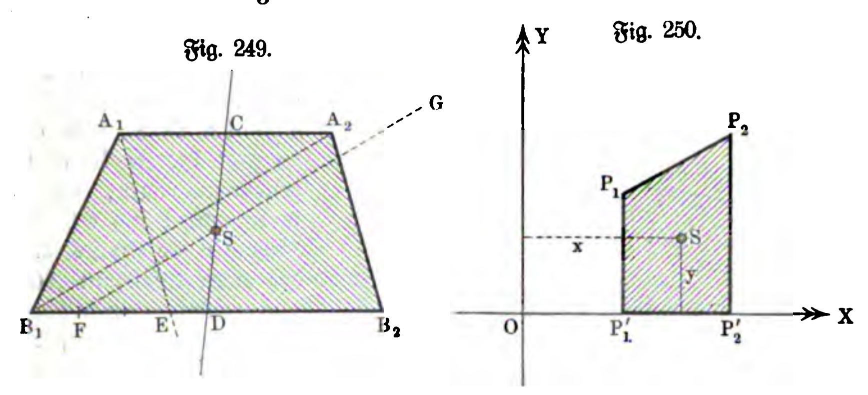


Fig. 249. Fig. 250.

Bei der Zerlegung geradliniger Figuren kann man in Bezug auf ein Koordinatenkreuz Trapeze bilden, wie das in Fig. 250 dargestellte. Für $P_1 = (x_1;\ y_1)$ und $P_2 = (x_2;\ y_2)$ sind dann

$$x = \frac{1}{3}\,\frac{y_1(2x_1 + x_2) + y_2(x_1 + 2x_2)}{y_1 + y_2}$$

und

$$y = \frac{1}{3}\,\frac{y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2}{y_1 + y_2}$$

die Koordinaten des Schwerpunktes S.

Der Beweis der Landschen Konstruktion und der Formeln für x und y folgt aus der oben gegebenen Hauptkonstruktion.

c) **Der Schwerpunkt des homogenen Vierecks.** Teilt man das Viereck nach der einen Diagonale, so ist die Verbindungslinie der Schwerpunkte dieser Dreiecke Schwerlinie des Vierecks. Entsprechendes gilt für die andere Diagonale. Der Schnittpunkt beider Schwerlinien ist der gesuchte Schwerpunkt des Vierecks.

Wir fügen noch die Landsche Konstruktion hinzu, die sich natürlich auch auf Trapeze anwenden läßt (vergl. Fig. 251). Man hat: $A_1E//B_1A_2$ und $A_2E//B_2A_1$; $B_1F = FG = GB_2$; $FS//B_1E$ und $GS//B_2E$.

Fig. 251.

d) **Der Schwerpunkt homogener Vielecke und beliebig begrenzter ebener Figuren.** Man zerlegt diese in Dreiecke bezw. in Dreiecke und Trapeze und behandelt das System der Teilflächen entweder

durch den Momentensatz mit Beziehung auf Koordinaten oder graphostatisch. Angenähert läßt sich dieses Verfahren auch auf ebene Figuren von beliebiger Begrenzung anwenden.

e) **Der Schwerpunkt des homogenen Kreisausschnittes.** Verbindet man zwei Punkte A und B (vergl. Fig. 252) des begrenzenden Bogens durch die Sehne AB, so liegt der Schwerpunkt von $\triangle\ OAB$ in S', falls $OS' = \frac{2}{3}\,OC$ ist. Je kleiner AB genommen wird, um so mehr nähert sich OC dem Radius r des Kreises, d. h. für einen Ausschnitt AOB mit unendlich-kleinem Bogen AB ist S' Schwerpunkt, falls $OS' = \frac{2}{3}r$ ist. An der Grenze darf der Ausschnitt AOA' angesehen werden als ein System von Ausschnitten mit unendlich-kleinen Bögen. Die Schwerpunkte dieser Ausschnitte liegen auf dem, in Fig. 252 rechts angedeuteten Bogen DE mit dem Radius $\frac{2}{3}r$, welcher durch das System der unendlich-kleinen Ausschnitte homogen belastet wird. Demnach stimmt der Schwerpunkt des Ausschnitts AOA' überein mit dem Schwerpunkte dieses Bogens, für den

$$y = \frac{2}{3}r\,\frac{\sin\varepsilon}{\operatorname{arc}\varepsilon} \qquad 125)$$

ist, falls OY die Symmetrale des Ausschnittes bezw. Bogens darstellt.

Fig. 252.

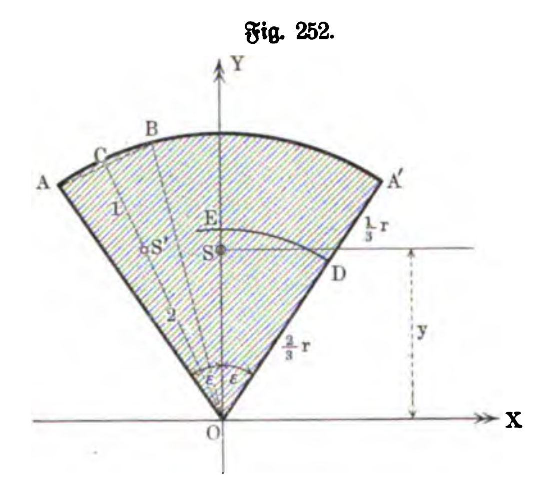
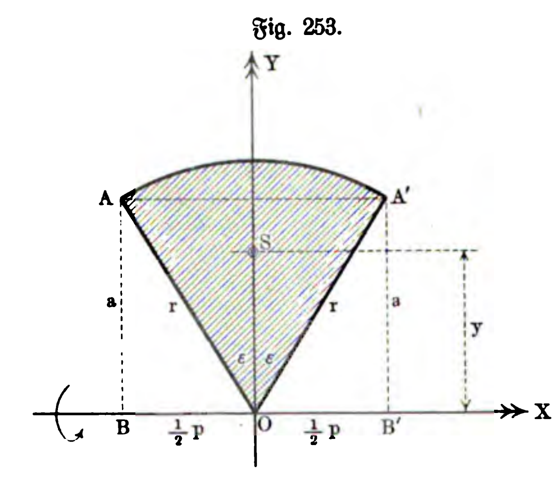


Fig. 253.



Dasselbe Ergebnis folgt auch aus einem der Pappus-Guldinschen Sätze. Bei der Drehung des Ausschnittes um OX als Achse beschreibt (vergl. Fig. 253) die Fläche $BAA'B'$ eine Kugelschicht vom Volumen $a^2p\pi + \frac{1}{6}p^3\pi$.

Die Flächen AOB und $A'OB'$ beschreiben für sich je einen Kegel vom Volumen $\frac{1}{6}a^2p\pi$, so daß der Körper, welchen der Ausschnitt beschreibt, das Volumen hat

$$V = a^2p\pi + \tfrac{1}{6}p^3\pi - \tfrac{1}{3}a^2p\pi = \tfrac{2}{3}a^2p\pi + \tfrac{1}{6}p^3\pi.$$

Für $a = r \cos \varepsilon$ und $p = 2 r \sin \varepsilon$ erhält man

$$V = \tfrac{4}{3} r^3 \pi \sin \varepsilon.$$

Da die Fläche des Ausschnittes $r^2 \operatorname{arc} \varepsilon$ ist, so liefert jener Satz die Gleichung

$$(r^2 \operatorname{arc} \varepsilon)\,(2 y \pi) = \tfrac{4}{3} r^3 \pi \sin \varepsilon,$$

d. h.

$$y = \tfrac{2}{3} r \frac{\sin \varepsilon}{\operatorname{arc} \varepsilon}.$$

Für $\varepsilon = 90^0$ wird der Ausschnitt ein Halbkreis, so daß für diesen gilt

$$y = \frac{4}{3\pi} r,$$

d. h. angenähert $\frac{4}{9} r$ und genauer $\frac{14}{33} r$.

Für $\varepsilon = 180^0$ wird der Ausschnitt ein voller Kreis und man erhält $y = 0$.

f) **Der Schwerpunkt des homogenen Ringstückes.** Wird aus einem Ausschnitt vom Radius r_1 ein konzentrischer Ausschnitt vom Radius r_2 herausgenommen, so bleibt ein Ringstück übrig.

Bezeichnet man, Fig. 253 entsprechend, die Schwerpunktsabstände der beiden Ausschnitte bezw. mit y_1 und y_2 und den des Ringstückes mit y, die zugehörigen Flächen bezw. mit F_1, F_2 und F, so ist nach dem Momentensatze

$$F_1 y_1 = F_2 y_2 + F y,$$

d. h.

$$\frac{F_1 y_1 - F_2 y_2}{F} = y.$$

Für $F_1 = r_1^2 \operatorname{arc} \varepsilon$, $F_2 = r_2^2 \operatorname{arc} \varepsilon$, $F = F_1 - F_2$, $y_1 = \frac{2}{3} r_1 \frac{\sin \varepsilon}{\operatorname{arc} \varepsilon}$, $y_2 = \frac{2}{3} r_2 \frac{\sin \varepsilon}{\operatorname{arc} \varepsilon}$ erhält man

$$y = \tfrac{2}{3} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\operatorname{arc} \varepsilon} = \tfrac{2}{3} \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\operatorname{arc} \varepsilon}.$$

g) **Der Schwerpunkt des homogenen Kreisabschnittes.** Zerlegt man den Ausschnitt in Fig. 253 in den Abschnitt über AA' und in das Dreieck OAA', so läßt sich der Momentensatz anwenden. Die Flächen von Ausschnitt und Dreieck seien bezw. F_1 und F_2, die Fläche des Abschnittes $F = F_1 - F_2$, die entsprechenden Schwerpunktsabstände bezw. y_1, y_2 und y. Man hat dann wieder

$$\frac{F_1 y_1 - F_2 y_2}{F} = y.$$

Für $F_1 = r^2 \operatorname{arc} \varepsilon$, $F_2 = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\varepsilon$ und $F = F_1 - F_2$, $y_1 = \frac{2}{3} r \frac{\sin \varepsilon}{\operatorname{arc} \varepsilon}$, $y_2 = \frac{2}{3} r \cos \varepsilon$ erhält man

$$y = \frac{r^3}{3} \frac{(2 \sin \varepsilon - \sin 2\varepsilon \,.\, \cos \varepsilon)}{F} = \tfrac{2}{3} \frac{r^3 \sin^3 \varepsilon}{F} = \frac{(2 r \sin \varepsilon)^3}{12 F}.$$

Da die Sehne AA' in Fig. 253 den Wert $2 r \sin \varepsilon$ hat, so ist

$$y = \frac{\overline{AA'}^3}{12 F} = \frac{p^3}{12 F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 126)$$

Dabei ist $F = \frac{r^2}{2} (arc\, 2\varepsilon - \sin 2\varepsilon)$.

Die Formel gilt auch für stumpfe ($\varepsilon > 90^0$) Abschnitte.

Geht man von dem Rotationskörper der Nr. e) aus, so ist das Volumen des Cylinders $a^2 p \pi$ abzuziehen, welches der Fläche $BAA'B'$ entspricht, so daß das Volumen des von dem Kreisabschnitte erzeugten Körpers den Wert hat:

$$V = (a^2 p \pi + \tfrac{1}{6} p^3 \pi) - a^2 p \pi = \tfrac{1}{6} p^3 \pi.$$

Man hat also

$$F \cdot (2 y \pi) = \tfrac{1}{6} p^3 \pi,$$

d. h.

$$y = \frac{p^3}{12 F}.$$

Für $\varepsilon = 90^0$ gelangt man wieder zum Halbkreis, für $\varepsilon = 180^0$ zum vollen Kreis.

h) Weitere Verwendung der Nr. e, f, g. Ist der Schwerpunktsabstand x einer ebenen Figur in Bezug auf eine Achse UV bestimmt worden, so kann man aus der Figur unzählig-viele neue ableiten, für welche sich x in Bezug auf UV nicht ändert. Schneidet man zunächst die Figur, parallel zu UV, durch ein System von Geraden und verlängert man oder verkürzt man ferner jede Strecke dieses Systems, wie es Fig. 254 zeigt, in demselben Verhältnis ε, so entsteht eine neue Figur, für welche der Schwerpunktsabstand x in Bezug auf UV wieder den alten Wert hat. Zerlegt man nämlich beide Figuren in elementare Flächenstreifen, parallel zu UV, so sind

Fig. 254.

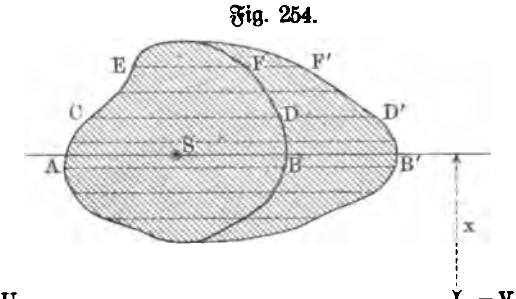
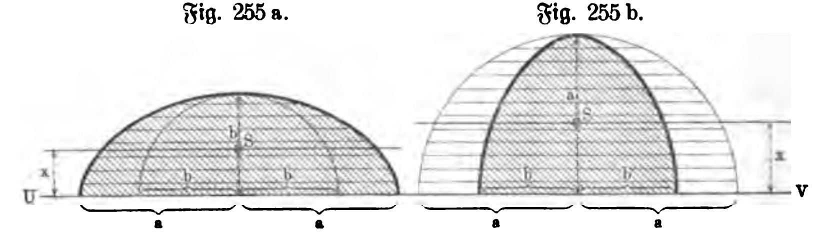


Fig. 255 a. Fig. 255 b.



in der Formel des Momentensatzes im Zähler und im Nenner für die zweite Figur die Größen $f_1 \varepsilon$, $f_2 \varepsilon$, . . . einzusetzen, wenn für die erste Figur die Größen f_1, f_2 . . . zur Verwendung kommen.

Da außerdem auch eine Verschiebung der elementaren Flächenstreifen, parallel zu UV, den Wert von x nicht ändert, so ist die Mannigfaltigkeit dieser Flächenbildungen ziemlich groß.

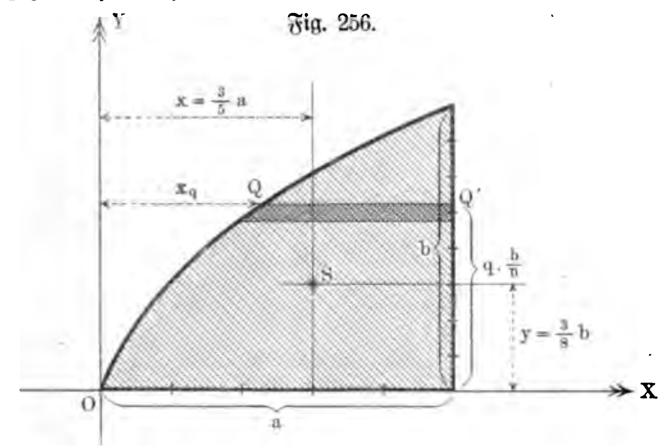
Die (senkrechte) Parallelprojektion einer ebenen Figur kann als eine besondere Art dieser Flächenbildung aufgefaßt werden.

Handelt es sich nun z. B. darum, den Schwerpunkt einer gewöhnlichen Halbellipse zu bestimmen, so geht man durch Verlängerung bezw. Verkürzung, wie es Fig. 255 a und b zeigt, zu der entsprechenden Halbkreisfläche über, für welche $x = \frac{4}{3\pi} b$ bezw. $x = \frac{4}{3\pi} a$ ist.

Ist die Halbellipse durch einen beliebigen Durchmesser entstanden, so geht man durch Verschiebung der elementaren Flächenstreifen und durch deren Verlängerung oder Verkürzung zu einer Halbkreisfläche über, welche den Radius r erhält; dann ist auch hier $x = \frac{4}{3\pi} r$. Entsprechendes gilt für Abschnitte von Ellipsen. Übertragung auf Ausschnitte.

i) Der Schwerpunkt der Parabelfläche. Die Parabel sei gegeben durch die Gleichung $y^2 = 2px$. Um den Schwerpunkt der Fläche, welche (vergl. Fig. 256) durch die Kurve und die Koordinaten a und b begrenzt

Fig. 256.



wird, zu bestimmen, teilen wir b in n gleiche Teile. Der Punkt Q des $q$ten Streifens, parallel zur X-Achse, von der die Zählung beginnen mag, hat gemäß der Gleichung $y^2 = 2px$ oder $x = \frac{y^2}{2p}$ die Abscisse $x_q = \frac{q^2 b^2}{2p} \cdot \frac{1}{n^2}$, so daß QQ' die Länge $a - \frac{q^2 b^2}{2p} \cdot \frac{1}{n^2}$ erhält. Der entsprechende Flächenstreifen von der Höhe $\frac{b}{n}$ hat die Größe

$$\frac{b}{n} \left(a - \frac{q^2 b^2}{2p} \cdot \frac{1}{n^2} \right)$$

und in Bezug auf die X-Achse bei dem Abstande $q \cdot \frac{b}{n}$ das Moment

$$\frac{b}{n}\left(a - \frac{q^2 b^2}{2p} \cdot \frac{1}{n^2}\right) q \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2 a}{n^2} \cdot q - \frac{b^4}{n^4} \cdot \frac{1}{2p} \cdot q^3.$$

Für die n Streifen, welche $q = 1, 2, \ldots n$ entsprechen, ergiebt sich demnach als Moment

$$\begin{aligned} &\frac{b^2 a}{n^2} \Sigma q - \frac{b^4}{n^4} \cdot \frac{1}{2p} \Sigma q^3 \\ &= \frac{b^2 a}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{b^4}{n^4} \cdot \frac{1}{2p} \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{b^2 a}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{b^4}{8p}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2. \end{aligned}$$

Für $lim\, n = \infty$ geht dieses Moment über in $\frac{b^2 a}{2} - \frac{b^4}{8p}$, oder, da $b^2 = 2pa$ ist, in $\frac{b^2 a}{2} - \frac{b^2 a}{4} = \frac{b^2 a}{4}$.

Legt man nicht die obere Grenze QQ' der Streifen, sondern die untere der Rechnung zu Grunde, so ist das Ergebnis dasselbe.

Man hat nun, da die Fläche der Parabel $\frac{2}{3} ab$ ist, für den Abstand y des Schwerpunktes

$$y = \frac{\frac{1}{4} b^2 a}{\frac{2}{3} ab} = \frac{3}{8} b \quad \ldots \ldots \ldots \quad 127)$$

Eine entsprechende Rechnung ergiebt $x = \frac{3}{5} a$.

k) Der Schwerpunkt der Polyederfläche. Bestimmt man für jede Seitenfläche den Schwerpunkt und denkt diesen proportional zu der Fläche belastet, so hat man den Schwerpunkt eines Systems von einzelnen Punkten zu suchen.

Für das Tetraeder bilden z. B. die Schwerpunkte S_1', S_2', S_3', S_4' der vier Seiten ein neues Tetraeder, dessen vier Eckpunkte belastet sind. Der Schwerpunkt S hat von den Seitenflächen des Tetraeders $S_1' S_2' S_3' S_4'$ gleichen Abstand ϱ, d. h. er ist der Mittelpunkt der diesem eingeschriebenen Kugel. Bezeichnet man für das gegebene Tetraeder Volumen und Oberfläche bezw. durch V und O, so ist $\varrho = \frac{V}{O}$. Vergl. S. 421.

l) Schwerpunkt gekrümmter homogener Flächen. Für die Kugeloberfläche und für den Mantel des geraden Cylinders giebt die Betrachtung der Symmetrie ohne weiteres die Lage des Schwerpunktes.

Für die Kugelzone liegt der Schwerpunkt in der Mitte der Achse h. Teilt man nämlich die Zone durch Parallelschnitte zu den Grundkreisen in n Zonen von der Höhe $\frac{h}{n}$, so ist bei einem Kugelradius R die Fläche jeder Teilzone $2R\pi \cdot \frac{h}{n}$; für $lim\, n = \infty$ wird also die Achse homogen belastet.

Um den Schwerpunkt für den Mantel eines geraden Kegels zu finden, verbindet man die Spitze C mit zwei Punkten A und B des Grundkreises und bestimmt für das ebene Dreieck CAB den Schwerpunkt S'. Je kleiner AB wird, um so genauer fällt dieser Schwerpunkt S' auf die Kegelseite, welche die Mitte von AB mit C verbindet und teilt diese von der Spitze nach der Basis im Verhältnisse 2 : 1. Bei elementarer Teilung des Kegelmantels stellt dieser also eine homogene Belastung der Kreislinie dar, welche die Durchdringung des Mantels mit einer Parallelebene zur Grundfläche, im Abstande $\frac{h}{3}$ von dieser, ist. Demnach liegt S auf der Achse und teilt diese von der Spitze nach der Grundfläche zu im Verhältnisse 2 : 1.

Projiziert man ein Flächenelement f einer Halbkugel senkrecht auf die Ebene, welche die Halbkugel begrenzt, so ist $f \cos \varepsilon = f'$ die Größe der Projektion, falls f gegen die Ebene den Neigungswinkel ε hat. Da das projizierende Lot bei einem Kugelradius R die Länge $l = R \cos \varepsilon$ hat, so ist $f \cdot l = f'R$. (Vergl. dazu die, dem Kreisbogen entsprechende Fig. 241.) Bildet man also für eine Fläche F, die auf der Halbkugel liegt, das Moment für jene Ebene, so erhält es den Wert $F'R$, falls man die Summe der Projektionen der einzelnen Flächenelemente durch F' bezeichnet.

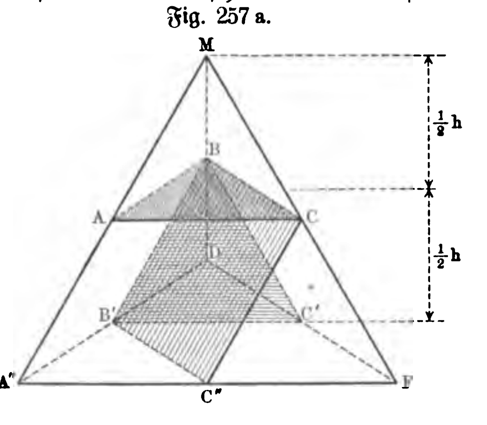
Der Abstand des Schwerpunktes der Fläche F von jener Ebene ist also $\frac{F'}{F} \cdot R$.

Die Schwerpunkte bestimmter Figuren auf gekrümmten Flächen sind im allgemeinen schwer zu bestimmen, doch kann man sie stets in beliebiger Genauigkeit durch Polyederflächen ersetzen und deren Schwerpunkt feststellen.

74. Schwerpunktsbestimmungen für Körper. Für die Kugel und die regelmäßigen Körper, für den Kreiscylinder, für das Rechtkant und für das Schiefkant (schiefes Parallelepipedon) ist die Lage des Schwerpunktes ohne weiteres durch Betrachtung der Symmetrie gegeben, ebenso für alle prismatischen Körper, falls der Schwerpunkt des Querschnittes bekannt ist.

Da alle Körper in Tetraeder zerlegt werden können, gegebenen Falles unter Anwendung elementarer Teilung, so ist die Behandlung des Tetraeders hier von hervorragender Wichtigkeit.

Fig. 257 a.



a) Der Schwerpunkt des homogenen Tetraeders. Bestimmt man die Schwerpunkte der Schnitte eines Tetraeders, parallel zu einer seiner Seitenflächen, so liegen diese (ähnliche Systeme) auf einer Geraden durch die Ecke, welche jener Seitenfläche gegenüberliegt. Diese Gerade erweist sich

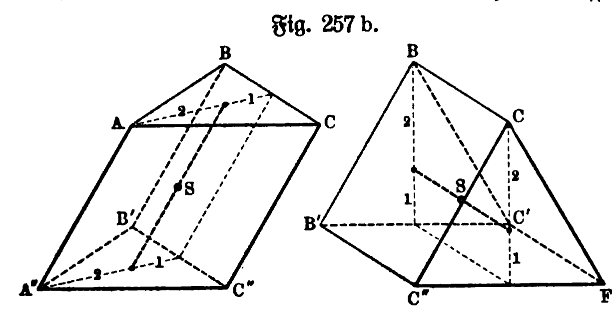
bei entsprechender elementarer Teilung des Tetraeders als eine Schwerlinie desselben. Verbindet man demnach jede Ecke des Tetraeders mit dem Schwerpunkte der gegenüberliegenden Seitenfläche, so schneiden sich diese vier Schwerlinien im Schwerpunkte. Eine stereometrische Betrachtung zeigt, daß jede dieser Strecken im Verhältnisse 1 : 3 geteilt wird und zwar so, daß der größere Abschnitt an der Ecke liegt. Es folgt das auch schon aus § 72, Nr. b.

Wegen der Wichtigkeit dieser Bestimmung geben wir noch die folgende Ableitung.

Zerlegt man das Tetraeder durch die, in Fig. 257 a (a. v. S.) gezeichneten Schnitte durch die Mitten seiner Kanten, so zerfällt es in zwei, unter sich kongruente Tetraeder $MABC$ und $BDB'C'$ und in die Prismen $ABCA''B'C''$ und $CFC''BC'B'$.

Bezeichnet man das Volumen eines Teiltetraeders mit V, so hat jedes der Prismen das Volumen $3V$ und demnach das ursprüngliche Tetraeder das Volumen $8V$. Hat der Schwerpunkt des Tetraeders $BDB'C'$ von der Grundfläche den Abstand x, so hat der Schwerpunkt des Tetraeders $MABC$ von dieser den Abstand $x + \frac{h}{2}$, während der Schwerpunkt des ganzen Tetraeders (Ähnlichkeit) von ihr den Abstand $2x$ hat. Der Schwerpunkt des Prismas $ABCA''B'C''$ hat den Abstand $\frac{h}{4}$ von der Grundfläche und der des Prismas $CFC''BC'B'$ den Abstand $\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{6}$, wie Fig. 257 b zeigt. Wendet man den Momentensatz für die Grundfläche an, so ist also

Fig. 257 b.



$$V \cdot x + V\left(x + \frac{h}{2}\right) + 3V \cdot \frac{h}{4} + 3V \cdot \frac{h}{6} = 8V \cdot 2x,$$

d. h.

$$14\,Vx = \tfrac{7}{4}\,Vh$$

oder

$$(2x) = \frac{h}{4}.$$

Demnach steht der Schwerpunkt S des Tetraeders von jeder Seitenfläche um ein Viertel der zugehörigen Höhe ab, man kommt also auf den oben bestimmten Punkt zurück.

Haben die Ecken eines Tetraeders von einer Ebene die Abstände x_1, x_2, x_3, x_4, so zeigt eine entsprechende Betrachtung wie beim Dreieck, daß der Schwerpunkt von jener Ebene den Abstand

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 128)$$

hat.

Sind die Ecken des Tetraeders durch die Koordinaten $(x_1; y_1; z_1), \ldots (x_4; y_4; z_4)$ gegeben, so gilt für das Volumen

$$6\,V = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 129)$$

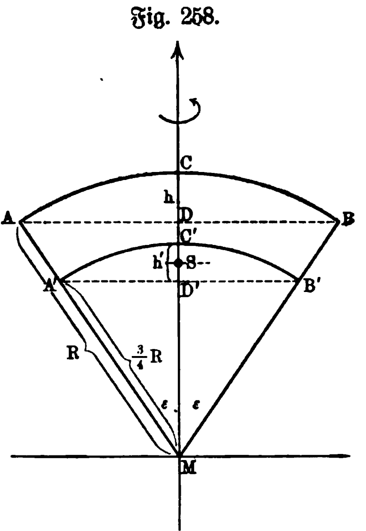
Mit vorstehenden Formeln läßt sich jeder Körper, der in Tetraeder von bekannter Lage zerlegt worden ist, behandeln.

b) Der Schwerpunkt der homogenen Pyramide. Zerlegt man die Pyramide durch Ebenen aus der Spitze in Tetraeder, so liegt für jedes der Schwerpunkt im Abstande $\frac{h}{4}$ von der Grundfläche, so daß eine Parallelebene zu dieser im Abstande $\frac{h}{4}$ für die Pyramide eine Schwerebene ist. Da anderseits die Verbindungsgerade der Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche eine Schwergerade ist, so ist der Schwerpunkt bestimmt.

Eine Grenzbetrachtung ergiebt für den Kegel dasselbe Ergebnis.

c) Der Schwerpunkt des homogenen Kugelausschnittes. Verbindet man drei Punkte A, B, C der Kugeloberfläche vom Radius R mit deren Mittelpunkte M, so nähert sich der Abstand des Schwerpunktes der Pyramide $MABC$ vom Punkte M dem Werte $\frac{3}{4}R$ um so mehr, je kleiner das Dreieck ABC wird. Bei einer gleichmäßigen elementaren Dreieckszerlegung der Kugelkappe, welche den Kugelausschnitt mitbegrenzt, wird also durch die Schwerpunkte der entsprechenden elementaren Pyramiden eine ähnlich gelegene Kugelkappe homogen belastet. Fig. 258 stellt einen Schnitt durch die Achse des Kugelausschnittes dar, welcher die homogen belastete Zone in $A'C'B'$ durchdringt. Der gesuchte Schwerpunkt liegt demnach in der Mitte von $C'D'$, hat also von M den Abstand

Fig. 258.



$$x = \tfrac{3}{4}R - \tfrac{1}{2}\,C'D'.$$

Da $ACBD$ und $A'C'B'D'$ einander ähnlich sind nach dem Modul $4:3$, so ist $C'D' = \frac{3}{4}\,CD = \frac{3}{4}h$, d. h. man hat

$$x = \tfrac{3}{4}R - \frac{3\,h}{8} = \tfrac{3}{8}(2\,R - h) \quad \ldots\ldots \quad 130)$$

Für die Halbkugel ist $h = R$, so daß hier $x = \frac{3}{8}R$ ist.

Für die volle Kugel ist $h = 2\,R$, so daß hier $x = 0$ wird.

d) Der Schwerpunkt des homogenen Kugelabschnittes. Zerlegt man einen Kugelausschnitt in den zugehörigen Abschnitt und in den zu-

gehörigen Kegel, so läßt sich der Momentensatz anwenden. Bezeichnet man die Abstände der Schwerpunkte des Ausschnitts, des Kegels und des Abschnittes vom Mittelpunkte der Kugel bezw. mit x_1, x_2, x, die entsprechenden Volumen bezw. mit V_1, V_2, V, so ist

$$V_1 x_1 = V_2 x_2 + V x,$$

d. h.

$$x = \frac{V_1 x_1 - V_2 x_2}{V}.$$

Für $V_1 = \frac{2}{3} R^2 \pi h$, $V_2 = \frac{1}{3} h (2R - h)(R - h) . \pi$ und $V = V_1 - V_2$, $x_1 = \frac{3}{8}(2R - h)$, $x_2 = \frac{3}{4}(R - h)$ erhält man

$$x = \frac{3}{4} \frac{(2R - h)^2}{3R - h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 131)$$

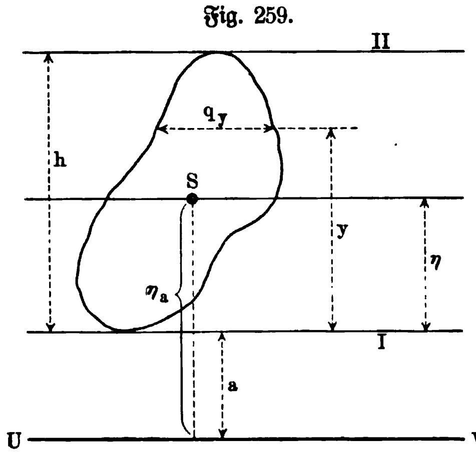
Für die Halbkugel ist $h = R$, so daß hier $x = \frac{3}{8} R$ wird.

Für die volle Kugel ist $h = 2R$, so daß hier $x = 0$ ist.

e) Die Bemerkungen unter h) in § 73 gelten hier in sachgemäßer Erweiterung. Dreht sich z. B. eine Ellipse um die eine Achse ($2a$), so ist der Schwerpunkt eines Abschnittes des Ellipsoides, dessen Grundfläche zur Ebene der anderen Achse ($2b$) parallel ist, leicht zu bestimmen. Macht man $2a$ zum Durchmesser einer Kugel, so bestimmt die Grundfläche des Ellipsoidabschnittes von der Höhe h bei dieser einen entsprechenden Abschnitt, dessen Schwerpunkt zugleich der Schwerpunkt des Ellipsoidabschnittes ist. Man hat hier also $x = \frac{3}{4} \frac{(2a - h)^2}{3a - h}$.

75. Weitere Bemerkungen über Schwerpunktsbestimmungen. Reichen die bisherigen Betrachtungen nicht aus, so kann man gelegentlich auch die Simpsonsche Regel für die Bestimmung von Schwerpunkten verwenden.

Fig. 259.



Legt man an die Umgrenzung einer ebenen Figur zwei parallele Tangenten I und II und zwar so, daß die Figur ganz und gar in dem damit bestimmten Streifen liegt, so läßt sich die Fläche und das Moment für I oder II stets angenähert darstellen.

Wenn zunächst die Schnittlinie q_y der Fläche (vergl. Fig. 259) in der von I aus gerechneten Höhe y stets dargestellt werden kann durch den Ausdruck

$$q_y = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots a_n y^n,$$

so führt eine einfache Grenzbetrachtung, wie sie bei der Bestimmung des

Schwerpunktes der Parabelfläche angewandt wurde, zu der Fläche (F) und dem Momente der Fläche (M) in Bezug auf die Achse I.

Man hat

$$\left.\begin{aligned} F &= a_0 h + \tfrac{1}{2} a_1 h^2 + \tfrac{1}{3} a_2 h^3 + \tfrac{1}{4} a_3 h^4 + \tfrac{1}{5} a_4 h^5 + \cdots \frac{1}{n+1} a_n h^{n+1} \\ &\text{und} \\ M &= \tfrac{1}{2} a_0 h^2 + \tfrac{1}{3} a_1 h^3 + \tfrac{1}{4} a_2 h^4 + \tfrac{1}{5} a_3 h^5 + \cdots \frac{1}{n+2} a_n h^{n+2} \end{aligned}\right\} \quad 132)$$

Demnach hat S von I den Abstand $\eta = \frac{M}{F}$.

Gilt diese Betrachtung für I, so läßt sie sich auch für II durchführen. Bezeichnet man durch q_0, $q_{\frac{h}{2}}$ und q_h bezw. die Schnittlinien für die Abstände 0, $\frac{h}{2}$ und h von I, wobei q_0 und q_h oft den Wert Null erhalten werden und wobei $q_{\frac{h}{2}}$ den sogenannten Mittelschnitt bezeichnet, so stellt der Ausdruck

$$F' = \frac{h}{6}\left(1 \cdot q_0 + 4 \cdot q_{\frac{h}{2}} + 1 \cdot q_h\right),$$

welcher **Mittelschnittsformel** heißen mag, unter einer bestimmten **Voraussetzung** den Wert von F dar.

Man hat

$$F' = a_0 h + \tfrac{1}{2} a_1 h^2 + \tfrac{1}{3} a_2 h^3 + \tfrac{1}{4} a_3 h^4 + \tfrac{5}{24} a_4 h^5 + \cdots + \tfrac{1}{6} \cdot \frac{2^{n-2}+1}{2^{n-2}} a_n \cdot h^{n+1}.$$

Der Vergleich von F und F' zeigt, daß die Glieder mit a_0, a_1, a_2, a_3 genau stimmen, während das Glied mit a_4 in F den Koefficienten $\frac{1}{5} = \frac{5}{25}$ und in F' den Koefficienten $\frac{5}{24}$ hat.

Haben also alle Koefficienten a_p den Wert Null, abgesehen von a_0, a_1, a_2, a_3, so ist in aller Strenge $F = F'$.

Für $q_y = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$ gilt also die **Mittelschnittsformel**:

$$F = \frac{h}{6}\left(1 \cdot q_0 + 4 \cdot q_{\frac{h}{2}} + 1 \cdot q_h\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 133)$$

Versucht man auch das Moment durch den einfachen Ausdruck

$$M' = \frac{h}{6}\left(1 \cdot q_0 \cdot y_0 + 4 \cdot q_{\frac{h}{2}} \cdot y_{\frac{h}{2}} + 1 \cdot q_h \cdot y_h\right).$$

zu ersetzen, so ergiebt sich Folgendes.

Man hat, da $y_0 = 0$, $y_{\frac{h}{2}} = \frac{h}{2}$ und $y_h = h$ ist,

$$M' = \tfrac{1}{2} a_0 h^2 + \tfrac{1}{3} a_1 h^3 + \tfrac{1}{4} a_2 h^4 + \tfrac{5}{24} a_3 h^5 + \cdots \tfrac{1}{6} \cdot \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}} \cdot a_n h^{n+2}.$$

Der Vergleich von M und M' zeigt, daß die Glieder mit a_0, a_1 a_2

genau stimmen, während das Glied mit a_3 in M den Koefficienten $\frac{1}{5} = \frac{5}{25}$ und in M' den Koefficienten $\frac{5}{24}$ hat.

Haben also alle Koefficienten a_p den Wert Null, abgesehen von a_0, a_1, a_2, so ist in aller Strenge $M = M'$.

Für $q_y = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$ gilt also die **Mittelschnittsformel:**

$$M = \frac{h}{6}\left(1 \cdot q_0 \cdot y_0 + 4 \cdot q_{\frac{h}{2}} \cdot y_{\frac{h}{2}} + 1 \cdot q_h \cdot y_h\right) \quad . \quad . \quad 134)$$

Geht man zu einer Achse UV über, die im Abstande a parallel zu I ist, so ist für diese

$$\eta_a = \eta + a = \frac{M}{F} + a = \frac{M + a \cdot F}{F}.$$

Bildet man M_a für diese Achse nach der Mittelschnittsformel, so ergiebt sich

$$M_a = \frac{h}{6}\left[1 \cdot q_0 (y_0 + a) + 4 \cdot q_{\frac{h}{2}}\left(y_{\frac{h}{2}} + a\right) + 1 \cdot q_h (y_h + a)\right]$$
$$= M + a \cdot F,$$

d. h. man hat

$$\eta_a = \frac{M_a}{F}.$$

Ist die Mittelschnittsformel überhaupt anwendbar, so ist sie nicht bloß für die Achse I (oder II), welche den Streifen begrenzt, sondern auch für jede Parallelachse dazu anwendbar.

Fig. 260.

Zerlegt man nun eine beliebige ebene Fläche durch unter sich gleiche Doppelstreifen (vergl. Fig. 260), von denen jeder einzelne der vorigen Betrachtung entspricht, so führt eine Anwendung der Mittelschnittsformel für jeden Streifen zu folgendem Ergebnis

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{h}{6}[(q_0 + 4q_1 + q_2) \\ &+ (q_2 + 4q_3 + q_4) + \cdots \\ &+ (q_{n-2} + 4q_{n-1} + q_n)] \\ &= \frac{h}{6}[1 \cdot q_0 + 1 \cdot q_n \\ &+ 2(q_2 + q_4 + \cdots q_{n-2}) \\ &+ 4(q_1 + q_3 + \cdots q_{n-1})] \end{aligned}\right\} 135)$$

Da die (gerade) Anzahl der einzelnen Streifen n, die Anzahl der Doppelstreifen also $\frac{n}{2}$ ist, so gilt $H = \frac{n}{2} \cdot h$. Demgemäß läßt sich $\frac{h}{6}$ auch ersetzen durch $\frac{H}{3n} = \frac{y_n - y_0}{3n}$.

Die entwickelte Formel ist die sogen. Simpsonsche Regel (vergl. S. 70).

Für das Moment erhält man ebenso

$$\left.\begin{array}{l} M = \frac{h}{6}\,[1 \cdot q_0 y_0 + 1 \cdot q_n \cdot y_n + 2\,(q_2 y_2 + q_4 y_4 + \cdots q_{n-2} y_{n-2}) \\ \quad + 4\,(q_1 y_1 + q_3 y_3 + \cdots q_{n-1} y_{n-1})] \end{array}\right\} 136)$$

Auch hier ist $\frac{h}{6} = \frac{H}{3n} = \frac{y_n - y_0}{3n}$.

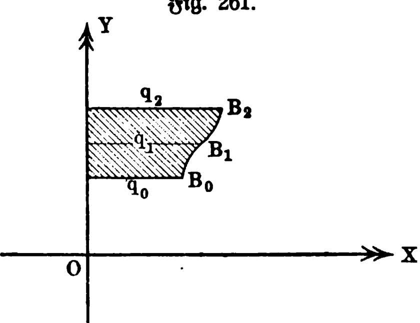
Der allgemeine Gebrauch dieser beiden Formeln setzt voraus, daß man die krummlinige Begrenzung eines einzelnen Doppelstreifens so abändern darf, daß innerhalb desselben für die Querschnittslinien die Gleichung $q_y = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$ gilt.

Für den ersten Streifen ist y_0, y_1, y_2 und q_0, q_1, q_2 gemessen, so daß in Geltung sein müßte:

$$\left\{\begin{array}{l} q_0 = a_0 + a_1 y_0 + a_2 y_0^2 \\ q_1 = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_1^2 \\ q_2 = a_0 + a_1 y_2 + a_2 y_2^2 \end{array}\right\}$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich a_0, a_1, a_2 im allgemeinen eindeutig bestimmen, damit ist aber auch für die Begrenzung zwischen q_0 und q_1 und zwischen q_1 und q_2 eine bestimmte Voraussetzung gemacht. Denkt man nämlich den Doppelstreifen in unendlich-kleine Streifen zerlegt und jeden derselben nach links an eine Achse OY angeschoben, so müßte die Gleichung $x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$ nun für die begrenzende Linie $B_0 B_1 B_2$ gelten, d. h. diese müßte ein Stück einer Parabel sein.

Fig. 261.



Handelt es sich allein um die Fläche und nicht auch um das Moment, so steht die Gleichung $x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$ zur Verfügung.

Die entsprechende Betrachtung des zweiten Streifens ist unabhängig von der des ersten, obwohl q_2 und y_2 beiden Streifen angehören. Man hat hier

$$\left\{\begin{array}{l} q_2 = a_0' + a_1' y_2 + a_2' y_2^2 \\ q_3 = a_0' + a_1' y_3 + a_2' y_3^2 \\ q_4 = a_0' + a_1' y_4 + a_2' y_4^2 \end{array}\right\}$$

Aus diesen Gleichungen sind a_0', a_1', a_2' zu bestimmen.

Je geringer die Unregelmäßigkeiten (Spitzen u. s. w.) der Begrenzung sind und je schmaler man die Doppelstreifen nimmt, um so mehr entspricht auch der parabolische Ersatz der Begrenzung von Streifen zu Streifen der wirklichen Begrenzung.

Entsprechende Betrachtungen gelten auch für Körper.

Legt man den Körper zunächst zwischen zwei parallele Tangentialebenen I und II (vergl. Fig. 259), so bezeichnet q_y die Querschnittsfläche von der Höhe y über I. Für $q_y = a_0 + a_1 y + by^2$ stellt die für F abgeleitete

Formel Nr. 133) jetzt das Volumen des Körpers dar, die für M abgeleitete Formel Nr. 134) das Moment des Körpers in Bezug auf I.

Zerlegt man den Körper in Doppelschichten (vergl. Fig. 260), so erhält man auch hier die entsprechenden Formeln Nr. 135 und 136).

Die Formeln Nr. 132 gelten wieder allgemein.

Für ein dreiachsiges Ellipsoid, dessen Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ist, hat die Schnittellipse für $z = p$ die Gleichung

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(c^2 - p^2)}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2(c^2 - p^2)}{c^2}} = 1$$

und daher ist deren Fläche $\frac{ab}{c^2}(c^2 - p^2)\,\pi$.

Man hat also für ein beliebiges z die Fläche

$$q_z = \frac{ab}{c^2}(c^2 - z^2)\,\pi = ab\pi - \frac{ab\pi}{c^2}\cdot z^2,$$

d. h. die Bedingung der Anwendung der Mittelschnittsformel ist hier gegeben.

Für eine Ellipse, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist, hat die Schnittlinie für $y = p$ den Wert $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - p^2}$.

Man hat also für ein beliebiges y die Schnittlinie

$$q_y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

d. h. die Bedingung der Anwendung der Mittelschnittsformel ist hier nicht gegeben[1]).

Für die Kugel ist $q_0 = 0$, $q_h = 0$, $q_{\frac{h}{2}} = R^2\pi$, für $h = 2R$ und daher

$$V = (0 + 4R^2\pi + 0)\frac{2R}{6} = \tfrac{4}{3}R^3\pi.$$

Hier ist ferner

$$M = (0\,.\,0 + 4R^2\pi\,.\,R + 0\,.\,2R)\frac{2R}{6} = \tfrac{4}{3}R^4\pi.$$

Man hat $\frac{4}{3}R^4\pi : \frac{4}{3}R^3\pi = R$.

Für die Halbkugel ist $q_0 = R^2\pi$, $q_{\frac{h}{2}} = \frac{3}{4}R^2\pi$, $q_h = 0$ für $h = R$ und daher

$$V = (R^2\pi + 4\cdot\tfrac{3}{4}R^2\pi + 0)\,\frac{R}{6} = \tfrac{2}{3}R^3\pi.$$

Hier ist ferner

$$M = (R^2\pi\,.\,0 + 4\cdot\tfrac{3}{4}R^2\pi\cdot\tfrac{1}{2}R + 0\,.\,R)\,\frac{R}{6} = \tfrac{1}{4}R^4\pi.$$

Man hat $\frac{1}{4}R^4\pi : \frac{2}{3}R^3\pi = \frac{3}{8}R$.

[1]) Zahlreiche Anwendungen findet man bei Holzmüller, Ingenieur-Mathematik, 1897.

Will man Integralrechnung zur Bestimmung von Schwerpunkten verwenden, so hat man für das Linienelement ds die Belastung $ds\gamma$, für das Flächenelement df die Belastung $df\gamma$ und für das Volumenelement dv die Belastung $dv\gamma$ einzuführen, wobei ein konstantes γ homogenen Belastungen, ein veränderliches γ heterogenen Belastungen entspricht.

Für eine Kurve geht dann z. B. das Moment für die XY-Ebene

$$\Sigma \mu_p z_p \quad \text{über in} \quad \int ds\gamma z,$$

während die Masse $\Sigma \mu_p$ durch $\int ds\gamma$ dargestellt wird.

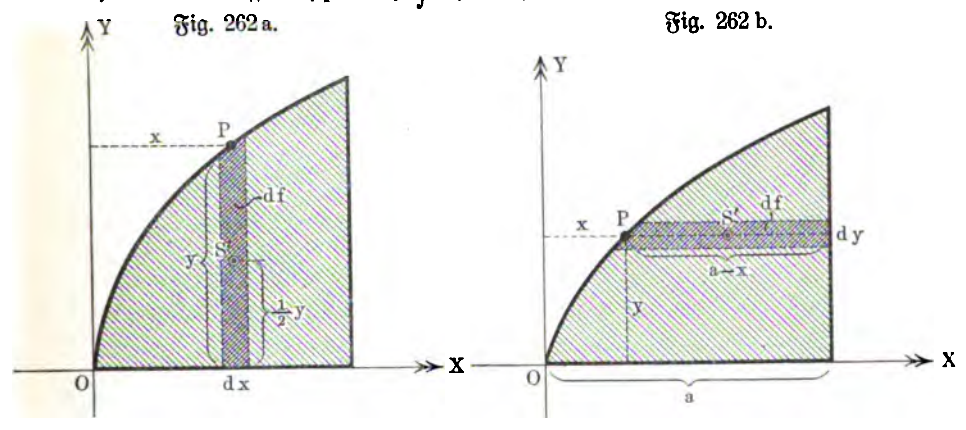


Fig. 262 a. Fig. 262 b.

Für eine Fläche hat man entsprechend

$$\Sigma \mu_p z_p = \int df\gamma z,$$

während die Masse $\Sigma \mu_p$ durch $\int df\gamma$ gegeben ist.

Für Körper ergiebt sich ebenso

$$\Sigma \mu_p z_p = \int dv\gamma z,$$

während die Masse durch $\int dv\gamma$ gegeben ist.

Für homogene Gebilde kann man $\gamma = 1$ setzen.

Für ebene Figuren kann man unendlich-schmale Streifen als df einführen, in deren Mitte (Rechteck) ihr Schwerpunkt anzunehmen ist. Man hat dann für Fig. 262 a

$$\Sigma \mu_p x_p = \int yx\,dx \quad \text{und} \quad \Sigma \mu_p y^p = \tfrac{1}{2}\int y^2 dx$$

$$\Sigma \mu_p = \int y\,dx$$

und für Fig. 262 b

$$\Sigma \mu_p x_p = \tfrac{1}{2}\int (a^2 - x^2)\,dy \quad \text{und} \quad \Sigma \mu_p y_p = \int (a-x)\,y\,dy.$$

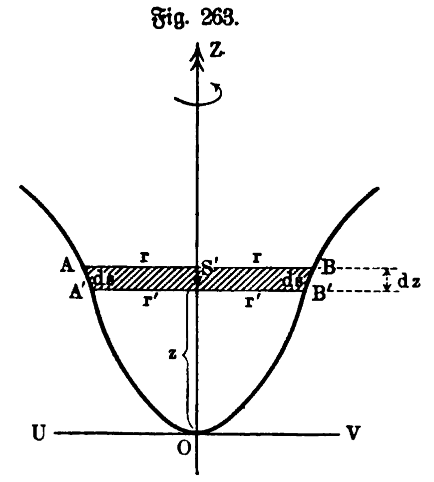
$$\Sigma \mu_p = \int (a-x)\,dy.$$

Außerdem gilt für die Begrenzung die Gleichung $y = f(x)$.

Für volle Rotationsflächen und Rotationskörper ist nur die Lage des Schwerpunktes auf der Achse zu bestimmen. Hier kann man als Element einen Streifen bezw. eine Schicht annehmen, die durch zwei unendlich-nahe Parallelebenen, senkrecht zur Achse ausgeschnitten wird. Man hat dann, falls

die Achse zur Z-Achse genommen wird, wie Fig. 263 zeigt, für die Fläche den Mantel des Kegelstumpfes $ABB'A'$ als Element anzusehen, d. h. man hat

Fig. 263.



$$df = \pi(r + r')ds = 2\pi r ds,$$

und für den Körper das Volumen des Stumpfes, d. h. man hat

$$dv = \frac{\pi}{3}(r^2 + r'^2 + rr')dz = \pi r^2 dz.$$

Das Moment in Bezug auf eine Ebene durch UV, senkrecht zur Ebene der Zeichnung, ist dann für df gegeben als $2\pi r z ds$ und für dv als $\pi r^2 z\, dz$, so daß also $\Sigma \mu_p z_p$ für die Fläche übergeht in

$$2\pi\int r z\, ds$$

und für den Körper in

$$\pi\int r^2 z\, dz.$$

Ebenso geht $\Sigma \mu_p$ für die Fläche über in $2\pi\int r\, ds$ und für den Körper in $\pi\int r^2 dz$.

Außerdem gilt für die Begrenzung (Erzeugungslinie) die Gleichung $z = f(r)$.

Oft ist es zweckmäßig, Polarkoordinaten einzuführen.

Für ebene Kurven ist dann $ds = r d\varphi$ und $x = r \cos\varphi$ und $y = r \sin\varphi$ zu setzen.

Für ebene Flächen ist $df = r dr d\varphi$ zu setzen.

Für Körper ist $dv = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$ zu setzen, falls φ der geographischen Länge entspricht und ϑ dem Komplemente der Breite.

76. Die Bedeutung der Schwerpunktsbestimmungen innerhalb der Dynamik. Hat man für einen Körper seinen Schwerpunkt bestimmt, so darf man in diesem das Gewicht des Körpers vereinigt denken, d. h. man darf den Körper, soweit die Einwirkung der Erde in Frage kommt, frei denken von allen Kräften, abgesehen von dem in seinem Schwerpunkte angreifenden Gewichte. Statt des unendlich gegliederten Kräftesystems, welches der gegenseitigen Einwirkung von Körper und Erde entspricht, tritt also eine einzige Kraft ein, statt des Körpers ein dynamisches Centrum.

Im besondern gilt auch für Bewegungen der Körper, daß die dabei auftretende Arbeit, soweit sie dem Gewichte G des Körpers entspricht, für eine Senkung h des Schwerpunktes den Wert $+ h \,.\, G$ und für eine Hebung h des Schwerpunktes den Wert $- h \,.\, G$ hat. Vergl. § 48.

Bei der Berechnung des Gewichtes G eines Körpers, dessen Volumen V ist, hat oft das Verhältnis $\frac{G}{V}$ eine Bedeutung. Hat der Körper die Masse

m, und die mittlere Dichtigkeit δ, so ist

$$\frac{G}{V} = \frac{mg}{V} = \delta \, . \, g.$$

Bei einem homogenen Körper ist also an einer bestimmten Stelle des Raumes (g) der Wert $\frac{G}{V}$ für den Körper selbst und für beliebig kleine Teile desselben eine Konstante. Da diese von der Stoffart (species) der Körper (Eisen, Blei u. s. w.) in erster Linie abhängt, so wird sie „specifisches Gewicht" genannt.

Bezeichnet man sie mit σ, so gilt also

$$\sigma = \delta \, . \, g.$$

Hat man für zwei Körper verschiedenen Stoffes σ und δ bestimmt, so ist

$$\sigma_1 : \sigma_2 = \delta_1 : \delta_2,$$

solange keine Änderung von g in Frage kommt.

Die Tabelle der „specifischen Gewichte" stimmt also mit der Tabelle der „Dichtigkeiten" überein, wenn man in beiden Tabellen für eine und dieselbe Stoffart (z. B. Wasser bei 4° C.) den Wert 1 einführt.

Findet man z. B. in den Tabellen bei Eisen (in Bezug auf Wasser) sowohl $\sigma = 7{,}5$ als auch $\delta = 7{,}5$, so bedeuten demnach diese Zahlen Verschiedenes. Die Zahl $\sigma = 7{,}5$ sagt uns, daß das Gewicht (Schwerdruck oder Schwerzug) eines bestimmten Volumens Eisens 7,5 mal so groß ist als das Gewicht (Schwerdruck oder Schwerzug) desselben Volumens Wasser; die Zahl $\delta = 7{,}5$ spricht dieselbe Beziehung für die Massen aus. Im ersten Falle muß man außerdem die Volumeneinheit des Wassers und deren Gewicht kennen, im zweiten Falle außerdem die Volumeneinheit des Wassers und deren Masse. Dabei macht sich aber wieder der Unterschied zwischen dem physikalischen und dem technischen Maßsystem geltend (vergl. S. 269 f.).

Das physikalische, technischen Verhältnissen angepaßte, System braucht den Kubikmeter als Volumeneinheit und giebt dem Kubikmeter Wasser die Masse 1000 Massenkilo, also das Gewicht 1000 g = 9810 Krafteinheiten.

Hier hat der Kubikmeter Eisen die Masse 7500 Massenkilo und das Gewicht 7500 g, es ist also in Bezug auf die Volumeneinheit $\delta = 7500$ und $\sigma = 7500\,g$.

Das technische System braucht den Kubikmeter als Volumeneinheit und giebt dem Kubikmeter Wasser das Gewicht 1000 Kraftkilo, also die Masse $\frac{1000}{g}$.

Hier hat der Kubikmeter Eisen das Gewicht 7500 Kraftkilo und die Masse $\frac{7500}{g}$, es ist also in Bezug auf die Volumeneinheit $\sigma = 7500$ und $\delta = \frac{7500}{g}$.

In beiden Fällen ist $\sigma = \delta \, . \, g$.

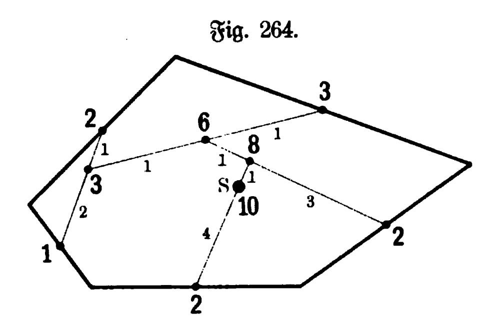
Im physikalischen System, wie es in der Physik benutzt wird, tritt statt des Meters der Centimeter ein, wobei ein Kubikcentimeter Wasser einem Gramm Masse entspricht; dabei ist g, welches im Metersystem im Mittel den Wert 9,81 hat, durch 981 zu ersetzen.

Anwendungen der Lehre vom Schwerpunkt.

1. Der Schwerpunkt der homogenen Begrenzung eines ebenen Fünfecks (Stangenfünfeck). Jede Seite hat ihren Schwerpunkt in ihrer Mitte und ist in diesem, proportional zu ihrer Länge, belastet. Es handelt sich also darum, den Schwerpunkt von fünf schweren Punkten zu finden.

Dazu kann man z. B. die Koordinaten der Ecken gegen ein Koordinatenkreuz in der Ebene bestimmen und in Bezug auf dessen Achsen den Momentensatz anwenden, man kann aber auch unmittelbar die Abstände der Mittelpunkte der Seiten von zwei Geraden der Ebene messen und den Momentensatz anwenden.

Fig. 264.



Ferner kann man auch, wie Fig. 264 zeigt, erst den Schwerpunkt für zwei Stangen bestimmen, dann die dritte hinzunehmen u. s. f. In Fig. 264 sind die Belastungen der Teilschwerpunkte und die Teilpunktsverhältnisse der Strecken angegeben.

Endlich kann man auch in der Mitte der Stangen deren Gewichte, parallel zu einander, durch Strecken darstellen und die Resultante der damit gegebenen Kräfte durch Krafteck und Seileck bestimmen. Diese ist eine Schwerlinie des Fünfecks. Dreht man die Kräfte, parallel zu einander, um die Mitten der Stangen, z. B. um 90°, so liefert eine Wiederholung der Konstruktion eine zweite Schwerlinie. (Vergl. dazu Fig. 269.)

2. Der Schwerpunkt einer heterogen belasteten Strecke AB. Die Belastung mag proportional zu dem Quadrate des Abstandes vom Ende A zunehmen. Teilt man die Strecke in n gleiche Teile von der Länge $\frac{l}{n}$, so sind die Belastungen für die einzelnen Teilpunkte proportional zu $\left(\frac{l}{n}\right)^2$, $\left(\frac{2\,l}{n}\right)^2$, $\left(\frac{3\,l}{n}\right)^2 \cdots$, ihre Momente in Bezug auf A also $\left(\frac{l}{n}\right)^3$, $\left(\frac{2\,l}{n}\right)^3$, $\left(\frac{3\,l}{n}\right)^3 \cdots$ Der Momentensatz liefert also für den Abstand x des Schwerpunktes dieser Belastungen von A

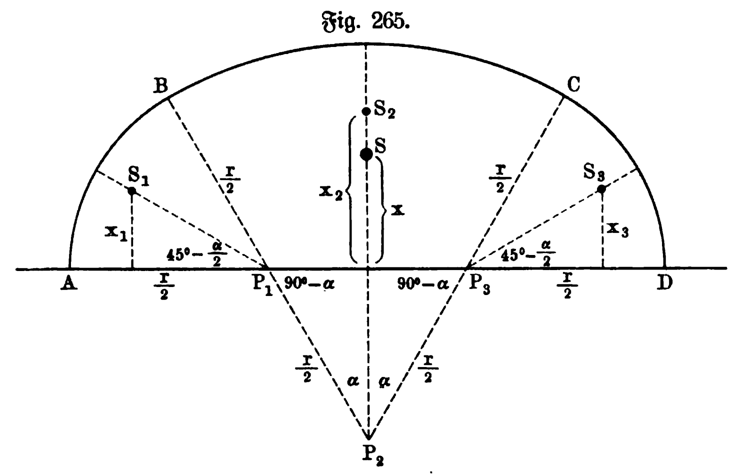
$$x \cdot \frac{l^2}{n^2}(1 + 4 + 9 + \cdots n^2) = \frac{l^3}{n^3}(1 + 8 + 27 + \cdots n^3).$$

Für $\lim n = \infty$ ergiebt sich $x = \frac{3}{4}l$.

In Bezug auf die weiteren Grenzbetrachtungen vergl. S. 420.

3. **Der Schwerpunkt eines homogenen Korbbogens**, wie er bei Gewölbe- und Brückenprofilen vorkommt. Unter einem Korbbogen versteht man einen Bogen, der aus tangential aneinander gefügten Kreisbogen zusammengesetzt ist, wie es Fig. 265 für eine bestimmte Anordnung zeigt.

Fig. 265.



Bezeichnet man die Schwerpunkte der Bogen AB, BC, CD bezw. durch S_1, S_2, S_3, so sind P_1S_1, P_2S_2, P_3S_3 unmittelbar durch die für den Kreisbogen entwickelte Formel gegeben.

Für AD als Achse ist

$$x_1 = P_1S_1 \, . \, \sin\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{und} \quad x_3 = P_3S_3 \, . \, \sin\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

gegeben, während $x_2 = P_2S_2 - \frac{r}{2}\cos\alpha$ ist. Der Momentensatz giebt dann unmittelbar x.

Für $\alpha = 30^0$ ist $x = 0{,}380\, r$.

Dreht man den Korbbogen um AD, so ist die Oberfläche des dabei entstehenden Halbraumes gegeben als $O = 2{,}502\, r^2$ nach dem einen der Pappus-Guldinschen Sätze.

4. **Der Schwerpunkt der (gemeinen) homogenen Schraubenlinie.** Wenn die Schraubenlinie (vergl. Fig. 266 a. f. S.) von A aus entsteht, wie es S. 186 entwickelt wurde, so befindet sich der erzeugende Punkt nach jedem vollen Umgange wieder senkrecht über A. Ist der erzeugende Punkt nach n vollen Umgängen bei weiterem Fortrücken (φ) in eine Lage gekommen, deren Projektion durch B in Fig. 266 dargestellt wird, so gilt für diese Lage (B)

$$x = r\cos\varphi = r\cos(n\,.\,2\pi + \varphi)$$
$$y = r\sin\varphi = r\sin(n\,.\,2\pi + \varphi)$$
$$z = nh + \frac{arc\,\varphi}{2\pi}\cdot h = \frac{n\,.\,2\pi + arc\,\varphi}{2\pi}\cdot h.$$

Da die Schraubenlinie stets dieselbe Neigung gegen die XY-Ebene hat, so ist ihre Projektion homogen, wenn sie es selbst ist (vergl. S. 414), und demnach ist der Schwerpunkt ihrer Projektion hier zugleich die Projektion ihres Schwerpunktes. Für jeden vollen Umgang fällt die Projektion des Schwerpunktes nach O, so daß O bei n Umgängen die Belastung $n\gamma$ erhält, falls diese für einen Umgang mit γ bezeichnet wird. Die Projektion des Schwerpunktes für den weiteren Fortgang von A bis B fällt nach Punkt S'', welcher mit $\frac{arc\,\varphi}{2\pi}\cdot\gamma$ belastet ist. Für den Schwerpunkt S' der Projektion der Schraubenlinie gilt also

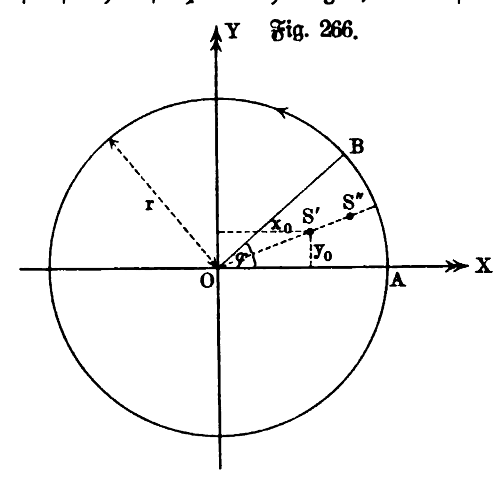


Fig. 266.

$$n\gamma\,.\,OS' = \frac{arc\,\varphi}{2\pi}\gamma\,.\,S'S'' = \frac{arc\,\varphi}{2\pi}\gamma\,(OS'' - OS'),$$

d. h. man hat

$$OS' = \frac{OS''\,.\,arc\,\varphi}{n\,.\,2\pi + arc\,\varphi}.$$

Da $OS'' = r\dfrac{\sin\frac{\varphi}{2}}{arc\frac{\varphi}{2}}$ ist, so hat man ferner

$$OS' = r\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{n\,.\,\pi + arc\frac{\varphi}{2}} = \frac{rh}{\pi z}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Nun ist

$$x_0 = OS'\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{rh}{2\pi z}\sin\varphi = \frac{hy}{2\pi z}$$

und

$$y_0 = OS'\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{2rh\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\pi z} = \frac{rh(1-\cos\varphi)}{2\pi z} = \frac{h(r-x)}{2\pi z}.$$

Der gesuchte Schwerpunkt S der Schraubenlinie liegt über S' in der Höhe $z_0 = \frac{1}{2}z$, da die Ebene durch die Mitte der Achsestrecke (z), senkrecht zu dieser, Schwerebene ist.

5. Der Schwerpunkt der homogenen Kettenlinie. Für ein Element der Kettenlinie MN ist das Moment in Bezug auf die X-Achse (vergl. Fig. 267) gegeben als $MN \,.\, y$. Da $M'N' = MN \cos\varepsilon$ und

$$\cos\varepsilon = \frac{H}{\sqrt{V^2 + H^2}} = \frac{c\gamma}{\sqrt{s^2\gamma^2 + c^2\gamma^2}} = \frac{c}{\sqrt{s^2 + c^2}}$$

ist, so gilt

$$MN \,.\, y = \frac{M'N'\sqrt{s^2 + c^2}}{c} \cdot y.$$

Da nach den früheren Entwickelungen (vergl. S. 357) $y = \sqrt{s^2 + c^2}$ ist, so gilt auch

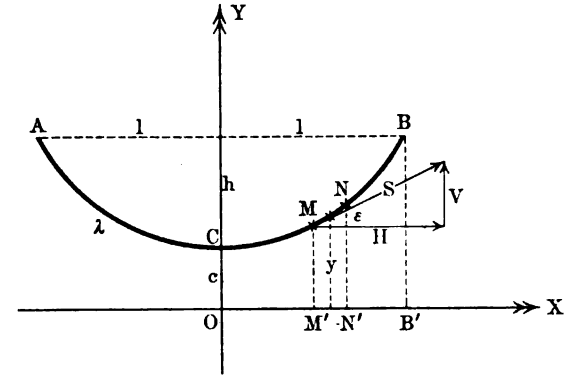
$$MN \,.\, y = \frac{M'N' \,.\, y^2}{c}.$$

Da $y = \frac{c}{2}\left(e^{+\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$ ist, so ist also

$$MN \,.\, y = \frac{c}{4} \cdot M'N'\left(e^{+\frac{2x}{c}} + 2 + e^{-\frac{2x}{c}}\right).$$

Dieser Ausdruck ist für jedes Element $M'N'$ von $OB' = l$ zu bilden und die Summe dieser Ausdrücke giebt das Moment von CB in Bezug auf die X-Achse. Teilt man OB' in n gleiche Teile von der Größe $\frac{l}{n}$, so ist also

Fig. 267.



$$\frac{c}{4} \cdot M'N' \,.\, e^{+\frac{2x}{c}},$$

$$\frac{c}{2} \cdot M'N',$$

$$\frac{c}{4}\, M'N'\, e^{-\frac{2x}{c}},$$

für $M'N' = \frac{l}{n}$ und $x = \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n}, \cdots \frac{nl}{n}$ zu bilden.

Für $M'N' e^{+\frac{2x}{c}}$ erhält man den Ansatz

$$K = \frac{l}{n} \cdot e^{\frac{2l}{nc}} + \frac{l}{n} \cdot e^{\frac{4l}{nc}} + \frac{l}{n} \cdot e^{\frac{6l}{nc}} \cdots + \frac{l}{n} \cdot e^{\frac{2nl}{nc}}.$$

Für $e^{\frac{2l}{nc}} = \alpha$ hat man demnach ferner

$$K = \frac{l}{n}(\alpha + \alpha^2 + \cdots \alpha^n) = \frac{\alpha(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1} \cdot \frac{l}{n}$$

$$= \frac{e^{\frac{2l}{nc}}\left(e^{\frac{2l}{c}} - 1\right)}{n\left(1 + \frac{2l}{nc} + \frac{1}{2}\frac{4l^2}{n^2c^2} + \cdots - 1\right)} \cdot l.$$

Für $lim\, n = \infty$ ist

$$K = +\frac{c}{2}\left(e^{+\frac{2l}{c}} - 1\right).$$

Dieselbe Betrachtung giebt für $M'N'e^{-\frac{2x}{c}}$

$$K' = -\frac{c}{2}\left(e^{-\frac{2l}{c}} - 1\right).$$

Für $M'N'$ selbst erhält man natürlich bei der Summation $OB' = l$. Das gesuchte Moment ist also

$$\frac{c}{4}(K + K') + \frac{c}{2}l = \frac{c^2}{8}\left(e^{+\frac{2l}{c}} - e^{-\frac{2l}{c}}\right) + \frac{c}{2}l.$$

Dasselbe Moment stellt sich dar als $\lambda \,.\, y_0$, falls man den Abstand des Schwerpunktes des Bogens BC von der X-Achse durch y_0 bezeichnet. Man hat also

$$y_0 = \frac{\frac{1}{8}c^2\left(e^{+\frac{2l}{c}} - e^{-\frac{2l}{c}}\right) + \frac{1}{2}cl}{\lambda}.$$

Da $s = \frac{c}{2}\left(e^{+\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right)$ ist, so ist $\lambda = \frac{c}{2}\left(e^{+\frac{l}{c}} - e^{-\frac{l}{c}}\right)$. Außerdem gilt für B

$$x = l,\quad y = h + c = \frac{c}{2}\left(e^{+\frac{l}{c}} + e^{-\frac{l}{c}}\right).$$

Demnach läßt sich y_0 auch schreiben als

$$y_0 = \frac{\frac{1}{2}\lambda(h + c) + \frac{1}{2}cl}{\lambda} = \frac{1}{2}(h + c) + \frac{c}{2}\,\frac{l}{\lambda}.$$

Bezeichnet man den Abstand des Schwerpunktes S von der Geraden AB durch $\overline{y_0}$, so ist

$$\overline{y_0} = (h + c) - y_0 = \frac{1}{2}(h + c) - \frac{c}{2}\,\frac{l}{\lambda}.$$

Für die ganze Kettenlinie liegt der Schwerpunkt auf der Symmetralen in derselben Höhe.

6. Der Schwerpunkt der Fläche eines ebenen homogenen Fünfecks, dessen Ecken durch Koordinaten gegeben sind. Man zerlegt das Fünfeck in Trapeze, wie es Fig. 268 zeigt, und wendet auf diese die Formel an, welche S. 427 angegeben wurde.

Fig. 268.

Für $(x_1 = 2,\, y_1 = 10)$, $(x_2 = 10,\, y_2 = 14)$, $(x_3 = 18,\, y_3 = 12)$, $(x_4 = 16,\, y_4 = 6)$, $(x_5 = 8,\, y_5 = 2)$ erhält man:

$$x = \frac{1760}{171} = 10{,}3 \qquad y = \frac{1472}{171} = 8{,}6.$$

7. Graphostatische Lösung der Aufgabe Nr. 6. Es ist der Schwerpunkt des unregelmäßigen Fünfecks $DEFGH$ zu bestimmen.

Die von D aus gezogenen Diagonalen (Fig. 269 I) liefern die Teildreiecke des Fünfecks, deren Inhalte den in Betracht zu ziehenden parallelen Kräften gleich sind. Zur Konstruktion dieser Kräfte sei (Fig. 269 II) am auf an senkrecht. Mit Benutzung der Einheit $\frac{1}{2}$ cm mache man $a2 = 2$, ah_1, ah_2 und ah_3 gleich den drei Höhen der Dreiecke EDF, FDG, GDH, sowie

Fig. 269.

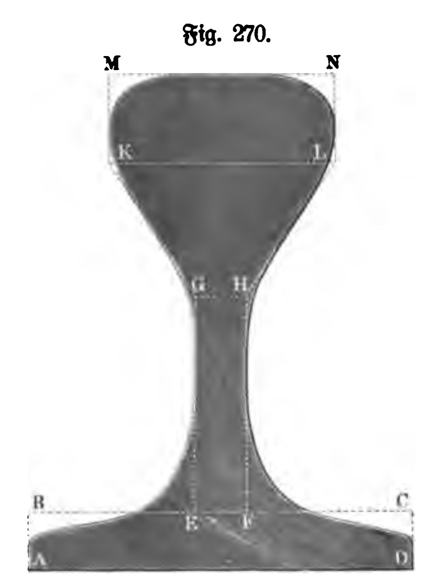
aa_1, aa_2 und aa_3 gleich den drei Grundlinien EF, FG, GH derselben Dreiecke. Verbindet man nun 2 mit a_1, a_2 und a_3 und zieht von h_1, h_2 und h_3 mit diesen Verbindungslinien Parallelen, so erhält man in den Linien aP_1, aP_2 und aP_3 die gesuchten Kräfte, welche in den Schwerpunkten der Teildreiecke angreifen. (a_1 und a_3 fallen in Fig. 269 II zusammen, da $EF = GH$ ist).

Nachdem nun (Fig. 269 III) das Kräftepolygon O, 1, 2, 3 mit $\frac{1}{4}$ cm als Einheit verzeichnet, der Pol C beliebig angenommen und die Verbindungslinien von C gezogen, konstruiere man (Fig. 269 I) das zuge=

hörige Seilpolygon $O_1 K_1 K_2 K_3 O_2$; die beiden äußersten Seiten desselben liefern in ihrem Durchschnittspunkte V einen Punkt der Resultante, und die mit den Kräften parallel gezogene Linie VV' giebt die Richtung dieser Resultante an. Man drehe jetzt die drei Kräfte P_1, P_2, P_3 in Fig. 269 I um 90°, und benutze dasselbe Kräftepolygon, indem man es um den Pol C ebenfalls um 90° gedreht denkt. Dabei werden alle Strahlen des neuen Polygons normal zu denen des alten, und es sind demnach die Seiten des zweiten Seilpolygons nur normal zu den Strahlen des bereits gezeichneten Seilpolygons (Fig. 269 III) zu zeichnen, ohne daß man die Zeichnung des neuen Kräftepolygons notwendig hätte. Der Durchschnittspunkt W der beiden äußersten Seiten des zweiten Seilpolygons $O_1' K_1' K_2' K_3' O_2'$ ist wiederum ein Punkt der gesuchten Resultante, deren Richtung in die mit den jetzigen Kraftrichtungen gezogene Parallele WW' fällt. Der Durchschnittspunkt S von VV' und WW' ist der gesuchte Schwerpunkt des vorgelegten Polygons, und die Strecke $O\,3$ im Kräftepolygon ist gleich der Summe der drei Kräfte, d. h. sie ist der Inhalt der gegebenen Figur. Bei der Einheit von $\frac{1}{4}$ cm und da $O\,3 = 4{,}28$ cm, ergiebt sich als Inhalt des Fünfecks $4 \,.\, 4{,}28 = 17{,}12$ qcm.

Man kann auch unmittelbar, wie in Fig. 264, den Schwerpunkt der drei schweren Punkte A_1, A_2, A_3 suchen, für welche die Flächen der Teildreiecke die Belastungen sind.

Fig. 270.



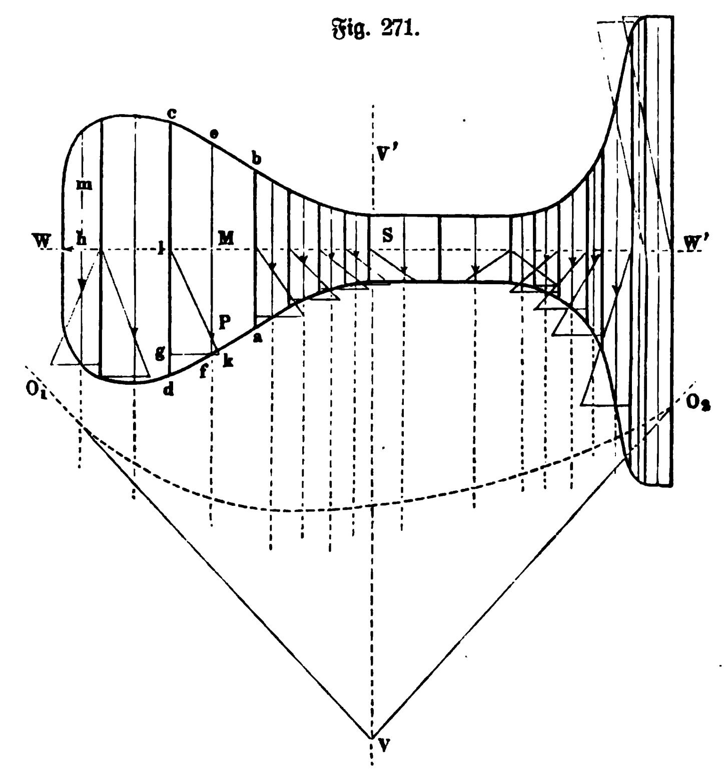
8. Der Schwerpunkt eines Schienenprofils. Der Schwerpunktsabstand x des Schienenprofils (Fig. 270) von der unteren Kante AD ist zu berechnen, unter der Voraussetzung, daß die krummlinigen Begrenzungen durch die in der Figur angegebenen geraden Umrisse ersetzt werden. Dabei sei $AB = 14$ mm, $AD = 93$ mm, $EF = 13$ mm, $EG = 53$ mm, $KL = 54$ mm, $KM = 21$ mm, und die Höhe des Paralleltrapezes $GHLK$ gleich 32 mm.

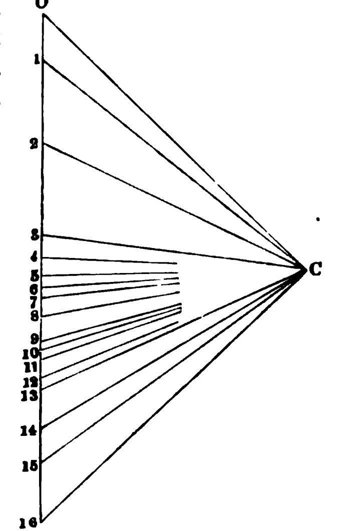
$$x = \frac{253666{,}2}{4197} = 60{,}4 \text{ mm}.$$

9. Graphostatische Behandlung von Nr. 8. Es ist der Schwerpunkt des in Fig. 271 vorgelegten Schienenprofils zu bestimmen.

Da die Figur in Bezug auf die Linie WW' symmetrisch ist, so ist das in der Nr. 7 angegebene Verfahren nur einmal in Bezug auf die zur Symmetrieachse WW' normal gerichteten Kräfte in Anwendung zu bringen. Zu dem Ende denke man das Schienenprofil durch Linien normal zu WW' in Flächenstreifen zerlegt, welche als Paralleltrapeze angesehen werden können und deren Höhen so klein gewählt werden mögen, daß man

Fig. 271.





die entsprechenden Schwerpunkte in den Mittellängen der betreffenden Paralleltrapeze annehmen darf. Ist diese Annahme in besonderen Fällen unzulässig, so ist der Schwerpunkt nach S. 426 und 427 zu bestimmen. Der Inhalt eines solchen Paralleltrapezes $m \cdot h$, unter m die Mittellänge und h die Höhe desselben verstanden, werde in ein Rechteck von der Seite a (gleich der gemeinschaftlichen Flächenbasis) verwandelt; dann ist also $mh = ax$ oder $a : m = h : x$, woraus sich x leicht konstruieren läßt. Für die Annahme $a = 2{,}6\,\text{cm}$ bestimmt man x aus der Proportion $\frac{a}{2} : \frac{m}{2} = \frac{h}{2} : x$ z. B. für $abcd$ auf folgende Weise.

Durch den Endpunkt f der Mittellänge ef des Paralleltrapezes $abcd$ zieht

man eine Parallele zur Symmetrieachse, trägt auf derselben $\frac{a}{4} = 0,65$ cm von g aus bis k ab, und verbindet k mit der Mitte l von cd; es ist $MP = x$ dann gleich der auf a reduzierten Fläche des Paralleltrapezes, unter M die Mitte der Mittellänge verstanden.

Beträgt x, mit dem Längenmaßstabe gemessen, z. B. 0,75 cm, so ist der Inhalt des Paralleltrapezes gleich $a \,.\, x = 2,6 \,.\, 0,75$ gleich 1,95 qcm.

Auf die hier angegebene Weise sind die Inhalte der Paralleltrapeze, das sind die angreifenden Kräfte, bestimmt und danach ist der Kräfteplan gezeichnet worden. Der Durchschnittspunkt V der äußersten Seiten des Seilpolygons ist ein Punkt der Resultante, welche normal zur Symmetrieachse WW' gerichtet ist, daher in der Linie VV' liegt, welche im Durchschnittspunkte S mit WW' den gesuchten Schwerpunkt liefert. Die Strecke $O \ldots 16$ ist gleich der Summe der Kräfte, d. h. gleich der Summe der 16 Paralleltrapeze oder gleich dem Inhalte des Schienenprofils. In der vorgelegten Zeichnung ist $O \ldots 16 = 6,7$ cm, daher der Inhalt des Schienenprofils gleich $2,6 \,.\, 6,7 = 17,42$ qcm. Das Schienenprofil ist in 0,65 der natürlichen Größe gezeichnet, daher ist der wahre Inhalt

$$17,42 \cdot \left(\frac{1}{0,65}\right)^2 = 41 \text{ qcm}.$$

10. Der Schwerpunkt eines sphärischen Dreiecks. Verbindet man die Ecken A, B, C mit dem Mittelpunkte O der Kugel, so sind die Flächen OAB, OBC, OCA bezw. $\frac{1}{2} R^2 \, arc\, \mathfrak{c}$, $\frac{1}{2} R^2 \, arc\, \mathfrak{a}$, $\frac{1}{2} R^2 \, arc\, \mathfrak{b}$, falls man den Kugelradius durch R und die Seiten der entstandenen Ecke durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bezeichnet. Projiziert man zwei der betrachteten Flächen auf die dritte, etwa OBC und OCA auf OAB, so wird damit auf diese dritte zugleich das sphärische Dreieck F projiziert. Für F' als Projektion von F ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2} R^2 (arc\, \mathfrak{c} - arc\, \mathfrak{a} \cos \beta - arc\, \mathfrak{b} \cos \alpha).$$

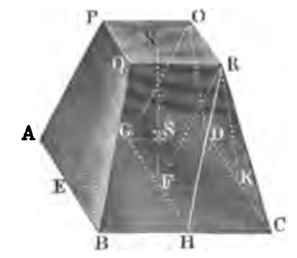
Nach dem Satze auf S. 433 ist, falls der Abstand des Schwerpunktes des sphärischen Dreiecks von OAB durch x_3 bezeichnet wird,

$$RF' = x_3 F,$$

so daß also gilt

$$x_3 = \frac{90^0}{\alpha + \beta + \gamma - 180^0} \cdot \frac{arc\, \mathfrak{c} - arc\, \mathfrak{a} \cos \beta - arc\, \mathfrak{b} \cos \alpha}{\pi} \cdot R.$$

Fig. 272.



Die Abstände x_1 und x_2 bezw. von OBC und OCA ergeben sich auf entsprechende Weise.

11. Der Schwerpunkt eines (rechteckigen) Obelisken. Die Verbindungsgerade der Schwerpunkte der oberen und der unteren Grundfläche ist eine Schwerlinie, auf welcher die Höhenlage des Schwerpunktes bestimmt werden muß. Dazu zerlegt man den Obelisken, wie Fig. 272 zeigt, in ein Schiefkant $AEFG\,PQRO$, in zwei dreiseitige

Prismem $EQBFRH$ und $OGDRFK$ und in eine vierseitige Pyramide $R(FHKC)$.

Für $AB = a$, $BC = b$, $PQ = a'$, $QR = b'$ ist bei einer Höhe h gemäß dem Momentensatze der Abstand des Schwerpunktes von der unteren Grundfläche

$$\frac{h}{2} \cdot \frac{ab + a'b + ab' + 3a'b'}{2ab + a'b + ab' + 2a'b'}.$$

12. Der Schwerpunkt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas (z. B. eines Keils). Es ist der Schwerpunkt eines dreiseitigen schief abgeschnittenen Prismas zu bestimmen, dessen Kanten a, b, c gegen die Grundebene ABC unter dem Winkel α geneigt sind (Fig. 273 a).

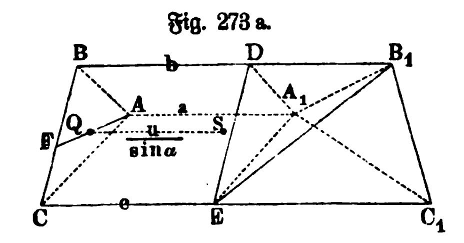


Fig. 273 a.

Zur Bestimmung des Schwerpunktsabstandes u von der Grundebene ABC lege man durch A_1 eine Ebene parallel zu ABC, so daß der Körper in das dreiseitige Prisma $ABCEDA_1$ und in die vierseitige Pyramide $EDB_1C_1A_1$ zerlegt wird, welche letztere durch die Ebene EB_1A_1 wieder in zwei dreiseitige Pyramiden zerlegt werden mag. Es seien die Seiten des Normalschnitts p, q, r, und die Höhen desselben h_1, h_2, h_3, so daß p die normale Entfernung der Kante BB_1 von CC_1, und h_1 die der Kante AA_1 von der Ebene CBB_1C_1, q die Entfernung der Kante AA_1 von CC_1, und h_2 die der Kante BB_1 von der Ebene CAA_1C_1 bezeichnet. In Bezug auf ABC als Momentenebene ist das Moment des Prismas $ABCEDA_1$

$$\frac{ph_1}{2}\, a \frac{a \sin\alpha}{2},$$

das Moment der Pyramide EDB_1A_1

$$\frac{ph_1(b - a)}{6} \cdot \frac{(3a + b)\sin\alpha}{4},$$

das Moment der Pyramide $EC_1B_1A_1$

$$\frac{ph_1(c - a)}{6} \cdot \frac{(2a + b + c)\sin\alpha}{4}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$u = \tfrac{1}{4} \sin\alpha \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc}{a + b + c}.$$

Zur Berechnung der Schwerpunktsentfernung x_1 von der Ebene CBB_1C_1 haben wir

das Moment des Prismas $ABCEDA_1$

$$\frac{ph_1}{2}\, a \frac{h_1}{3}$$

und das Moment der Pyramide $EDB_1C_1A_1$

$$\frac{b-a+c-a}{2}p\frac{h_1}{3}\cdot\frac{h_1}{4},$$

daher

$$x_1=\frac{h_1}{4}\cdot\frac{2a+b+c}{a+b+c}.$$

Bei entsprechender Zerlegung findet sich der Schwerpunktsabstand x_2 von der Ebene CAA_1C_1

$$x_2=\frac{h_2}{4}\cdot\frac{a+2b+c}{a+b+c}$$

und der von der Ebene ABB_1A_1

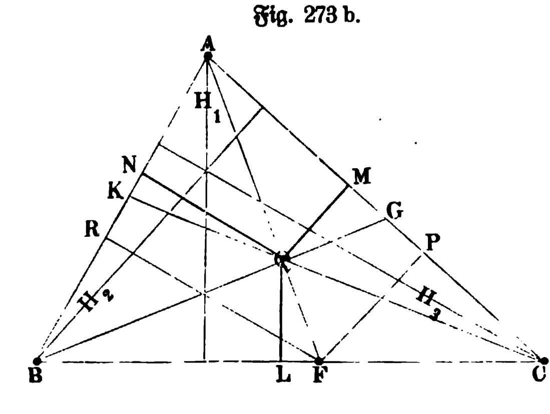
$$x_3=\frac{h_3}{4}\cdot\frac{a+b+2c}{a+b+c}.$$

Man ziehe durch den Schwerpunkt S eine Parallele zu den Kanten des Prismas, wodurch sich in der Grundebene ABC der Punkt Q ergeben mag. Verbindet man denselben mit A, B und C (Fig. 273 b), so ist

$$h_1:x_1=AF:QF=H_1:QL$$
$$h_2:x_2=BG:QG=H_2:QM$$
$$h_3:x_3=CK:QK=H_3:QN,$$

wenn wir mit H_1, H_2, H_3 die Höhen des Dreiecks ABC bezeichnen.

Fig. 273 b.



Hieraus folgt:

$$QL=\frac{H_1}{4}\cdot\frac{2a+b+c}{a+b+c}$$
$$QM=\frac{H_2}{4}\cdot\frac{a+2b+c}{a+b+c}$$
$$QN=\frac{H_3}{4}\cdot\frac{a+b+2c}{a+b+c},$$

wodurch der Punkt Q in der Grundebene ABC der Lage nach bestimmt ist. Weiter ergiebt sich aus der Proportion $\frac{AF}{QF}=\frac{H_1}{QL}$

$$\frac{AQ}{FQ}=\frac{2a+3b+3c}{2a+b+c},$$

d. h. Q ist Schwerpunkt zweier Gewichte, in A und F wirksam, die den Ausdrücken $2a+b+c$ und $2a+3b+3c$ proportional sind.

In gleicher Weise soll noch das Verhältnis von BF und CF bestimmt werden. Es ist

$$1)\ \frac{BC}{FC}=\frac{H_2}{FP}\quad\text{und}\quad\frac{QM}{FP}=\frac{AQ}{AF}=\frac{H_1-QL}{H_1}$$

oder

$$FC=\frac{H_1}{H_2}\cdot\frac{QM}{H_1-QL}\cdot BC;$$

$$2)\ \frac{BC}{BF} = \frac{H_3}{FR} \quad \text{und} \quad \frac{QN}{FR} = \frac{AQ}{AF} = \frac{H_1 - QL}{H_1}$$

oder

$$FB = \frac{H_1}{H_3} \cdot \frac{QN}{H_1 - QL} \cdot BC,$$

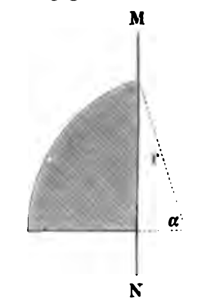
daher

$$\frac{BF}{CF} = \frac{H_2}{H_3} \cdot \frac{QN}{QM} = \frac{a + b + 2c}{a + 2b + c},$$

d. h. F ist der Schwerpunkt von zwei Gewichten, die proportional den Ausdrücken $a + b + 2c$ und $a + 2b + c$ in den Punkten C und B wirksam sind. Hieraus folgt schließlich: Q ist der Schwerpunkt von drei in den Punkten A, B, C wirksamen Gewichten, welche den Ausdrücken $2a + b + c$, $a + 2b + c$, $a + b + 2c$ proportional sind, Q ist also nicht Schwerpunkt der Grundebene A, B, C, und SQ fällt nicht mit der Flächen-Schwerpunktsachse des schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas zusammen.

13. Die Oberfläche und der Inhalt der Kuppel eines Klostergewölbes. Wenn sich die schraffierte Fläche der Fig. 274 um MN dreht, so entsteht ein Klostergewölbe. Zieht man durch den Scheitel von α eine Parallele zu MN, so ist der Sektor für diese Achse als Summe der schraffierten Fläche und des Dreiecks aufzufassen, so daß der Abstand x' des Schwerpunktes der schraffierten Fläche von dieser Hülfsachse leicht durch den Momentensatz bestimmt werden kann. Verkleinert man x' um $r \cos \alpha$, so erhält man den entsprechenden Abstand x für die Achse MN. Für den Bogen ist der Abstand des Schwerpunktes von der Hülfsachse fast unmittelbar gegeben. Man erhält

Fig. 274.



$$O = 2r^2\pi(\sin\alpha - \operatorname{arc}\alpha \cos\alpha)$$
$$V = \tfrac{1}{3}r^3\pi[2\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\cos\alpha(\sin 2\alpha - 6\operatorname{arc}\alpha)].$$

Sind die Höhe h und die Weite $2l$ der Kuppel gegeben, so ist $r = \frac{h^2 + l^2}{2l}$ und $\sin\alpha = \frac{h}{r}$.

14. Der Mantel und das Volumen eines Klauen. Von einem normalen Cylinder mit kreisförmiger Basis ist ein cylindrisches Stück durch eine Ebene parallel der Achse abgeschnitten worden, dessen Grundebene also ein Kreisabschnitt ist, zum Mittelpunktswinkel 2α gehörig. Der auf die Weise entstandene Cylinder werde an seinen Enden beliebig schief abgeschnitten. Es ist der Inhalt, sowie die krumme Oberfläche des nun entstandenen Körpers zu berechnen. Die

Fig. 276.

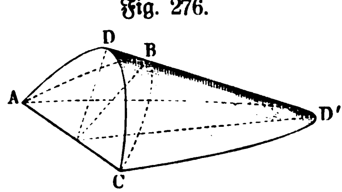


Fig. 275.

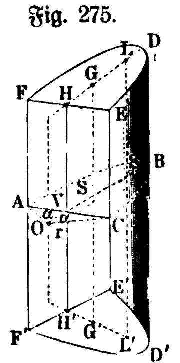


Fig. 275 (a. v. S.) stelle den betreffenden Körper vor, ABC sei der normale Querschnitt, r der Halbmesser des Kreises, zu dem der Abschnitt ABC gehört; ferner sei $DD' = h$, $EE' = a$, $FF' = b$.

Ist S der Schwerpunkt des Kreisabschnittes ABC, und GG' durch S parallel der Seite des Cylinders gelegt, so ist der Inhalt (vergl. S. 415)

$$V = GG' \text{ . (Abschnitt } ABC\text{), d. h. man hat}$$

$$V = \frac{r^2}{12} \, \frac{4\,[2h - (a+b)]\, \sin\alpha^3 + 3\,(arc\, 2\alpha - \sin 2\alpha)\,(a + b - 2h\cos\alpha)}{1 - \cos\alpha}.$$

Ist S' der Schwerpunkt des Kreisbogens ABC und LL' durch S' parallel der Seite des Cylinders gelegt, so ist der Inhalt der krummen Oberfläche, d. h. der Mantel (vergl. S. 415)

$$M = LL' \text{ . (Bogen } ABC\text{), d. h. man hat}$$

$$M = r\,\frac{[2h - (a+b)]\sin\alpha + arc\,\alpha\,(a + b - 2h\cos\alpha)}{1 - \cos\alpha}.$$

Fallen bei dem eben betrachteten Körper die Linien FE und $F'E'$ mit AC zusammen, so entsteht ein **Klauen** oder **Huf** (Fig. 276 a. v. S.). Für diesen ist

$$V = \frac{hr^2}{6}\,\frac{4\sin\alpha^3 - 3\cos\alpha\,(arc\,2\alpha - \sin 2\alpha)}{1 - \cos\alpha}$$

$$M = 2hr\,\frac{\sin\alpha - arc\,\alpha\cos\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

Wird in dem Klauen AC gleich dem Durchmesser $2r$, der Mittelpunktswinkel 2α also zu 180^0, so ist

$$V = \tfrac{2}{3}hr^2 \text{ und } M = 2hr.$$

15. Der Schwerpunkt des Umdrehungsparaboloids. Der Körper, den Fig. 277 darstellt, kann durch Umdrehung einer Parabel entstanden gedacht werden, deren Gleichung für AM als X-Achse $y^2 = 2px$ lautet. Für $AM = x$ und $BM = y$ hat die Fläche BMC den Wert $y^2\pi = 2px\pi$, so daß also die Mittelschnittsformel sowohl für das Volumen, als auch für das Massenmoment anwendbar ist.

Fig. 277.

Für $AM = h$ und $AN = \frac{1}{2}h$ ist bezw. $y^2 = 2ph$ und $y^2 = ph$, so daß die Flächen DNE und BMC bezw. $2ph\pi$ und $ph\pi$ sind.

Man hat also

$$V = \frac{h}{6}\,(0 + 4ph\pi + 2ph\pi) = ph^2\pi.$$

Für eine Ebene durch A, parallel zu BMC, giebt der Momentensatz

$$\frac{h}{6}\left[0 + (4ph\pi)\frac{h}{2} + (2ph\pi)h\right] = \tfrac{2}{3}h^3p\pi.$$

Für $AS = x$ ist also

$$x \cdot ph^2\pi = \tfrac{2}{3} h^3 p \pi,$$

d. h. man hat

$$AS = x = \tfrac{2}{3} h.$$

16. Der Schwerpunkt des einschaligen Umdrehungshyperboloids. Ist die Gleichung der Hyperbel gegeben als $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$, so hat ein Schnitt des Körpers in der Höhe z die Fläche $x^2\pi = a^2\pi + \frac{a^2}{b^2} z^2\pi$, so daß sich also die Mittelschnittsformel für Volumen und Moment anwenden läßt (Fig. 278). Statt dessen kann man beide Größen auch unmittelbar berechnen.

Als Höhe des Schwerpunktes über der XY-Ebene findet man:

$$z_0 = \tfrac{3}{4} h \cdot \frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2}.$$

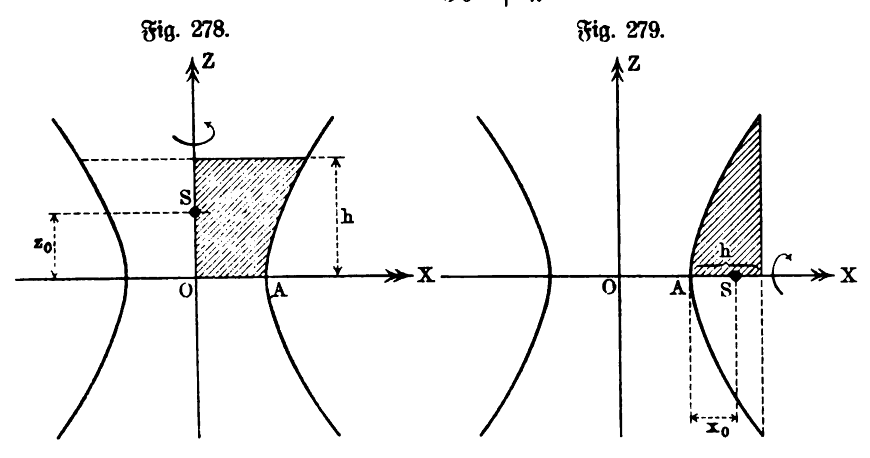


Fig. 278. Fig. 279.

17. Der Schwerpunkt des zweischaligen Umdrehungshyperboloids. Ist die Gleichung der Hyperbel gegeben als $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$, so ist der Abstand des Schwerpunktes von A (Fig. 279) gegeben als

$$x_0 = \frac{h}{4} \cdot \frac{8a + 3h}{3a + h}.$$

Übungen zur Lehre vom Schwerpunkt.

1. Der Schwerpunkt des Umfanges eines homogenen Sechsecks (Stangensechsecks) ist zu bestimmen. Vergl. Anwendung Nr. 1.

2. Eine Strecke $AB = l$, welche in n gleiche Teile zerlegt ist, wird in den einzelnen Teilpunkten, von A aus gerechnet, mit Belastungen versehen, welche bezw. proportional sind zu $1 . 2 . 3,\ 2 . 3 . 4,\ 3 . 4 . 5, \ldots$ Wo liegt der Schwerpunkt für n als Anzahl und wo für $\lim n = \infty$?

$$AS = \frac{l}{n} \cdot \frac{4n+1}{5} \text{ geht für } \lim n = \infty \text{ über in } AS = \tfrac{4}{5} l.$$

3. Der Schwerpunkt eines schweren Kreisbogens ist zu bestimmen, dessen zugehörige Sehne 15 m und dessen Halbmesser 12 m Länge hat.

Er ist 11,11 m vom Mittelpunkte entfernt.

4. Wo liegt der Schwerpunkt eines schweren Bogens von demselben Halbmesser, dessen Mittelpunktswinkel $34^\circ 7'$ ist?

11,82 m vom Mittelpunkte entfernt.

5. Der Schwerpunkt des Korbbogens der Anwendung Nr. 3 ist zu bestimmen für $P_2B = P_2C = R$ und $P_1A = P_1B = P_3C = P_3D = r$, ebenso die entstandene Oberfläche.

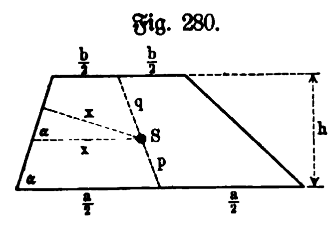
6. Der Schwerpunkt der Kettenlinie ist graphostatisch zu bestimmen, falls der Bogen durch ein n-Eck ersetzt wird. Man vergl. die zeichnerisch gefundene Lösung mit der genauen Formel der Anwendung Nr. 4.

7. Die Aufgabe Nr. 6 ist für die Cykloide durchzuführen.

Der Schwerpunkt eines Bogens hat von der Basis, auf welcher der Kreis vom Radius r rollt, den Abstand $\frac{4}{3} r$.

Desgl. für die Fläche, deren Schwerpunktsabstand $\frac{5}{6} r$ beträgt.

Fig. 280.



8. Der Schwerpunkt der Fläche eines homogenen Sechsecks ist gemäß Anwendung Nr. 6 und Nr. 7 zu bestimmen.

9. Von einem Paralleltrapez (Fig. 280) sind die parallelen Seiten a und b, die Höhe h und ein Winkel α an der unteren Grundlinie gegeben. Es ist der senkrechte Abstand x des

Schwerpunktes S von derjenigen der nicht parallelen Seiten des Trapezes zu bestimmen, welche Schenkel des Winkels α ist. Man hat $x = x' \sin\alpha$, d. h.

$$x = \frac{1}{3}\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}\sin\alpha.$$

10. Der Schwerpunkt für den Querschnitt in Fig. 281 ist zu bestimmen.

$$s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}.$$

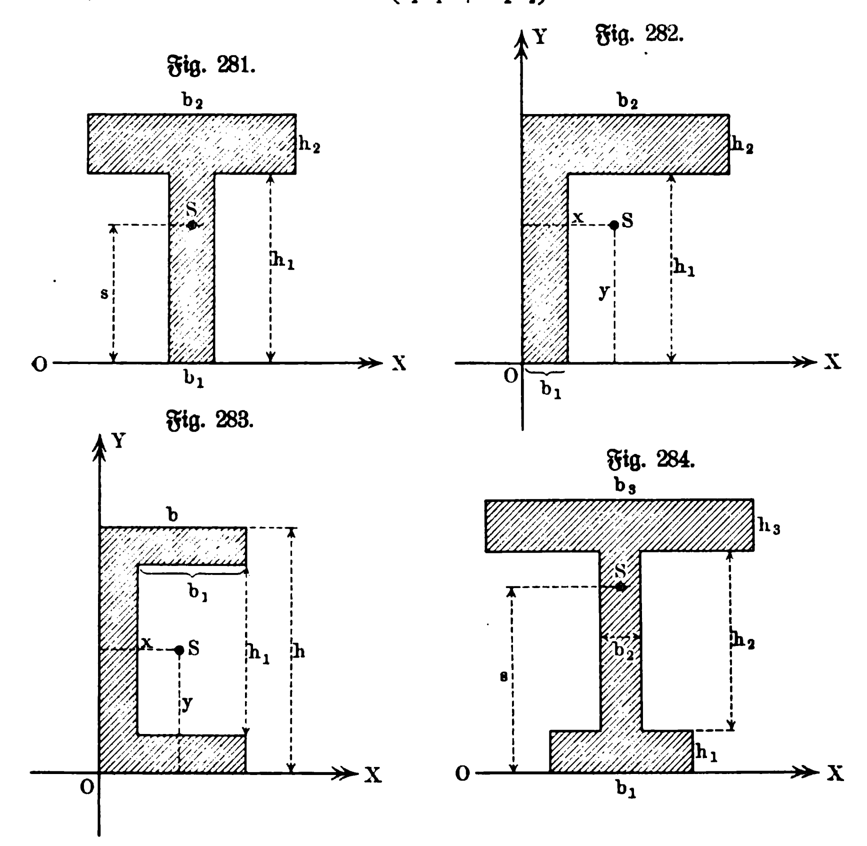


Fig. 281. Fig. 282. Fig. 283. Fig. 284.

11. Der Schwerpunkt für den Querschnitt in Fig. 282 ist zu bestimmen.

Da Fig. 282 aus Fig. 281 durch Verschiebung des Stieles (nach links) entstanden gedacht werden kann, bei welcher sich das Moment für die Grundlinie nicht ändert, so ist

$$y = s.$$

Außerdem ist

$$x = \frac{b_1^2 h_1 + b_2^2 h_2}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}.$$

12. Der Schwerpunkt für den Querschnitt in Fig. 283 (a. v. S.) ist zu bestimmen.

$$x = \frac{1}{2}\frac{(h - h_1)b^2 + h_1(b - b_1)^2}{(h - h_1)b + h_1(b - b_1)}, \qquad y = \frac{h}{2}.$$

13. Der Schwerpunkt für den Querschnitt in Fig. 284 (a. v. S.) ist zu bestimmen.

$$s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2) + b_3 h_3 (2h_1 + 2h_2 + h_3)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3)}.$$

14. Der Schwerpunkt für den Querschnitt in Fig. 285 ist zu bestimmen.

$$s = \frac{h_1^2(b_1 + 2b_2) + (2h_1 + h_2)\,3 b_3 h_2}{3[h_1(b_1 + b_2) + 2 b_3 h_2]}.$$

15. Der Schwerpunkt eines Ringstückes vom Centriwinkel 2α und den Radien r_1 und r_2 ist zu bestimmen. Für den Abstand z vom Mittelpunkte gilt

$$z = \frac{2}{3}\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\operatorname{arc}\alpha}.$$

Für den Halbring ($2\alpha = 180^0$), dessen Umdrehung eine Hohlkugel erzeugt, ergiebt sich

$$z = \frac{4}{3\pi}\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2},$$

Fig. 285.

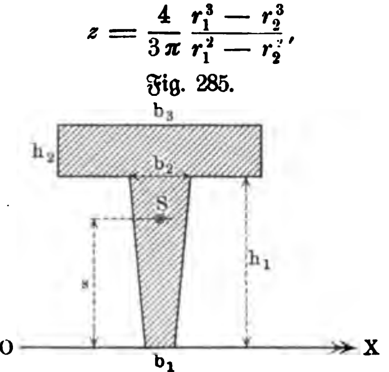
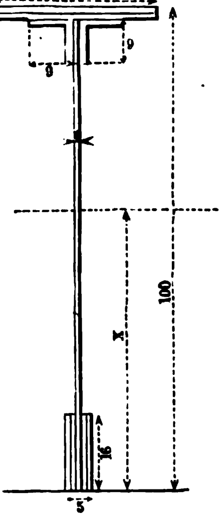


Fig. 286.



wie unmittelbar aus dem einen der Pappus-Guldinschen Sätze folgt.

16, 17, 18. Graphostatische Behandlung der Nr. 12, 13, 14.

19. Rechtfertigung der Landschen Konstruktion (vergl. S. 427) für das Trapez.

20. Desgl. für das Viereck.

21. Der Schwerpunktsabstand x des in Fig. 286 gezeichneten T-förmigen Querschnittes von der unteren Kante ist zu berechnen, wenn die in der Figur eingeschriebenen Maße Centimeter bedeuten.

$$x = \frac{33.2.99 + 18.1.97{,}5 + 8.2.93 + 98.1.49 + 16.4.8}{33.2 + 18.1 + 8.2 + 98\ 1 + 16.4}$$

$$= \frac{15091}{262} = 57{,}6\ \mathrm{cm}.$$

22. Der Schwerpunkt eines schweren Kreisausschnittes ist zu bestimmen, dessen Mittelpunktswinkel $\frac{5}{6}\pi$ und dessen Halbmesser 6 m ist.

Der Abstand vom Mittelpunkte ist 2,951 m.

23. Das zwischen zwei parallelen Sehnen von der Länge $2a$ und $2b$ eines Kreises gelegene Stück sei schwer.

Wo liegt der Schwerpunkt, wenn der Halbmesser des Kreises gleich r gegeben ist?

Die Fläche ist gleich der Differenz zweier Kreisabschnitte $A_1 - A_2$. Der Schwerpunkt liegt auf der vom Mittelpunkte des Kreises auf die Sehnen gefällten Normale, und sein Abstand z vom Mittelpunkte ist

$$z = \frac{2}{3}\,\frac{a^3 - b^3}{A_1 - A_2}.$$

24. Fällt man von dem Mittelpunkte des Kreises bei der letzten Bestimmung die angegebene Normale, so teilt dieselbe das vorige Flächenstück in zwei kongruente Teile.

Es ist der Schwerpunkt eines solchen schweren Teiles zu bestimmen.

Die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte stimmt mit dem in der vorigen Aufgabe gefundenen Werte z überein. Die Entfernung x desselben von der gefällten Normale aber ist, wenn A_1, A_2 und r die in der vorigen Aufgabe angegebenen Bedeutungen haben, α und β aber die halben Centriwinkel der Sehnen bezeichnen,

$$x = \frac{1}{6}r^3\,\frac{3(\cos\beta - \cos\alpha) + \cos\alpha^3 - \cos\beta^3}{\frac{1}{2}(A_1 - A_2)}.$$

25. Es sei der Schwerpunkt von dem Flächenstück zu bestimmen, das von zwei Tangenten (die von einem Punkte aus an einen Kreis gezogen sind) und dem dazu gehörigen Bogen begrenzt ist. Zu dem Ende ist der Halbmesser r des Kreises und der zugehörige Centriwinkel 2α gegeben.

Die Entfernung x vom Mittelpunkte des Kreises ist

$$\frac{2}{3}r\,\frac{\sin\alpha^3}{\sin 2\alpha - 2\,arc\,\alpha\cos\alpha^2}.$$

26. Der Schwerpunkt für die Fläche $ABCD$ des in Fig. 265 dargestellten Korbbogens ist zu bestimmen. Der Abstand x von AD folgt nach dem Momentensatze als

$$x = \frac{4 + 28\sin\alpha + \cos\alpha(\sin 2\alpha - 24\,arc\,\alpha)}{\pi + 6\,arc\,\alpha - \sin 2\alpha}\cdot\frac{r}{6}.$$

Für $\alpha = 30^0$ ist $x = 0{,}242\,r$.

27. Der Schwerpunkt eines Kugelabschnittes ist zu bestimmen, der zu einer Kugel vom Halbmesser 4,2 cm gehört und sich durch den Mittelpunktswinkel $15^0\,10'$ bestimmt.

Er ist 4,175 cm vom Mittelpunkte entfernt.

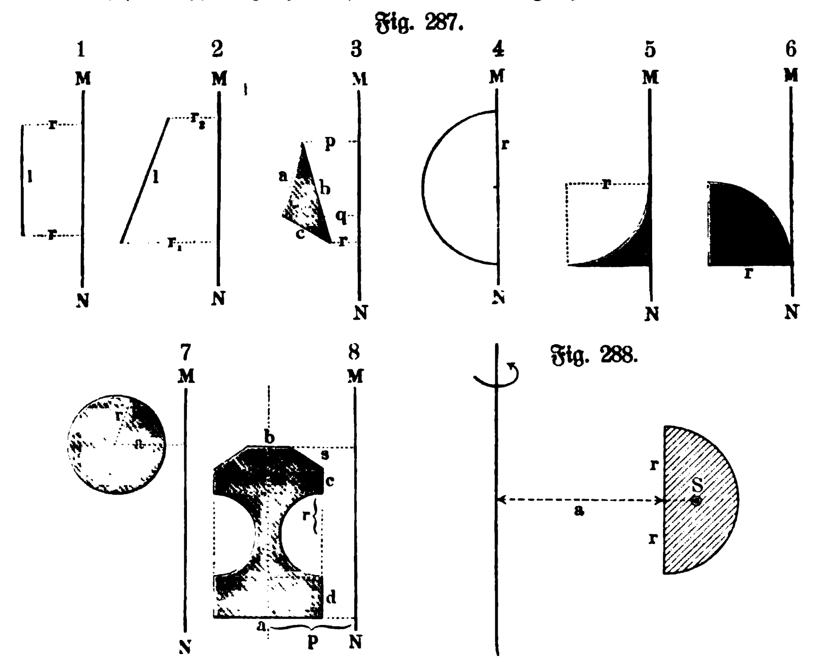
28. Aus einer Halbkugel ist ein normaler Kegel mit kreisförmiger Basis herausgeschnitten worden, der mit der Halbkugel dieselbe Höhe hat, dessen Grundflächenhalbmesser aber gleich der Hälfte des Kugelhalbmessers ist. Es ist der Schwerpunkt des ausgehöhlten Körpers zu bestimmen.

Die Entfernung von der unteren Grundebene ist

$$0{,}449\, r.$$

29. Für die nebenstehend gezeichneten Figuren (Fig. 287), bei denen MN eine feste Achse bezeichnet, sind aus den eingeschriebenen Maßen die In-

Fig. 287.



halte der Oberflächen F und der Volumina V der Umdrehungskörper zu bestimmen, die bei einer vollständigen Umdrehung der Figuren um MN entstehen.

1. $F = 2\pi r l$; $V = r^2 \pi l$,
2. $F = \pi l (r_1 + r_2)$; $V = \frac{\pi}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\sqrt{l^2 - (r_1 - r_2)^2}$,
3. $F = \pi[a(p + q) + b(p + r) + c(q + r)]$;
   $V = \frac{2}{3}\pi f(p + q + r)$, wenn f den Inhalt des durch die Seiten a, b, c bestimmten Dreiecks bezeichnet,
4. $F = 4\pi r^2$; $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,
5. $F = 1{,}14159\,\pi r^2$; $V = 0{,}09587\,\pi r^3$,
6. $F = 1{,}14159\,\pi r^2$; $V = 0{,}90413\,\pi r^3$,
7. $F = 4\pi^2 a r$; $V = 2\pi^2 a r^2$,
8. $F = 2\pi p(a + b + 2c + 2d + 2s + 2r\pi)$;
   $V = \pi p[a(2c + 2d + e + 4r) + be - 2r^2\pi]$.

30. Für einen Ring von halbkreisförmigem Querschnitt (Fig. 288) ist Oberfläche und Inhalt zu bestimmen.

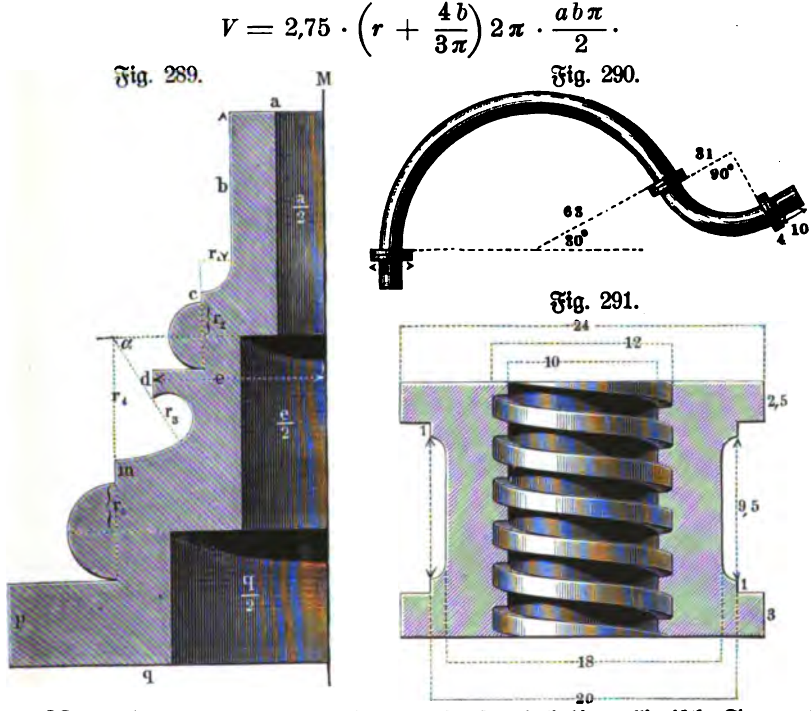
$$O = \left(a + \frac{2r}{\pi}\right) 2\pi \,.\, r\pi + a\, 2\pi \,.\, 2r$$

$$V = \left(a + \frac{4r}{3\pi}\right) 2\pi \,.\, \tfrac{1}{2} r^2 \pi.$$

31. Eine Schraubenspindel, welche durch Bewegung einer Halbellipse von den Halbachsen a und b längs eines Cylinders vom Radius r entstanden ist, umfaßt $2^3/_4$ Umgänge. Welchen Inhalt hat der Schraubenkörper der Spindel, wenn die Achse $2a$ in den Cylindermantel fällt?

$$V = 2{,}75 \cdot \left(r + \frac{4b}{3\pi}\right) 2\pi \cdot \frac{ab\pi}{2}.$$

Fig. 289. Fig. 290. Fig. 291.



32. Wie findet man die Schwerpunkte für beliebige elliptische Segmente? Vergl. S. 431.

33. Zur numerischen Berechnung der Oberfläche und des kubischen Inhaltes von dem nebengezeichneten Säulenfuße (Fig. 289) seien die eingeschriebenen Abmessungen in Centimetern gegeben.

$r_1 = 1$; $r_2 = r_3 = 2$; $r_5 = 3$; $a = 7$; $b = 6$; $c = 1$; $d = m = 1$; $e = 12$; $p = 4$; $q = 21$; $\alpha = 45^0$.

$$F = 4\,249{,}11 \text{ qcm}$$
$$V = 12\,172{,}03 \text{ cbcm}.$$

34. Das in Fig. 290 gezeichnete Rohr aus Kupfer vom specifischen Gewicht 8,8 bestehend, hat eine Metallstärke von 6 mm und einen äußeren

Durchmesser von 8 cm. Wie schwer ist dasselbe, wenn die Zahlen der Figur Centimeter bedeuten?

Rohrquerschnitt gleich 13,95 qcm; Flantschquerschnitt gleich 140,39 qcm; Inhalt der drei Flantschen 3 . 140,39 . 4 = 1,685 cbdm; Inhalt der beiden geraden Rohrenden gleich 13,95 . 10 . 2 = 0,279 cbdm; Inhalt des großen Bogens 13,95 . 63 . 2 $\pi \frac{150}{360}$; Inhalt des kleinen Bogens 13,95 . 31 . 2 $\pi \frac{90}{360}$; beide Bogen haben zusammen den Inhalt 13,95 . $\pi \left(\frac{105}{2} + \frac{31}{2}\right)$ = 2,980 cbdm. Der Inhalt der ganzen Rohrverbindung ist deshalb gleich 4,944 cbdm und das Gewicht desselben beträgt 4,944 . 8,8 = 43,5 kg.

35. Es ist das Gewicht der aus Messing vom specifischen Gewicht 8,5 bestehenden Schraubenmutter (Fig. 291 a. v. S.) zu berechnen, wenn die in der Figur angegebenen Maße Centimeter bedeuten.

Inhalt des vollen Körpers 1769,417 . π.

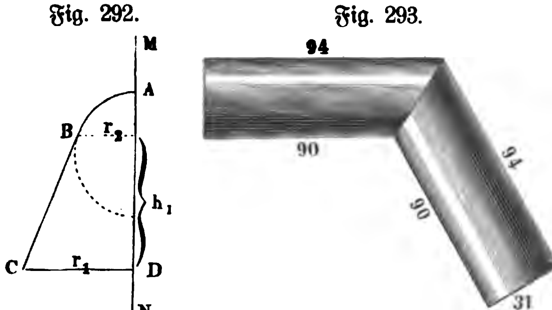
Inhalt des positiven Schraubengewindes 17 $\cdot \frac{12^2\pi - 10^2\pi}{2 \, . \, 4}$.

Inhalt der zu subtrahierenden Höhlung $\frac{17}{2} \cdot \frac{12^2\pi + 10^2\pi}{4} = 518{,}5\,\pi$.

Gewicht der Mutter 1,250917 . π . 8,5 = 33,4 kg.

36. Um die Linie MN (Fig. 292) als Drehachse werde die Figur $ABCD$ gedreht, die dadurch gebildet worden ist, daß man CB als Tangente für den zu dem Bogen AB gehörigen Kreis konstruierte. Durch die Umdrehung entsteht ein normaler abgestumpfter Kegel, der auf seiner oberen Grundfläche einen Kugelabschnitt trägt.

Fig. 292. Fig. 293.



Es ist die Entfernung des Schwerpunktes der Figur $ABCD$ von der Drehachse MN zu bestimmen, wenn $r_2 = \frac{1}{2} r_1$ und $h_1 = \frac{1}{2} r_1 \sqrt{3}$ ist.

Es ist

$$\frac{\pi h_1}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + \frac{\pi}{6} h_2 (3 r_2^2 + h_2^2)$$
$$= \left\{\frac{r_1 + r_2}{2} h_1 + \frac{r^2}{4} \cdot \tfrac{2}{3}\pi - \frac{r^2}{4} \sin 120^0\right\} 2\pi x,$$

wobei h_2 die Höhe des Kugelabschnittes und r den Radius der Kugel bezeichnen.

Hieraus ergiebt sich bei Benutzung der obigen Werte

$$\frac{\pi}{24} \cdot r_1^3 \frac{68}{9} \sqrt{3} = \frac{\pi}{9} \cdot r_1^2 x (6\sqrt{3} + \pi), \text{ d. h.}$$
$$x = 0{,}3626\, r_1.$$

37. Den Inhalt, sowie den Mantel des Ofenrohrkniestückes (Fig. 293) nach den angegebenen Maßen in Centimetern zu berechnen.

$$V = \frac{\pi}{4}\, 31^2 \frac{94 + 90}{2} \cdot 2 = 138{,}88 \text{ cbdm}$$

$$M = \pi \,.\, 31 \frac{94 + 90}{2} \cdot 2 = 17\,920 \text{ qcm.}$$

38. Wo liegt der Schwerpunkt des Mantels eines Kegelstumpfes? Der Abstand z von der unteren Grundfläche ist gegeben als

$$z = \frac{h}{3} \cdot \frac{r + 2\varrho}{r + \varrho},$$

falls r der Radius der unteren und ϱ der Radius der oberen Grundfläche und h die Höhe ist.

39. Wo liegt der Schwerpunkt eines Pyramidenstumpfes? Der Abstand z von der Endfläche U ist gegeben als

$$z = \frac{h}{4}\, \frac{U + 2\sqrt{UO} + 3O}{U + \sqrt{UO} + O},$$

falls O die andere Endfläche und h die Höhe bezeichnet.

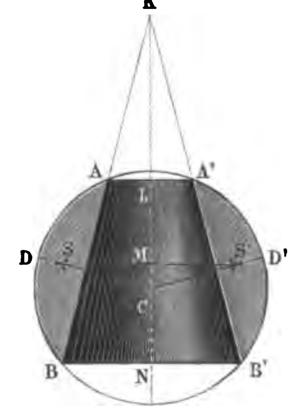
40. Wo liegt der Schwerpunkt eines Oktanten eines Ellipsoids von den Halbachsen a, b, c?

Nimmt man die Halbachsen als entsprechendes Kreuz, so ist

$$x_0 = \tfrac{3}{8}a, \quad y_0 = \tfrac{3}{8}b, \quad z_0 = \tfrac{3}{8}c.$$

41. Wie sind die Betrachtungen für Fig. 277, 278, 279 auf beliebige Segmente zu übertragen?

Fig. 294.



42. Welchen Inhalt hat der, durch Fig. 294 dargestellte Körper, falls $AB = A'B' = s$ und $\measuredangle\, BKN = \measuredangle\, B'KN = \alpha$ gegeben ist?

$$V = \frac{\pi}{6}\, s^3 \,.\, \cos\alpha.$$

V ist unabhängig vom Radius der Kugel.

43. Wo liegt der Schwerpunkt der Wassermasse, die das durch Fig. 295 dargestellte Gefäß füllt? Welches Volumen faßt es?

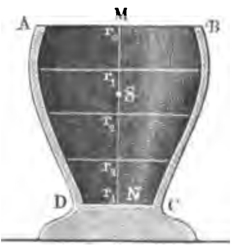
Einschließlich Oberfläche und Bodenfläche sind fünf Schnitte gelegt behufs Anwendung der Simpsonschen Regel.

Für $AM = r_0 = 1$ m, $r_1 = 1{,}1$ m, $r_2 = 0{,}9$ m, $r_3 = 0{,}7$ m, $r_4 = 0{,}4$ m und $MN = h = 2{,}5$ m ist

$$MS = 0{,}95 \text{ m.}$$

Der Inhalt ist $V = 6{,}27$ cbm.

Fig. 295.



44. Ein mit Blei ausgefüllter Stein wiegt 150 kg und hat das specifische Gewicht 7,3. Das darin enthaltene Blei habe ein Gewicht von 100 kg und das specifische Gewicht 11,32. Welches specifische Gewicht hat die Steinmasse für sich allein?

4,26.

45. Ein Kegel, der durch die Höhe h und den Halbmesser r der Grundebene gegeben ist, besteht aus zwei Teilen. Der untere Teil, ein abgestumpfter Kegel, habe das specifische Gewicht s_1, der obere, d. i. der zugehörige Ergänzungskegel, habe das specifische Gewicht s_2. Es ist die Höhe eines jeden der beiden Körper zu berechnen, wenn sie gleiches Gewicht erhalten sollen.

Höhe des Kegels:

$$h\sqrt[3]{\frac{s_1}{s_1+s_2}}.$$

Höhe des Kegelstumpfes:

$$h\left(1-\sqrt[3]{\frac{s_1}{s_1+s_2}}\right).$$

46. Wo liegt der Schwerpunkt eines Stabes von 2 cm Durchmesser, der aus drei verschiedenen Substanzen besteht, wenn die erste bei einem specifischen Gewichte von 1,825 eine Länge von 20 cm, die zweite bei einem specifischen Gewichte von 1,187 eine Länge von 62 cm und die dritte bei einem specifischen Gewichte von 7,788 eine Länge von 6 cm hat?

Der Abstand von dem Ende, an dem die erstgenannte Substanz sich befindet, beträgt 51,6 cm.

Drittes Kapitel.

Statik des starren Körpers.

Erste Abteilung.

Die Befestigungsreaktionen [1]).

77. Die Bestimmung der Reaktionen bei statischen Konstruktionen. Die Körper, welche in den Konstruktionen der Technik verwendet werden, stehen entweder unmittelbar oder durch Vermittelung anderer Körper in materieller Verbindung mit der Erde und sind insofern unfrei, im Gegensatz zu freien Körpern, d. h. zu solchen, deren Beweglichkeit nicht durch materielle Verbindungen mit anderen Körpern eingeschränkt ist.

Um die Einwirkung solcher Verbindungen beurteilen zu können, muß man versuchen, diese in jedem besonderen Falle durch Kräfte darzustellen.

Solche Darstellungen sind, dem ersten Lehrgange der Physik entsprechend, in den früheren Kapiteln bereits verwendet worden; die betreffenden Kräfte wurden als Reaktionen bezeichnet.

Nunmehr soll die Lehre von diesen Kräften ausführlicher behandelt werden, und zwar zunächst unter Beschränkung auf statische Konstruktionen, d. h. auf Konstruktionen, bei welchen sich die in Betracht kommenden starren Körper gegeneinander und schließlich gegen die Erde in Ruhe befinden bezw. nur solche einfache Bewegungen ausführen, bei welchen das in der Ruhe vorhandene Gleichgewicht der Kräfte erhalten bleibt.

Hierbei kommt vor allem ein, dem Principe der Paarwirkung entsprechendes System von Gegenkräften in Frage, nämlich das Gewicht eines jeden Körpers und dessen an der Erde haftende Gegenkraft.

Da wir meist unsere Aufmerksamkeit zunächst auf das Gewicht eines Körpers richten und erst später dessen, an der Erde haftende Gegenkraft betrachten, so pflegt man diese als Reaktion (Rückwirkung) dem Gewichte als Aktion (Wirkung) entgegenzustellen. Vergl. S. 12 u. f.

Ist ein Körper, wie ihn die Technik verwendet, gegen die Erde in Ruhe, so heben sich, falls nicht noch andere Kräfte dabei in Frage kommen, das Gewicht des Körpers und die entsprechende Erdreaktion auf, und zwar

[1]) Das Wort „Befestigung" soll alle Arten der materiellen Verbindung zweier Körper umfassen, die starre Verbindung, die Unterstützung u. s. w.

erscheint letztere dabei bald als eine Kraft, bald als ein System von Komponenten. Ersteres ist der Fall, wenn der Körper in einem Punkte seiner Schwerpunktsvertikalen aufgehangen oder unterstützt wird, letzteres tritt z. B. schon ein, wenn ein gewöhnlicher unbelasteter Balken an beiden Enden horizontal aufgelagert ist, da sich hier an jedem Ende eine Reaktion zeigt.

Die Angriffspunkte dieser Reaktionen oder ihrer Komponenten liegen stets in materiellen Punkten des Körpers, in welchen dieser mit anderen Körpern und dadurch mit der Erde in Verbindung steht.

Faßt man Körper und Erde und etwaige Zwischenkörper als ein System auf, so sind Gewicht und Erdreaktion innere Kräfte des Systems. Vergl. S. 13.

Wirken auf einen Körper in der Nähe der Erdoberfläche außer seinem Gewichte noch andere Kräfte, so kann der Körper gegen die Erde nur dann in Ruhe sein, wenn das System aller auf ihn einwirkenden Kräfte im Gleichgewichte ist, abgesehen von Kräften, welche, wie es z. B. bei der Einwirkung der Sonne der Fall ist, für das ganze, aus Körper und Erde und etwaigen Zwischenkörpern gebildete System nicht innere Kräfte sind.

Die Erfahrung scheint hier zunächst zu widersprechen, da z. B. eine Platte, die man in horizontaler Richtung mit der Hand an eine vertikale Wand drückt, gegen diese in Ruhe ist, obwohl die Resultante aus Druck und Gewicht nicht verschwindet.

Der Widerspruch löst sich, wenn man dem Principe der Paarwirkung entsprechend, jedem von dem Körper auf die Befestigung ausgeübten Zuge oder Drucke stets eine, von der Befestigung auf den Körper wirkende Gegenkraft zuordnet, und wenn man außerdem auch noch Kräfte einführt, die innerhalb der Berührungsfläche zwischen Körper und Befestigung auftreten.

In dem oben angeführten Beispiele wird der Druck gegen die Wand unmittelbar durch einen horizontalen Gegendruck der Wand aufgehoben, das Gewicht der Platte unmittelbar durch eine Kraft innerhalb der Berührungsfläche zwischen der Wand und der Platte.

Es ist zweckmäßig, die Kräfte, welche als Gegenkräfte des von dem Körper auf die Befestigung ausgeübten Zuges oder Druckes auftreten, von den Kräften, welche sich innerhalb der Berührungsflächen zeigen, zu unterscheiden, weil man in vielen Fällen bei Vernachlässigung letzterer doch zu einer brauchbaren Darstellung der Erscheinungen gelangt.

Kräfte der ersten Art, denen man auch die Erdreaktion zuzählen kann, mögen Befestigungsreaktionen (Verbindungsreaktionen) heißen, Kräfte der zweiten Art werden Reibungen (Reibungsreaktionen) oder auch Tangentialreaktionen genannt.

Auch die Reibungen unterliegen dem Principe der Paarwirkung; es tritt stets eine Kraft an der Befestigung und eine Kraft an dem Körper auf, und zwar so, daß beide Kräfte, von denen jede als eine Reaktion der anderen bezeichnet werden kann, Gegenkräfte sind.

Beschränken wir die Betrachtung ein für allemal auf Kräfte, welche für das aus Erde und Körpern und etwaigen Zwischenkörpern gebildete System innere Kräfte sind, so gewinnen wir demgemäß die Regel: Soll ein starrer

Körper gegen die Erde in Ruhe sein, so muß das System der ihn angreifenden Kräfte, einschließlich der Befestigungsreaktionen und der Reibungen, im Gleichgewichte sein.

Damit ist eine notwendige Bedingung ausgesprochen, sie ist aber nicht hinreichend. Bei dem Gleichgewichte seiner Kräfte kann der Körper in Ruhe sein, er kann sich aber auch in gleichförmiger Verschiebung mit geradliniger Führung befinden; man darf nur behaupten, daß der Körper bei dem Gleichgewichte seiner Kräfte in Ruhe bleibt, wenn er einmal in Ruhe ist.

Demgemäß gilt also: Solange das System der auf einen starren, in der Nähe der Erdoberfläche befindlichen Körper wirkenden Kräfte, einschließlich der Befestigungsreaktionen und der Reibungen, im Gleichgewichte ist, so lange befindet sich der Körper gegen die Erde in Ruhe, vorausgesetzt, daß er gegen sie für ein Zeitelement in Ruhe war.

Entsprechendes gilt für jeden Körper eines Systems von starren Körpern.

Von einem Körper, der unter dem Einflusse von Kräften ruht, sagt man, er befinde sich im Gleichgewicht; gelegentlich dehnt man diese Ausdrucksweise auch aus auf einen Körper, der sich unter dem Einflusse von Kräften in gleichförmiger Verschiebung mit geradliniger Führung befindet, weil in beiden Fällen das System der Kräfte im Gleichgewichte ist. Man kann noch einen Schritt weiter gehen, und auch bei gleichförmiger Drehung um eine freie Achse und bei einer entsprechenden Schraubung vom Gleichgewichte der betreffenden Körper sprechen, da die inneren Kräfte, welche bei Drehungen auftreten, für starre Körper nicht in Frage kommen und für Körper der Außenwelt bei relativ geringen Geschwindigkeiten vernachlässigt werden dürfen.

Im folgenden sollen die Reibungen zunächst vernachlässigt werden, so daß es sich lediglich um die Befestigungsreaktionen handelt. Man bestimmt diese Reaktionen, welche die Verbindung eines Körpers mit anderen Körpern als Kräfte darstellen, gemäß der gegebenen Entwickelung, indem man sie als unbekannte Kräfte ansieht und für das System aus diesen unbekannten Kräften und aus den ursprünglich gegebenen Kräften die Bedingungen des Gleichgewichtes (vergl. S. 339) aufstellt.

78. Die Reaktionen für einen starren Körper, von dem ein Punkt mit der Erde starr verbunden ist, und die entsprechenden Arten des Gleichgewichtes. Unter den Verbindungen zwischen einem starren Körper und der als starr vorausgesetzten Erde ist die starre Befestigung in einem Punkte A, wie sie durch ein Kugelgelenk veranschaulicht werden kann, in theoretischer Hinsicht die einfachste. Handelt es sich nur um das Gewicht $[G]$ des Körpers, so hat die Befestigung nur das senkrecht abwärts wirkende Gewicht des Körpers aufzuheben, so daß also für den ruhenden Körper die in A angreifende Reaktion $[R]$ die Gegenkraft von $[G]$ ist. Dabei liegt der Schwerpunkt S des Körpers auf der Vertikalen durch A.

Bei einem Kugelgelenk bieten die verschiedenen relativen Lagen von A und S auf der Vertikalen durch A noch zu einer wichtigen Bemerkung Veranlassung.

1. Liegt S unter A, so kehrt der Körper in seine Gleichgewichtslage zurück, wenn er durch kleine Anstöße aus ihr entfernt wird.
2. Liegt S in A, so bleibt der Körper in jeder Stellung in Ruhe, die er unter der Einwirkung kleiner Anstöße annimmt.
3. Liegt S über A, so tritt unter dem Einflusse kleiner Anstöße keine Rückkehr in die ursprüngliche Lage ein, der Körper kommt vielmehr in der unter 1. bezeichneten Lage zur Ruhe.

Man bezeichnet den Zustand der Körper in Lage 1 als stabiles (sicheres), in Lage 2 als indifferentes (unbestimmtes) und in Lage 3 als labiles (unsicheres) Gleichgewicht.

Bei den verschiedenen Schwenkungen des Körpers um A liegt der Schwerpunkt in Lage 1 möglichst tief und in Lage 3 möglichst hoch, während er in Lage 2 unbeweglich ist.

Die Sicherheit bezw. Unsicherheit des Gleichgewichtes entspricht der Erfahrung, daß ein schwerer Körper zwar von selbst fallen, aber nicht von selbst steigen kann.

Das Gewicht des Körpers $[G]$ stellt bei noch so kleinen endlichen Verrückungen aus der Lage 1 den alten Zustand wieder her und führt bei noch so kleinen endlichen Verrückungen aus Lage 3 zur Lage 1, während es für Lage 2 nicht in Frage kommt [1]).

Betrachtet man die Arbeit des Gewichtes $[G]$, welche stets einer Senkung des Körpers entspricht, so ist diese in Lage 1 ein Maximum und in Lage 3 ein Minimum, während sie für Verrückungen aus Lage 2 einen konstanten Wert hat.

$[G]$ leistet bei Verrückungen aus der Lage 1 negative und bei Verrückungen aus der Lage 3 positive Arbeit, während bei Verrückungen aus der Lage 2 keine Arbeit von $[G]$ anzusetzen ist. Da der Angriffspunkt von $[R]$ festliegt, so leistet $[R]$ in allen Fällen keine Arbeit und man kann daher auch sagen: Das System der vorhandenen Kräfte leistet bei noch so kleinen endlichen Verrückungen aus der Lage des sicheren Gleichgewichtes negative und bei noch so kleinen endlichen Verrückungen aus der Lage des unsicheren Gleichgewichtes positive Arbeit, während es für Verrückungen aus einer Lage des unbestimmten Gleichgewichtes keine Arbeit leistet [2]).

---

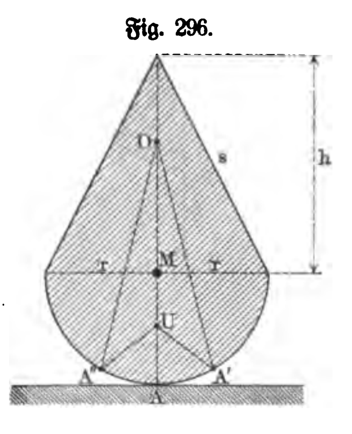
[1]) Für unendlich-kleine Verrückungen, die man in erster Annäherung betrachtet, wird in allen drei Fällen keine Arbeit geleistet, da die Bahn der Verrückung zunächst auf der Richtung der Kraft senkrecht steht; in zweiter Annäherung zeigen die Verrückungen schon den oben bezeichneten Unterschied.

[2]) Diese Regel ist einer großen Verallgemeinerung fähig, die sich folgendermaßen ergiebt. Es wird später gezeigt, daß die Gleichung $E - E_0 = \mathfrak{A}$, welche auf S. 252 für Verschiebungen starrer Körper abgeleitet wurde, eine weitere Gültigkeit hat und unter anderem überhaupt für Bewegungen starrer Körper gilt. Wird einem starren Körper, der sich in Ruhe befindet, durch Anstöße eine sehr kleine Energie E_0 mitgeteilt, so gilt für die Energie E nach Ablauf einer gewissen Zeit $E - E_0 = \mathfrak{A}$, wobei $\mathfrak{A}$ die Arbeit bezeichnet, welche die äußeren Kräfte inzwischen geleistet haben. Ist die Ruhelage des Körpers dadurch charakterisiert, daß $\mathfrak{A}$ für noch so kleine endliche Verrückungen aus ihr stets negativ ist, so muß $E - E_0$

Hat der Punkt A die Höhe h über der Erdoberfläche, während $AS = p$ ist, so ist das Potential (vergl. S. 252) in Bezug auf die Erdoberfläche für den Körper in den Stellungen 1 und 3 gegeben als $G(h - p)$ und $G(h + p)$. Bei allen Verrückungen aus Lage 1 wächst es, bei allen Verrückungen aus Lage 3 nimmt es ab, bei allen Verrückungen aus Lage 2 bleibt es konstant (Niveaufläche).

Weitere Beispiele, welche die Befestigung in einem Punkte einigermaßen veranschaulichen, sind die Aufhängung eines Körpers an einem Seile (Faden) und die Unterstützung eines Körpers durch eine ebene oder krumme Fläche, falls dabei die Berührung angenähert als Berührung in einem Punkte aufgefaßt werden kann. Als Beispiel für den letzten Fall diene die in Fig. 296 dargestellte Unterstützung, bei welcher der Körper aus einer Halbkugel mit Kegelaufsatz besteht. Auch hier läßt sich der oben bestimmte Unterschied der Arten des Gleichgewichtes wieder feststellen. Fällt der Schwerpunkt S des ganzen Körpers in den Mittelpunkt M der Halbkugel, so werden kleine Anstöße, bei denen etwa A' oder A'' an die Stelle von A tritt, die Höhenlage von S nicht ändern, so daß wieder die Arbeit, welche der Lage des Körpers in Bezug auf die Erdoberfläche entspricht, für die verschiedenen Stellungen einen konstanten Wert hat (unbestimmtes Gleichgewicht). Fällt S auf MA z. B. in den Punkt U, so sind $A'U$ oder $A''U$ größer als AU, so daß die Verrückungen aus der durch AU bezeichneten Stellung des Körpers negativer Arbeit von $[G]$ (sicheres Gleichgewicht) entsprechen.

Fig. 296.



Fällt S auf die Verlängerung von AM, z. B. in den Punkt O, so sind $A'O$ oder $A''O$ kleiner als AO, so daß die Verrückungen aus der durch AO bezeichneten Stellung des Körpers positiver Arbeit von $[G]$ (unsicheres Gleichgewicht) entsprechen.

Soll der Schwerpunkt des ganzen Körpers nach M fallen, so müssen die Massenmomente von Halbkugel und Kegel in Bezug auf die Begrenzungsebene durch M einander gleich sein, d. h. man hat für homogene Massen $h^2 = 3r^2$ oder $s = 2r$, d. h. der Hauptschnitt des Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck.

Cylindrische oder konische Körperchen aus Hollundermark, in welche eine halbkugelförmig begrenzte Zwecke (Pinne) eingeführt ist, veranschaulichen ähnliche Verhältnisse (Stehaufmännchen, Wippermännchen).

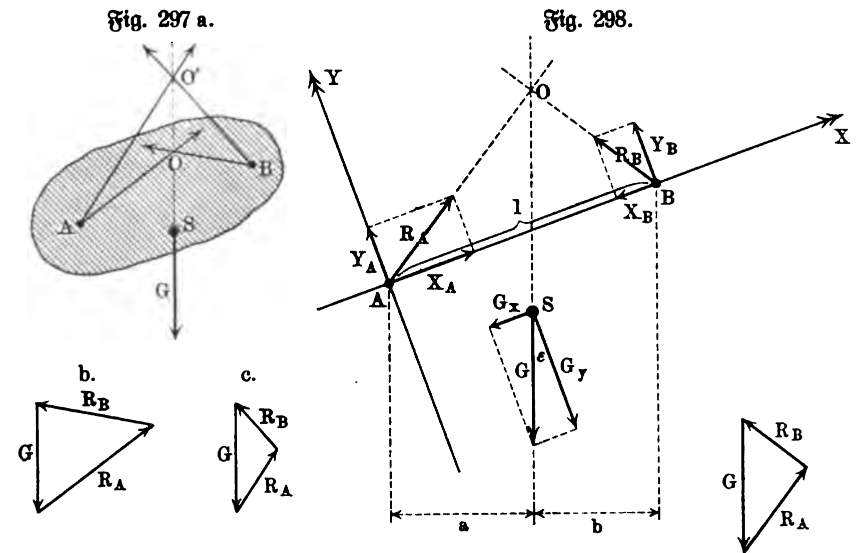
Handelt es sich um ein beliebiges System von Kräften, welches den in A befestigten Körper angreift, so behandelt man dieses so, daß die etwa vorhandene Resultante $[R]$ durch A geht. Die Reaktion von A ist dann die

negativ oder $E < E_0$ sein, d. h. die Energie bleibt unter der Grenze E_0 und das Gleichgewicht ist sicher. Für unser Beispiel ist das Potenzial in der Ruhelage des sicheren Gleichgewichts ein Minimum, in der Lage des unsicheren Gleichgewichts ein Maximum.

Gegenkraft von $[R]$. Soll der Körper in Ruhe sein, so muß also das etwa vorhandene Moment der Kräfte verschwinden. Für die Unterscheidung der Arten des Gleichgewichtes gilt auch hier, daß die Arbeit der vorhandenen Kräfte [1]) bei Verrückungen aus der Lage des unbestimmten Gleichgewichtes den Wert Null hat, während sie für noch so kleine endliche Verrückungen [2]) aus den Lagen des sicheren oder unsicheren Gleichgewichtes bezw. negative oder positive Werte erhält.

79. Die Reaktionen für einen starren Körper, von dem zwei Punkte mit der Erde starr verbunden sind, und die entsprechenden Arten des Gleichgewichtes. Ist ein starrer Körper in zwei Punkten, A und B, in

Fig. 297 a. Fig. 298.



starrer Verbindung mit der Erde, so gilt dies zugleich für die Gerade AB, so daß man diesen Fall durch Körper an drehbaren Achsen veranschaulichen kann.

Handelt es sich nur um das Gewicht $[G]$ des Körpers, so muß der Schwerpunkt S mit den Punkten A und B in eine Ebene fallen, welche natürlich vertikal ist, da $[G]$ und die Reaktionen in A und B bei Gleichgewicht dem Satze von den drei Kräften (vergl. S. 330) unterliegen. Stellt Fig. 297 diese Vertikalebene dar, so müssen sich die Reaktionen von A und B auf der Vertikalen von S schneiden. Jedem solchen Schnittpunkte O oder O' entspricht ein Kräftedreieck für die Reaktionen $[R_A]$ und $[R_B]$ von A und B, wie es Fig. 297b für O und Fig. 297c für O' darstellt. Die Aufgabe hat also unendlich-viele Lösungen, ist also unbestimmt.

Eine weitere Untersuchung zeigt, daß sich diese Unsicherheit nur auf die Komponenten von $[R_A]$ und $[R_B]$ erstreckt, welche innerhalb der Geraden

[1]) Man stellt sie durch das „Virial" dar.

[2]) Vergl. die Anmerkung auf S. 470.

AB liegen, während die Komponenten senkrecht zu dieser Geraden wohl bestimmt sind. Zerlegt man nämlich die Reaktionen für irgend eine Lage von O nach AB und senkrecht dazu, wie es Fig. 298 zeigt, so giebt der Momentensatz für A als Drehpunkt

$$-l \,.\, Y_B + a \,.\, G = 0, \qquad \text{d. h. } Y_B = \frac{a}{l} \cdot G,$$

und für B als Drehpunkt

$$+l \,.\, Y_A - b \,.\, G = 0, \qquad \text{d. h. } Y_A = \frac{b}{l} \cdot G.$$

Zerlegt man noch G in G_x und G_y, so ist

$$Y_A + Y_B = G_y = \frac{a+b}{l} \cdot G = G \,.\, \cos \varepsilon$$

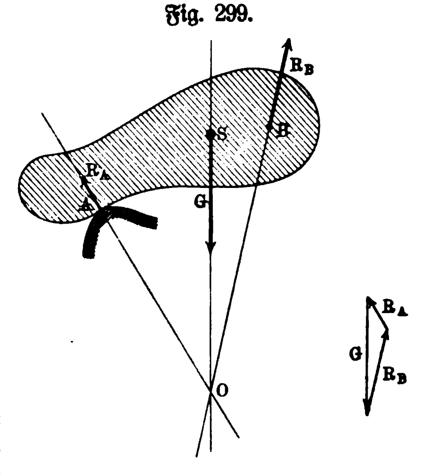
und

$$X_A - X_B = G_x = G \,.\, \sin \varepsilon.$$

Demnach sind die Komponenten der Reaktionen, senkrecht zu AB, vollständig bestimmt, für ihre Komponenten innerhalb AB ist aber nur die algebraische Summe durch G_x bestimmt, nicht aber die einzelnen Werte.

Man sagt von diesen Komponenten, sie seien „statisch unbestimmt“, aber diese Ausdrucksweise ist irreleitend. Solange man den Körper als starr auffaßt, im Gegensatze zu den thatsächlichen Verhältnissen der Außenwelt, ist die Aufgabe unbestimmt, sie wird bestimmt, wenn man auf die stets vorhandenen Formänderungen Rücksicht nimmt. Der Umstand, daß man zu ihrer Lösung nicht mit den einfachen Formeln der Statik starrer Körper auskommt, sondern dazu auch der Elasticitätslehre bedarf, hat zu obiger Ausdrucksweise geführt, weil man die Statik stillschweigend auf die Statik starrer Körper einschränkte.

Fig. 299.



Die Unbestimmtheit der Aufgabe verschwindet sofort, wenn man für eine der Reaktionen die Richtung kennt. Dies tritt z. B. ein, wenn man A oder B als Punkte einer bekannten Unterstützungsfläche auffassen darf, deren Normale die Richtung der Reaktion bestimmt. Einen solchen Fall stellt Fig. 299 dar; hier ist die Reaktionsrichtung für A und damit der Schnittpunkt O mit $[G]$ und damit OB gegeben, so daß nun das Kräftedreieck $[R_A]$ und $[R_B]$ eindeutig liefert.

Entsprechendes gilt für horizontal gelagerte Balken, wie schon früher behandelte Aufgaben zeigen.

Über die Arten des Gleichgewichts ist in diesem Falle dasselbe zu bemerken, wie im Falle der vorigen Paragraphen. Faßt man Fig. 296 als Normalschnitt eines Halbcylinders mit aufgesetztem dreiseitigen Prisma

auf, so gelten die früheren Betrachtungen weiter, ebenso gelten sie für einen an einer Achse befindlichen Körper.

Wird der Körper, der in A und B befestigt ist, von einem System von Kräften angegriffen, so behandelt man dieses System so, daß die etwa vorhandene Resultante $[R]$ in A angreift und AB eine der Achsen, etwa die Z-Achse, wird. Die Befestigung muß dann $[R]$ sowie $[M_x]$ und $[M_y]$ zerstören, während für das Gleichgewicht ferner erforderlich ist, daß $[M_z] \stackrel{\times}{=} 0$ ist. Giebt man $[M_x]$ und $[M_y]$ den Arm $AB = l$ und zerlegt man $[R]$ nach AB und senkrecht dazu, so sind die Kräfte, welche auf Punkt A und B wirken, senkrecht zu AB wieder eindeutig bestimmt, die Kräfte dagegen, welche auf A und B innerhalb AB wirken, werden nur in ihrer Gesamtheit durch die Komponente von $[R]$ dargestellt, welche in die Gerade AB fällt.

Die gesuchten Reaktionen von A und B sind dann die Gegenkräfte der betrachteten Kräfte.

Haben die Kräfte des Systems keine Komponente in der Richtung AB, so kommt natürlich auch keine Reaktion innerhalb der Geraden AB zur Geltung; in diesem Falle verschwindet die Unbestimmtheit.

Die Unbestimmtheit verschwindet ferner, wenn in einem der Punkte A und B die Richtung der Reaktion gegeben ist, doch ist die Wahl dieser Richtung stets auf eine Ebene beschränkt, welche durch die stets bestimmbare Komponente, senkrecht zu AB und durch AB selbst gegeben wird. Mit dieser Betrachtung stimmt auch die folgende Überlegung überein; es handelt sich um die Bestimmung von sechs Unbekannten (je drei Komponenten der beiden Reaktionen) durch die sechs Bedingungen des Gleichgewichtes, von denen eine ($M_z = 0$) für diesen Zweck fortfällt, so daß noch eine weitere Angabe (Winkel innerhalb einer bestimmten Ebene) nötig ist.

In Bezug auf die Arten des Gleichgewichtes gelten die früheren Bemerkungen.

Verwandt mit der behandelten Aufgabe ist die Befestigung an einer Achse, welche in ihrer Richtung gleiten kann.

In diesem Falle muß für Gleichgewicht noch immer $[M_z] \stackrel{\times}{=} 0$ sein, außerdem aber muß die Summe der Kräfte in AB, deren Verteilung auf A und B unbestimmt blieb, verschwinden.

80. **Die Reaktionen für einen starren Körper, von dem mindestens drei nicht in einer Geraden liegende Punkte mit der Erde starr verbunden sind, und die entsprechenden Kippachsen (Stabilitätsmoment und Stabilitätsarbeit).** Ist ein starrer Körper in drei, nicht in einer Geraden liegenden Punkten A, B, C mit der Erde starr verbunden, so ist die durch diese Punkte bestimmte Ebene des Körpers und damit der ganze Körper mit der Erde starr verbunden.

Die Reaktionen von A, B, C sind hiernach in höherem Maße unbestimmt als die Reaktion von A und B im vorigen Falle.

Zerlegt man die Reaktionen in A, B, C in Komponenten, senkrecht zur Ebene ABC, und in Komponenten, welche in die Ebene fallen, so erstreckt sich die Unbestimmtheit nur auf die letzteren. Nimmt man nämlich AB als

Drehungsachse für die Bildung des Kraftmomentes, so tritt von den Reaktionen in dieses nur die, zur Ebene senkrechte Komponente von $[R_C]$ ein, womit diese bestimmt ist, u. s. w.

Die Unbestimmtheit verschwindet hier für einen der Punkte A, B, C ganz, wenn die Richtung der Reaktion für diesen gegeben ist, weil deren stets bestimmbare Komponente, senkrecht zur Ebene ABC, und jene Richtung zusammen eine vollständige Bestimmung ermöglichen.

Solches ist z. B. der Fall, wenn man den betreffenden Punkt als Punkt in einer Unterstützungsfläche ansehen kann, deren Normale die Richtung der Reaktion bestimmt.

Ist die Unbestimmtheit für einen der Punkte A, B, C ganz verschwunden, so bleibt für die beiden anderen Punkte die Unbestimmtheit des im vorigen Paragraphen behandelten Falles übrig. Demnach ist die Bestimmung der Reaktionen bei drei festen Punkten A, B, C völlig bestimmt, wenn man in zweien von ihnen die Richtungen der Reaktionen kennt, wobei die erste Richtung völlig willkürlich, die zweite aber nur innerhalb einer bestimmten Ebene willkürlich ist. Die Angabe dieser Richtungen entspricht drei Messungen, so daß mit den sechs Bedingungen für das Gleichgewicht hier neun Gleichungen gegeben sind, um die neun Unbekannten (je drei Komponenten der drei Reaktionen) zu bestimmen.

Fig. 300.

Übersteigt die Anzahl der Punkte, in denen der starre Körper mit der Erde starr verbunden ist, die Anzahl drei, so nimmt die Unbestimmtheit in der Verteilung der Reaktionen entsprechend zu.

Schon im Falle von drei solchen Punkten A, B, C spielt ein Stück der Ebene, welche durch diese Punkte bestimmt wird, für die Untersuchung des Gleichgewichtes eine hervorragende Rolle. Dies tritt ein, wenn das System der gegebenen Kräfte eine Resultante hat, senkrecht zur Ebene ABC, so daß auch die Reaktionen von A, B, C senkrecht zur Ebene ABC liegen. In diesem Falle ist eine Befestigung in den drei Punkten, parallel zur Ebene ABC, überflüssig.

Sind die Reaktionen in A, B, C gleichgerichtet, so haben die Punkte A, B, C außerdem nur nach einer Seite der Ebene hin Widerstand zu leisten. Diesen Fall stellt z. B. angenähert ein beliebig belasteter dreibeiniger Tisch dar, der auf einer horizontalen Ebene steht, vorausgesetzt, daß die Projektion S' des Schwerpunktes S des Tisches nebst seiner Belastung innerhalb der an den Fußpunkten gebildeten Dreiecksfläche ABC liegt. Nimmt man AB als Drehungsachse, so wirkt das Gewicht G des Tisches nebst seiner Belastung an einem Arme $S'D$, während die Reaktion $[R_C]$ am Arme CC' zur Geltung kommt. Die entsprechende Gleichung (vergl. Fig. 300)

$$+ G . \overline{S'D} - R_C . \overline{CC'} = 0$$

zeigt nun, daß R_C proportional zu $S'D$ ist und demnach abnimmt, wenn die Belastung des Tisches so verschoben wird, daß sich $S'D$ verkleinert. Liegt der Schwerpunkt S des Tisches nebst seiner Belastung gerade über einem Punkte von AB, so ist $S'D = 0$ und demnach auch $R_C = 0$. Rückt der Schwerpunkt S über AB hinaus, so ist die Gleichung

$$- G \,.\, \overline{S''D} - R_C \,.\, \overline{CC'} = 0.$$

nur zu erfüllen, wenn R_C seine Richtung ändert, was nur möglich ist, wenn das Bein des Tisches über C im Fußboden verschraubt oder sonst befestigt ist. Ist das nicht der Fall, so kippt der Tisch um AB als Kippachse, sobald die Projektion von S die Gerade AB von innen nach außen zu überschreitet. Entsprechendes gilt für die Geraden AC und CB.

Deshalb nennt man die Fläche ABC, innerhalb welcher die Projektion des Schwerpunktes S liegen muß, die Unterstützungsfläche des Tisches, und es ist offenbar für diese Betrachtung ganz gleichgültig, ob die Unterstützung nur in den Punkten A, B, C vorhanden ist oder in der ganzen Fläche ABC.

Wären zwei Beine des Tisches, entsprechend A und B, etwa durch Hülsen auf einer drehbaren Achse AB befestigt, während das dritte Bein, entsprechend C, auf einer Stütze ruhte, so würden beim Fortfall dieser Stütze für den Tisch zwei Gleichgewichtslagen möglich sein, eine unsichere, bei welcher S über der Kippachse AB steht, und eine sichere, bei welcher S unter der Kippachse AB liegt. Die Unterstützung in A, B, C stellt also, falls die Projektion von S in die Fläche ABC fällt, eine sichere Gleichgewichtslage für die Achse AB dar, bedingt durch die Unterstützung in C. Entsprechendes gilt für die Geraden BC und AC.

Fig. 301.



Man nennt infolgedessen das Moment $+ G \,.\, S'D$, welches den Körper für die Achse AB in die, durch die Unterstützung C bedingte, sichere (stabile) Gleichgewichtslage bringt, das Stabilitätsmoment für AB.

Findet die Unterstützung eines schweren Gegenstandes auf einer Horizontalebene in mehr als drei Punkten statt, so tritt an die Stelle des betrachteten Dreiecks ABC eine andere Unterstützungsfläche, falls nicht die in Frage kommenden Punkte alle innerhalb der betrachteten Dreiecksfläche liegen.

Um die Unterstützungsfläche für eine beliebige Menge (auch unendlichgroße) von Stützpunkten zu erhalten, zerlegt man zunächst durch die Verbindungsgerade zweier Stützpunkte A und B die Horizontalebene so, daß deren eine Hälfte keinen der Stützpunkte enthält. Liegt diese Hälfte linker Hand, falls man sich auf der Ebene stehend und in die Richtung AB sehend denkt, so hat man nun ferner AB um B so zu drehen, daß linker Hand keine Stützpunkte auftreten und zwar so lange, bis die Gerade wieder einen Stützpunkt C trifft. Weiter hat man die Gerade in derselben Weise um C zu drehen, bis sie wieder einen Stützpunkt D trifft u. s. f., bis man zu A zurück gelangt. Der von der Geraden bei ihrer Bewegung abgegrenzte Teil der Ebene ist die Unterstützungsfläche. Bilden die Stützpunkte die Ecken eines konvexen Vielecks, so ist dessen Fläche die Unterstützungsfläche; sie bleibt dies,

wenn im Innern des Vielecks beliebig-viele Stützpunkte dazu kommen, auch wenn die ganze Fläche mit solchen angefüllt ist.

Füllen die Stützpunkte eine geschlossene Linie, die durch einen Grenzübergang aus einem konvexen Vieleck hergestellt werden kann, so gilt Entsprechendes.

Füllen die Stützpunkte aber z. B. die in Fig. 301 einfach schraffierte Fläche, so müssen die doppelt schraffierten Teile hinzugenommen werden, um die Unterstützungsfläche zu bilden.

Jede Lage der oben betrachteten Geraden, durch welche die Unterstützungsfläche erzeugt wird, kann zur Kippachse werden, so daß in Bezug auf jede derselben das Stabilitätsmoment bestimmt werden kann.

Für das zunächst betrachtete Dreieck sind also nicht nur AB, BC, CA Kippachsen, sondern jede Gerade durch A, B, C, welche die Dreiecksfläche nicht schneidet; für eine Unterstützungsfläche, welche durch eine konvexe Kurve begrenzt wird, ist jede Tangente dieser Kurve Kippachse.

Fig. 302 a.

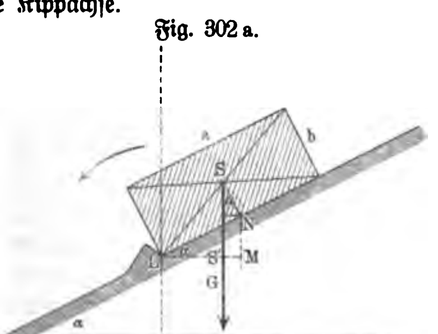
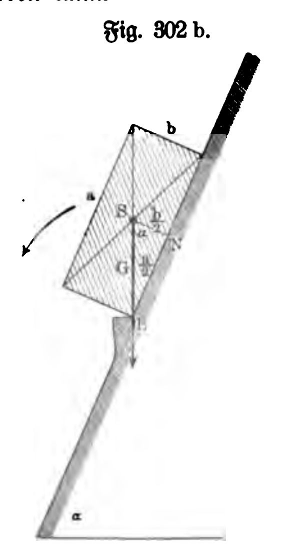
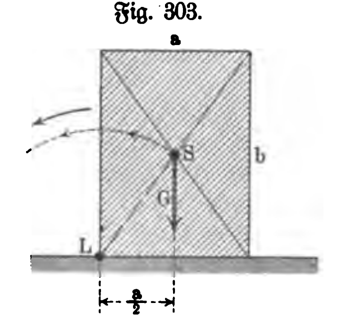


Fig. 302 b.



Kippachsen können unter sehr verschiedenen Umständen auftreten. Liegt z. B. ein Prisma, wie Fig. 302 andeutet, auf einer schiefen Ebene, gestützt durch eine horizontale Leiste L oder durch entsprechende Stifte, so hängt die Frage der Stabilität in Bezug auf die durch L gegebene Kippachse vor allem von dem Neigungswinkel α ab.

Fig. 303.



Fällt S in die Vertikale von L, so tritt unsicheres Gleichgewicht ein, und die geringste Vergrößerung von α führt zum Kippen.

Das Stabilitätsmoment ist hier $+G\,.\,\overline{S'L}$, oder, da $S'L = ML - MS' = \frac{a}{2}\cos\alpha - \frac{b}{2}\sin\alpha$ ist, auch

$$+\frac{G}{2}(a\cos\alpha - b\sin\alpha).$$

Es wird Null für $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$, so daß für $tg\,\alpha > \frac{a}{b}$ Kippen eintritt.

Die Stabilität ist nicht immer allein durch das Gewicht des Körpers bedingt. Allgemein verstehen wir bei einem beliebigen System von Kräften unter dem Stabilitätsmoment in Bezug auf eine Kippachse AB das Moment der Kräfte, welche das Kippen um die Achse AB verhindern.

Da der Schwerpunkt in der unsicheren Gleichgewichtslage, welche dem Kippen vorangeht, für die behandelten Beispiele möglichst hoch liegt, so ist die Arbeit, welche nötig ist, um den Körper in diese Lage zu bringen, von besonderer Bedeutung, man nennt sie Stabilitätsarbeit (auch Arbeitsstabilität oder dynamische Stabilität), sie könnte auch Kipparbeit genannt werden.

Für einen Block, der ein Rechtkant bildet, ist (vergl. Fig. 303 a. v. S.) das Stabilitätsmoment in Bezug auf die durch L gehende Kante $G \cdot \frac{a}{2}$. Dagegen entspricht die Kipparbeit dem Heben des Schwerpunktes aus der Stellung mit der Höhe $\frac{b}{2}$ in eine Stellung mit der Höhe LS über der Erdoberfläche, d. h. einer Hebung um $LS - \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - b)$. Man hat also

$$\mathfrak{A} = \frac{G}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - b).$$

81. Die Befestigungen bei technischen Konstruktionen. Die Thatsache der sogenannten „statischen Unbestimmtheit“ von Befestigungsreaktionen zeigt an, daß die Voraussetzung starrer Körper für die Behandlung befestigter Körper, wie sie die Technik verwendet, nicht ausreicht, daß man vielmehr auch auf die Formänderungen der Körper der Außenwelt Rücksicht nehmen muß. Außerdem ist zu bemerken, daß die Befestigung in einzelnen Punkten, welche behandelt wurde, auch nur ein Bild ist, welches auf die thatsächlich vorhandenen Befestigungen nur angenähert paßt. Schon die Befestigung in einem Punkte, wie sie durch ein Kugelgelenk veranschaulicht werden kann, ist thatsächlich eine Befestigung, bei welcher zwei konzentrische Kugelflächen aufeinander gleiten können. Ebenso ist die Befestigung in zwei Punkten, wie sie durch eine drehbare Achse veranschaulicht wird, thatsächlich eine Befestigung, bei welcher zwei koaxiale Cylinderflächen (Zapfen und Lager) aufeinander gleiten können. Entsprechendes gilt für die Gelenke der Stangen bei Dachkonstruktionen u. s. w. Auch die horizontale Auflagerung des einfachen Balkens ist eine Befestigung mit Unterstützungsflächen. In allen solchen Fällen sind, streng genommen, stets Reaktionsflächen vorhanden, für welche einzelne Punkte die Rolle von dynamischen Centren spielen. Über die genaue Lage dieser Centren läßt sich theoretisch sehr wenig aussagen, während die Erfahrung (Beobachtung und Versuch) allerdings hier von Fall zu Fall zu Hülfe kommt.

Selbst bei so einfachen Verhältnissen, wie sie der beiderseits horizontal aufgelagerte einfache Balken ohne Belastung darstellt, ist aber die Lage der dynamischen Centren für die Reaktionen durch die Erfahrung durchaus noch nicht genau festgestellt; man sieht hier meist die Mitte der rechteckigen Auflagerfläche als Centrum an, obwohl es wahrscheinlicher ist, daß dieses Centrum

im allgemeinen mehr nach der überdeckten Öffnung zu liegt. Entsprechendes gilt für die Zapfen einer Welle.

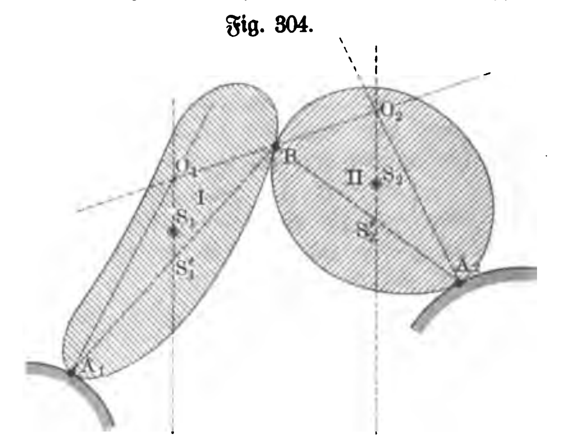
Legt man den Balken auf Schneiden, so ist der Spielraum für die Centren der Reaktionen natürlich sehr klein, und Entsprechendes gilt für eine Achse, die auf einer Schneide balanciert.

Auch die Einflüsse der Reibung und der Formänderung der Körper, durch Belastung sowie durch Änderung der Temperatur, auf die Lage der Reaktionscentren sind oft erheblich, weshalb z. B. bei großen Brückenträgern nur ein Ende möglichst starr befestigt wird, während man das andere durch eine Rollenunterlage stützt.

Diese Unbestimmtheiten sind nicht von Bedeutung, solange die damit gegebene Schwankung im Ansatze einer Aufgabe innerhalb der sowieso vorhandenen Fehlgrenzen liegt. In anderen Fällen muß man ihnen nach Lage der Sache zu begegnen suchen. Handelt es sich z. B. um die Berechnung der Abmessung eines Zapfens, so kann man die Reaktion am Ende des Zapfens wirkend denken und hierfür die Rechnung durchführen, weil dies der ungünstigste Fall für die Beanspruchung des Zapfens ist. Anderseits nimmt man gelegentlich eine besondere Verteilung der Reaktionen auf die Stützpunkte vor, man läßt z. B. bei der in Fig. 229 skizzierten Bogenbrücke oder bei dem in Fig. 231 gezeichneten Krane die Last nur durch einen Punkt tragen.

82. Die Reaktionen für Systeme von Körpern, die untereinander und mit der Erde starr verbunden sind. Handelt es sich bei statischen Konstruktionen nicht mehr um einen einzelnen Körper, sondern um ein System von Körpern, wie es z. B. die einzelnen Steine eines Gewölbes oder die einzelnen Stangen eines Trägers darstellen, so hat man jeden Körper des Systems für sich zu behandeln, unter Berücksichtigung der Reaktionen, welche die anderen Körper auf ihn gemäß dem Principe der Paarwirkung übertragen. Wir erläutern das an einem Beispiele, welches Fig. 304 darstellt. Zwei Steinblöcke I und II

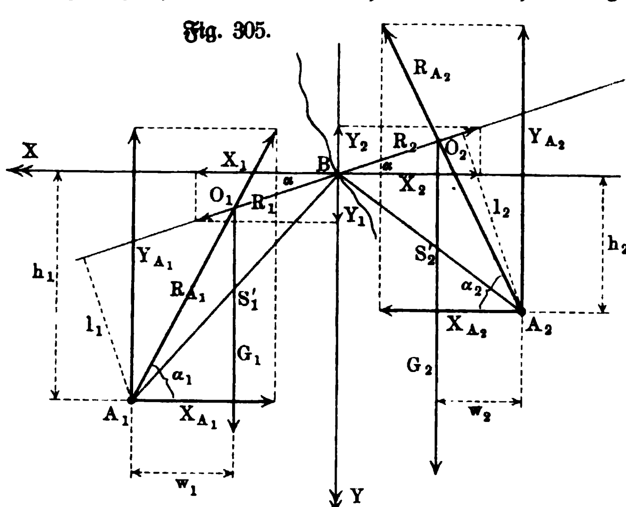
Fig. 304.



mögen sich bei A_1 und A_2 auf andere Blöcke stützen, bei B gegeneinander. Unter der Voraussetzung, daß die Unterstützungsflächen in A_1, A_2 und B dynamische Centren haben, in denen sich die zu bestimmenden Reaktionen konzentrieren, kann man eine Stützung in den drei Punkten A_1, A_2 und B annehmen. Soll Gleichgewicht vorhanden sein, so müssen sich die Reaktionen in A_1 und B, welche auf I wirken, in der Vertikalen von dessen Schwerpunkte S_1 schneiden, so daß A_1, B, S_1 in einer Vertikalebene liegen. Das-

selbe gilt für A_2, B, S_2. Da ferner nach dem Principe der Paarwirkung die Reaktionen in B auf I und II Gegenkräfte sind, so liegen diese beiden Reaktionen auf einer Geraden, welche sowohl der Vertikalebene für I als auch der Vertikalebene für II angehören muß, also deren Schnittgerade ist, falls diese Ebenen nicht zusammenfallen. Existierte eine solche Schnittgerade, so wären die Reaktionen von B beide vertikal gerichtet, die eine nach oben, die andere nach unten. Wäre z. B. die Reaktion für II in B nach unten gerichtet, so würde diese im Verein mit G_2 einer Reaktion in A_2 nicht das Gleichgewicht halten können, während die nach oben gerichtete Reaktion für I in B sehr wohl zu einem Gleichgewicht von I führen könnte. Entsprechendes gilt bei umgekehrter Lage der Reaktionen von B bezw. für I und II. Demgemäß können die beiden Vertikalebenen durch S_1 und B und durch S_2 und B keine Schnittgerade haben, sie müssen vielmehr zusammenfallen, so daß die ganze Untersuchung mit einer Vertikalebene durch A_1, S_1, B, S_2, A_2 zu rechnen hat.

Fig. 305.



Nimmt man nun die Richtung der Reaktion in B willkürlich (α) an und bestimmt auch ihre Werte $R_1 = R_2$ willkürlich, so liefert der Momentensatz für I, falls man A_1, und für II, falls man A_2 als Drehpunkt wählt, zwei Gleichungen zur Bestimmung von α und $R_1 = R_2$.

Man hat in Fig. 305, in der die Blöcke der Fig. 304 durch Stangen ersetzt sind, für A_1 in Bezug auf I

$$+ G_1 w_1 - R_1 l_1 = 0$$

und für A_2 in Bezug auf II

$$- G_2 w_2 + R_2 l_2 = 0.$$

Benutzt man das in Fig. 305 gegebene Koordinatenkreuz in B, so ist, falls man die Abstände der Punkte A_1 und A_2 von der Y-Achse bezw. mit u_1 und u_2 bezeichnet,

$$l_1 = h_1 \cos\alpha - u_1 \sin\alpha \quad \text{und} \quad l_2 = h_2 \cos\alpha + u_2 \sin\alpha,$$

d. h. man hat

$$+ G_1 w_1 - R_1 (h_1 \cos\alpha - u_1 \sin\alpha) = 0$$
$$- G_2 w_2 + R_2 (h_2 \cos\alpha + u_2 \sin\alpha) = 0.$$

Setzt man $R_1 \cos\alpha = R_2 \cos\alpha = X$ und $R_1 \sin\alpha = R_2 \sin\alpha = Y$, so ergiebt sich

$$Xh_1 - Yu_1 = G_1 w_1 = M_1$$
$$Xh_2 + Yu_2 = G_2 w_2 = M_2.$$

Aus diesen Gleichungen, welche man bei Zerlegung von $[R_1]$ und $[R_2]$ nach den Achsen X und Y unmittelbar erhalten könnte, ergiebt sich

$$X = \frac{u_1 M_2 + u_2 M_1}{h_1 u_2 + h_2 u_1}$$
$$Y = \frac{h_1 M_2 - h_2 M_1}{h_1 u_2 + h_2 u_1}$$
$$tg\,\alpha = \frac{Y}{X} \quad \text{und} \quad R_1 = R_2 = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Zerlegt man die Reaktionen in A_1 und A_2 nach den Achsen, so ist $X_{A_1} = X$ und $X_{A_2} = X$, ferner $G_1 + Y = Y_{A_1}$ und $G_2 - Y = Y_{A_2}$. Man hat also:

$$R_{A_1} = \sqrt{X^2 + (G_1 + Y)^2} \quad \text{und} \quad R_{A_2} = \sqrt{X^2 + (G_2 - Y)^2}$$
$$tg\,\alpha_1 = \frac{G_1 + Y}{X} \quad \text{und} \quad tg\,\alpha_2 = \frac{G_2 - Y}{X}.$$

Sobald man die Richtung (α) von $[R_1]$ bezw. $[R_2]$ hat, kann man die Aufgabe auch konstruktiv weiter behandeln.

Die Vertikale von $[G_1]$ giebt für den linken Teil zunächst O_1 als Schnitt mit der Geraden von $[R_1]$ und $[R_2]$, und damit die Reaktionsrichtung $A_1 O_1$ für A_1. Eine Nebenfigur liefert dann die entsprechenden Werte der Kräfte, wie bei Fig. 297, 298, 299. Dasselbe gilt für den rechten Teil der Figur.

Wie die Aufgabe ganz auf das Reißbrett zu übertragen ist, zeigt der arithmetische Bau von X und Y an. Dieser Bau bleibt unverändert, wenn die Stange $A_1 B$ durch beliebige Kräfte angegriffen wird, nur hat M_1 dann nicht den einfachen Wert $G_1 w_1$. Denkt man die Stange $A_1 B$ durch Kräfte angegriffen, welche mit $[G_1]$ im Gleichgewichte sind, so ist $M_1 = 0$. Für die kraftfreie linke Stange erhält man also für X und Y die besonderen Werte

$$X_L = \frac{u_1 M_2}{h_1 u_2 + h_2 u_1} \quad \text{und} \quad Y_L = \frac{h_1 M_2}{h_1 u_2 + h_2 u_1}.$$

Ebenso erhält man für die kraftfreie rechte Stange für X und Y die besonderen Werte

$$X_R = \frac{u_2 M_1}{h_1 u_2 + h_2 u_1} \quad \text{und} \quad Y_R = \frac{-h_2 M_1}{h_1 u_2 + h_2 u_1}.$$

Dabei ist

$$X = X_L + X_R$$
$$Y = Y_L + Y_R.$$

Man kann also X und Y erhalten, wenn man die Aufgabe erst für die kraftfreie linke Stange bei Belastung der rechten Seite und dann für die kraftfreie rechte Stange bei Belastung der linken Seite durchführt, und die gewonnenen Werte vereinigt.

Nunmehr läßt sich die ganze Aufgabe konstruktiv durchführen, da man für eine kraftfreie Stange, die sich im Gleichgewichte befindet, die Richtung der Reaktionen ihrer Endpunkte kennt; da hier nämlich überhaupt nur zwei Punkte als Angriffspunkte von Kräften in Frage kommen, so müssen diese Reaktionen Gegenkräfte sein, d. h. also in der Stangenachse liegen.

Fig. 306.

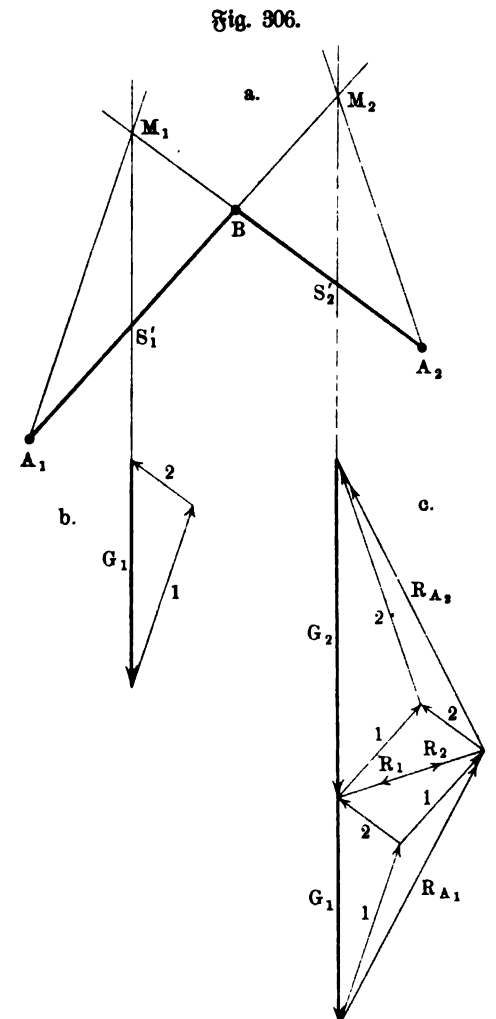


Fig. 306 stellt diese Konstruktion dar. Ist die linke Stange kraftfrei, so ist M_2 der Schnitt der Kräfte; ist die rechte Stange kraftfrei, so ist M_1 der Schnitt der Kräfte. In Fig. 306 b und c sind unterhalb die Kraftdreiecke bezw. für M_2 und M_1 dargestellt und zwar bezeichnen die angeschriebenen Nummern die Zugehörigkeit der Reaktionen zu A_1 oder zu A_2. Um die mit 1 bezeichneten Kräfte aus beiden Skizzen in A_1 zu vereinigen und um ebenso die mit 2 bezeichneten Kräfte aus beiden Skizzen in A_2 zu vereinigen, kann man sie in die Hauptfigur an A_1 und A_2 eintragen. Statt dessen kann man auch Fig. 306 b unterhalb Fig. 306 c zeichnen, so daß $[G_2]$ und $[G_1]$ eine Gerade bilden, und durch Parallelogrammkonstruktion zu R_{A_1} und R_{A_2} und zu R gelangen; R_1 und R_2 sind besonders durch Pfeile bezeichnet.

83. Das Princip der virtuellen Verrückungen für ein System miteinander verbundener starrer Körper (bei Vernachlässigung der Reibungen). Daß die Arbeit eines, an einem starren Körper im Gleichgewichte befindlichen Kräftesystems für jede beliebige (virtuelle) Verrückung dieses Körpers verschwindet, wurde bereits hervorgehoben (vergl. S. 339). Um in diesem Falle auf das Gleichgewicht zu schließen, hat man bei einem ebenen Kräftesystem die Arbeit für drei und bei einem räumlichen Kräftesystem die Arbeit für sechs Verrückungen, die voneinander unabhängig sind, anzusetzen und zu annullieren.

Diese Betrachtungen gelten für einen freien Körper und sollen nun zunächst auf einen unfreien Körper und dann auf ein System solcher Körper ausgedehnt werden.

Fügt man bei einem unfreien Körper den ursprünglich gegebenen Kräften die Reaktionen hinzu, so ändert sich an der früheren Betrachtung nichts, solange man die Reaktionen an dem Körper haftend und nun mit diesem frei beweglich denkt, d. h. solange man sein Augenmerk lediglich auf das im Gleichgewicht stehende Kräftesystem richtet.

Schränkt man aber die Gesamtheit der virtuellen Verrückungen auf solche ein, die unter Berücksichtigung der Befestigungen des Körpers, d. h. ohne Materialzerstörung thatsächlich ausführbar sind, so gelangt man zu einer wichtigen Erweiterung. Bei solchen Verrückungen, welche als „erlaubte" oder „zulässige" bezeichnet werden, ist nämlich sehr oft die Arbeit der Reaktionen für sich Null, so daß dann auch die Arbeit der ursprünglich gegebenen Kräfte für sich Null ist. In solchen Fällen kann man allein aus der Arbeit der ursprünglich gegebenen Kräfte auf das Gleichgewicht schließen, so daß man die Bestimmung der Reaktionen ganz und gar erspart.

Ist ein Körper in einem Punkte A befestigt, so ist jede Schwenkung um diesen Punkt eine erlaubte Verrückung, dagegen würde z. B. eine Verschiebung des Körpers, bei welcher man die Reaktion von A am Körper haftend denkt, zwar eine virtuelle Verrückung des Körpers und seines Kräftesystems sein, aber keine erlaubte.

Ist ein Körper an einer Achse AB befestigt, so ist jede Drehung um diese Achse eine erlaubte Verrückung, dagegen würde z. B. eine Verschiebung des Körpers, bei welcher man die Reaktionen von AB am Körper haftend denkt, zwar eine virtuelle Verrückung des Körpers und seines Kräftesystems sein, aber keine erlaubte.

Sind Punkte eines Körpers gezwungen, auf einer Linie oder auf einer Fläche zu bleiben, so gehören alle virtuellen Verrückungen, welche die Punkte von diesen Führungen entfernen, zu der Gruppe der unerlaubten Verrückungen.

Besonders hervorgehoben werden mag noch, daß die Entfernung von einseitigen Widerständen gemäß obiger Festsetzung zu den erlaubten Verrückungen gehört, weil sie thatsächlich ausführbar ist. Stützt sich ein Körper z. B. auf eine Ebene, so sind Bewegungen längs der Ebenen erlaubte Verrückungen, ebenso aber auch Bewegungen, bei welchen der Körper die führende Ebene verläßt, falls nur ein Eindringen in diese ausgeschlossen ist.

Bezeichnen wir die Arbeit der ursprünglich gegebenen Kräfte bei irgend einer virtuellen Verrückung des Körpers durch $\mathfrak{A}_K$ und die entsprechende Arbeit der Reaktionen durch $\mathfrak{A}_R$, so gilt nach den früheren Betrachtungen im Falle des Gleichgewichtes

$$\mathfrak{A}_K + \mathfrak{A}_R = 0.$$

Für eine große Klasse von erlaubten Verschiebungen zerfällt nun diese Gleichung in die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{A}_R = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{A}_K = 0,$$

und zwar geschieht dies jedesmal, wenn die Angriffspunkte der einzelnen Reaktionen bei der Verrückung entweder gar nicht bewegt werden oder senkrecht zu ihrer Bahn liegen.

Da die tangentialen Reaktionen (Reibungen) in den Berührungsflächen liegen, so leistet eine solche stets Arbeit, wenn sich der entsprechende Körper relativ zu einer ihn berührenden Fläche (unter Pressung) gleitend oder rollend bewegt.

Demnach tritt die oben bezeichnete Teilung der Gleichung

$$\mathfrak{A}_K + \mathfrak{A}_R = 0$$

im allgemeinen nur ein, wenn man von den Reibungen gleitender und rollender Bewegungen völlig absieht.

Unter dieser Voraussetzung, die hier ein für allemal gemacht wird, ist es nun zweckmäßig, die Gruppe der erlaubten Verrückungen noch weiter einzuschränken und nur solche Verrückungen zuzulassen, bei welchen einseitige Widerstände als doppelseitige Widerstände angesehen werden. Wir wollen die so eingeschränkte Gruppe der erlaubten Verrückungen als zweckmäßige Verrückungen bezeichnen, weil sie die Verrückungen umfaßt, welche dem Zwecke der Konstruktion entsprechen.

So sind also z. B. die Bewegungen eines Körpers längs einer schiefen Ebene aufwärts und abwärts zweckmäßige Verrückungen, während dessen Entfernung von der schiefen Ebene nach dem freien Raum zu zwar eine erlaubte Verrückung, aber keine zweckmäßige Verrückung wäre, und während dessen Entfernung von der schiefen Ebene bei einer, in das Material der schiefen Ebene hineinführenden Bewegung immer noch eine virtuelle Verrückung darstellte, aber keine erlaubte.

Man kann nun behaupten, daß die oben bezeichnete Teilung der Gleichung

$$\mathfrak{A}_K + \mathfrak{A}_R = 0$$

im allgemeinen für alle zweckmäßigen Verrückungen eintritt, so daß für diese

$$\mathfrak{A}_K = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 137)$$

wird, während für alle erlaubten, aber unzweckmäßigen Verrückungen im allgemeinen die Gleichung

$$\mathfrak{A}_K < 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 138)$$

eintritt.

Was den ersten Teil der Behauptung anlangt, so ist für dessen Beweis nichts hinzuzufügen, während in Bezug auf den zweiten Teil darauf hingewiesen werden mag, daß z. B. bei einer Bewegung eines Körpers von der schiefen Ebene in den freien Raum hinein die an dem Körper haftende Reaktion der Ebene positive Arbeit leistet, so daß $\mathfrak{A}_K$ in der Gleichung $\mathfrak{A}_K + \mathfrak{A}_R = 0$ einen negativen Wert erhält.

Die Unbestimmtheit, die noch immer in obiger Behauptung liegt, ist unvermeidlich, weil man bei der Fülle von einzelnen Befestigungsarten einmal nicht sicher ist, daß sie sich auch alle wirklich durch Reaktionen darstellen lassen,

und ferner nicht von vornherein bestimmen kann, daß auch stets für zweckmäßige Verrückungen $\mathfrak{A}_R = 0$ ist.

Man kann dieser Unbestimmtheit nur entgehen, wenn man die einzelnen Befestigungsarten durchgeht und untersucht, ob für sie bei zweckmäßigen Verrückungen $\mathfrak{A}_R = 0$ ist oder nicht.

Wir kommen hierauf sogleich zurück, nachdem die Betrachtung auf Systeme miteinander verbundener starrer Körper ausgedehnt ist.

Handelt es sich um ein System von starren Körpern, das unter dem Einflusse von Kräften gegen die Erde in Ruhe ist, so kann man jeden einzelnen Körper des Systems, nachdem man die Reaktionen der anderen Körper auf ihn eingeführt hat, für sich betrachten.

Für jede virtuelle Verrückung eines einzelnen Körpers gilt dann die Gleichung $\mathfrak{A}_K + \mathfrak{A}_R = 0$.

Erteilt man also den einzelnen Körpern des Systems beliebige virtuelle Verrückungen, die entweder für die einzelnen Körper voneinander unabhängig sein oder auch von Körper zu Körper in einer gewissen Abhängigkeit stehen können, so gilt auch für das ganze System die Gleichung

$$\mathfrak{A}_K + \mathfrak{A}_R = 0.$$

Diese Gleichung gilt natürlich auch unter Einschränkung auf die erlaubten und auf die zweckmäßigen virtuellen Verrückungen.

Das Zerfallen der Gleichung tritt auch hier ein, wenn $\mathfrak{A}_R = 0$ ist.

Über die Bedingungen, unter denen dies eintritt, ist dasselbe zu sagen, wie für den einzelnen Körper.

Als wichtige Klassen solcher Befestigungen, für welche $\mathfrak{A}_R = 0$ ist, lassen sich folgende anführen:

1. Die Arbeit der Reaktionen an Punkten, welche mit der Erde starr verbunden sind, ist Null, weil sich deren Angriffspunkte überhaupt nicht bewegen.
2. Die Arbeit der Reaktionen an Punkten, die auf Linien oder Flächen, welche mit der Erde starr verbunden sind, zu bleiben gezwungen sind, ist Null, weil bei Ausschluß der Reibungen nur Normalwiderstände in Frage kommen, deren Angriffspunkte sich senkrecht zur Bahn verschieben.
3. Dasselbe ist auch noch für Linien oder Flächen der Fall, welche beweglichen Körpern angehören, da auch hier bei Ausschluß der Reibungen nur Normalwiderstände übertragen werden.
4. Werden zwei Punkte A und B verschiedener Körper durch eine starre Verbindung (z. B. eingelenkte Stangen) in einer bestimmten Entfernung gehalten, so bilden die Punkte A und B der Körper und die Verbindung ein starres System, dessen innere Kräfte sich aufheben, so daß ihre Arbeit nicht berücksichtigt zu werden braucht. Dasselbe ist auch noch der Fall bei einer Verbindung von A und B durch ein gespanntes Seilstück (Kette oder Faden), vorausgesetzt, daß es gespannt bleibt und keinen anderen Formänderungen unterliegt, als der Biegung.

5. Wenn die Verbindung zweier Körper derart ist, daß der eine den anderen bei seiner Bewegung mitbewegt und wenn dabei an der Berührungsstelle die Angriffspunkte der Gegenkräfte, welche der Übertragung dienen, dieselben Wege zurücklegen, so verschwindet die Arbeit der Übertragung. Dies tritt z. B. ein bei Zahnrädern, aber auch bei Riemscheiben und Reibungsrädern, da bei letzten beiden gleitende oder rollende Bewegungen im Betriebe ausgeschlossen werden.

Während man für ein Kräftesystem, das an einem starren Körper im Gleichgewichte ist, der Berechnung der Arbeit virtuelle Verrückungen von endlicher Größe zu Grunde legen kann, muß man die erlaubten und im besonderen die zweckmäßigen Verrückungen von unfreien Körpern und Körpersystemen im allgemeinen unendlich-klein ansetzen, vorausgesetzt, daß man dabei die Arbeit der Reaktionen außer acht lassen will.

Führt man die Reaktionen für die Stellung des Gleichgewichtes ein und denkt sie an den Körpern haftend, so unterliegen die Verrückungen natürlich keiner Beschränkung; thut man das aber nicht, so bleiben die Bedingungen des ersten Ansatzes bei einer endlichen Verrückung meist nicht erfüllt, ganz abgesehen davon, daß die entsprechende Arbeit dann auch meist aus Elementararbeiten zusammengesetzt werden muß.

Da die sichere bezw. unsichere Gleichgewichtslage dadurch gekennzeichnet ist, daß die Arbeit der vorhandenen Kräfte für noch so kleine endliche Verrückungen [1]) aus ihr negativ bezw. positiv ist, während sie für die unbestimmte Gleichgewichtslage den Wert Null hat (vergl. S. 470), so verschwindet diese Arbeit nur für letztere auch bei endlichen Verrückungen.

Als Princip der virtuellen Verrückungen pflegt man die Umkehrung des im vorstehenden entwickelten Satzes zu bezeichnen, welchem man folgende Form geben kann: Ein System miteinander verbundener starrer Körper ist im Gleichgewichte, wenn die Arbeit der angreifenden Kräfte (ausschließlich der Reaktionen) für alle zweckmäßigen Verrückungen verschwindet, vorausgesetzt, daß die Reibungen gleitender und rollender Bewegungen vernachlässigt werden dürfen.

Dehnt man die Gruppe der Verrückungen auf alle erlaubten Verrückungen aus, so ist jene Arbeit entweder Null oder sie nimmt einen negativen Wert an.

Da man bei der Fülle der Befestigungsarten nicht beweisen kann, daß für alle zweckmäßigen Verrückungen im Falle des Gleichgewichtes $\mathfrak{A}_R = 0$ ist, so kann man auch obige Umkehrung nicht streng beweisen, und darum bezeichnet man sie nicht als Lehrsatz, sondern als Princip, zumal man auch in einem bestimmten Falle nicht immer alle zweckmäßigen Verrückungen übersehen kann.

Würde man den Satz und die Umkehrung von vornherein auf die Verrückungen einschränken, für welche $\mathfrak{A}_R = 0$ ist, so gelangte man natürlich sofort zu strengen Beweisen. Denkt man nämlich alle Reaktionen des Systems

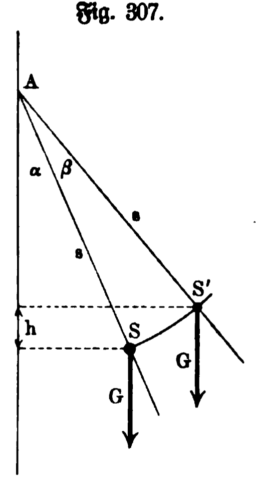
---

[1]) Dies gilt auch schon für unendlich-kleine Verrückungen, falls man die Arbeit in zweiter Annäherung berechnet. Vergl. die Anmerkung 1 auf S. 470.

eingeführt, so giebt die Gleichung $\mathfrak{A}_K = 0$, da sie unter der Voraussetzung $\mathfrak{A}_R = 0$ mit der Gleichung $\mathfrak{A}_K + \mathfrak{A}_R = 0$ übereinstimmt, unmittelbar den Satz und seine Umkehrung, gemäß den Betrachtungen auf S. 483.

Für die Verwendung des Principes gilt als Regel, daß man die Arbeit für so viele Verrückungen ansetzt, als zur Bestimmung der Unbekannten erforderlich und hinreichend sind; dabei ist die Auswahl der Verrückungen möglichst günstig zu treffen, d. h. so, daß jede Verrückung eine Kraft oder auch mehrere Kräfte senkrecht schneidet.

Fig. 307.



Zur Erläuterung der ganzen Betrachtung geben wir einige Beispiele.

Zunächst mag ein Körper untersucht werden, der um eine horizontale Achse (A) drehbar ist, sein Schwerpunkt S habe von dieser den Abstand s. Wir betrachten den Körper in irgend einer Stellung, bei welcher das Lot SA vom Schwerpunkte auf die Achse gegen die Vertikale um α abweicht (vergl. Fig. 307). Wir verrücken den Körper so, daß die Abweichung auf $\alpha + \beta$ wächst und berechnen die Arbeit $\mathfrak{A}$, welche der Verrückung entspricht; sie ist für ein Gewicht $[G]$ gegeben als $\mathfrak{A} = -G.h$, wobei $h = s[\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta)]$ ist.

Da $\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha(1 - \cos\beta) + \sin\alpha \sin\beta$ ist, so ist $\frac{h}{s}$ für kleine Werte von β darstellbar, falls man $\operatorname{arc}\beta$ durch b bezeichnet, als

$$\cos\alpha\left(\frac{b^2}{2!} - \frac{b^4}{4!} + \cdots\right) + \sin\alpha\left(b - \frac{b^3}{3!} + \cdots\right).$$

In erster Annäherung ist also

$$\mathfrak{A} = -G.s.\sin\alpha.b.$$

Der Ansatz $\mathfrak{A} = 0$ fordert $\sin\alpha = 0$, d. h. $\alpha = 0$ oder $\alpha = 180^0$, solange s nicht Null ist.

Damit erhält man wieder die sichere ($\alpha = 0$) und die unsichere ($\alpha = 180^0$) Gleichgewichtslage des betrachteten Körpers.

Für $\alpha = 0$ ist in zweiter Annäherung

$$\mathfrak{A} = -G.s\left[\cos 0^0 \cdot \frac{b^2}{2!} + \sin 0^0 . b\right] = -\tfrac{1}{2} G.s.b^2.$$

Für $\alpha = 180^0$ ist in zweiter Annäherung

$$\mathfrak{A} = -G.s\left[\cos 180^0 \cdot \frac{b^2}{2!} + \sin 180^0 . b\right] = +\tfrac{1}{2} G.s.b^2.$$

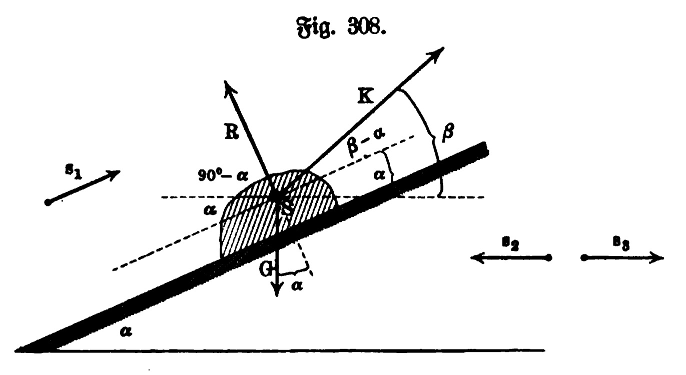
Demnach ist das Gleichgewicht für $\alpha = 0$ sicher und für $\alpha = 180^0$ unsicher. Dieselbe Charakteristik des Gleichgewichtes findet man bei Betrachtung endlicher Verrückungen aus den Gleichgewichtslagen.

Unbestimmtes Gleichgewicht fordert $\mathfrak{A} = 0$ für jede Annäherung, d. h. $s = 0$.

Die Verrückung, die wir betrachteten, war eine thatsächlich ausführbare, also eine erlaubte, und im besonderen, da keine einseitigen Widerstände in Frage kommen, eine zweckmäßige. Soll auch die Reaktion $[R]$ in A bestimmt werden, so müssen wir eine virtuelle Verrückung wählen, die nicht erlaubt ist. Wir denken dazu $[R]$ am Körper haftend und rücken ihn senkrecht nach oben um die Strecke p. Die Arbeit von $[G]$ ist demnach $- G \,.\, p$, während die Arbeit von $[R]$ den Wert $+ R \,.\, p$ hat, so daß sich $R = G$ ergiebt.

Als zweites Beispiel wählen wir die Unterstützung eines Körpers durch eine schiefe Ebene bei einer Kraft $[K]$, wie es Fig. 308 zeigt.

Fig. 308.

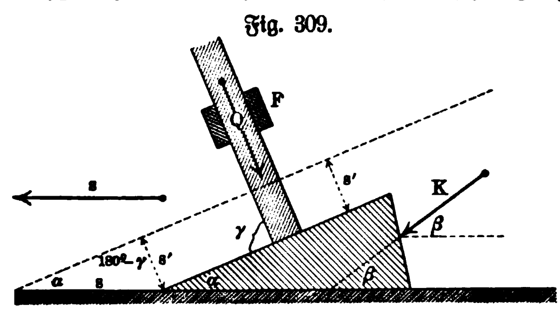


Lassen wir den Körper längs der schiefen Ebene gleiten, entsprechend der in Fig. 308 bezeichneten Verrückung $[s_1]$, so bilden $[K]$, $[G]$ und $[R]$ mit dieser Verrückung bezw. die Winkel $\beta - \alpha$, $90^0 + \alpha$ und 90^0. Die Arbeit für diese Verrückung ist also

$$\mathfrak{A} = K s_1 \cos(\beta - \alpha) + G s_1 \cos(90^0 + \alpha) + R \,.\, s_1 \cos 90^0.$$

Für $\mathfrak{A} = 0$ ergiebt sich $K = \dfrac{G \sin \alpha}{\cos(\beta - \alpha)}$ als Bedingung für das Gleichgewicht, was auch eine einfache Kraftzerlegung bestätigt.

Fig. 309.



Der Ansatz der Arbeit für diese eine zweckmäßige Verrückung führt also hier schon zum Ziele, wobei $[R]$ von vornherein unberücksichtigt bleiben konnte.

Will man auch $[R]$ bestimmen, so muß man $[R]$ am Körper haftend denken und z. B. eine der in der Figur gleichfalls bezeichneten Verschiebung $[s_2]$ oder $[s_3]$ benutzen. Man hat für $[s_2]$

$$\mathfrak{A} = R \cdot s_2 \cos(90^0 - \alpha) + K \cdot s_2 \cos(180^0 - \beta) + G \cdot s_2 \cos 90^0.$$

Für $\mathfrak{A} = 0$ ergiebt sich

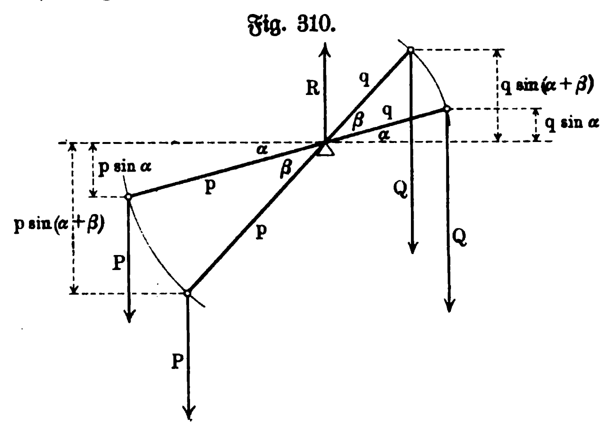
$$R = K \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \frac{G \cdot \cos\beta}{\cos(\beta - \alpha)}.$$

Dasselbe Ergebnis liefert die Verrückung um $[s_3]$, wobei ebenso wie in letzterem Falle die Arbeit von $[G]$ von vornherein unberücksichtigt bleiben kann. Die Verschiebung $[s_2]$ ist erlaubt, weil sie thatsächlich ausführbar ist, aber nicht zweckmäßig, weil sie den Zwecken der Konstruktion nicht entspricht, die Verschiebung $[s_8]$ ist unzulässig, weil sie nicht ohne Zerstörung des Materials der schiefen Ebene vorgenommen werden könnte.

Das Gleichgewicht ist unbestimmt, weil die Arbeit für Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage Null ist; infolgedessen können die Strecken s_1, s_2, s_3 auch von endlicher Größe angenommen werden.

Als drittes Beispiel wählen wir einen Fall (vergl. Fig. 309), in welchem das hier verwendete Princip als Methode der Kraftzerlegung entschieden überlegen ist. Eine bei F geführte Stütze, welche unter dem Einflusse von Kräften den Druck $[Q]$ ausübt, ruht auf einem Keile, den eine Kraft $[K]$ antreibt. Unter Vernachlässigung der Reibung sind alle Reaktionen normal zu den beweglichen Flächen, liefern also keine Arbeit.

Fig. 310.



Giebt man dem Keile die horizontale Verschiebung $[s]$, mit der $[K]$ den Winkel β bildet, so rückt der Angriffspunkt von $[Q]$ um $[s']$ aufwärts, und zwar ist $s' = s \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$. Man hat also

$$\mathfrak{A} = Ks \cdot \cos\beta - Qs \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma},$$

d. h. für $\mathfrak{A} = 0$ ergiebt sich als Bedingung des Gleichgewichtes

$$K = Q \frac{\sin\alpha}{\cos\beta \cdot \sin\gamma}.$$

Die Gleichgewichtslage ist wieder unbestimmt und dem entspricht, daß s eine endliche Verschiebung sein darf.

Als nächstes Beispiel betrachten wir den belasteten Hebel, den Fig. 310 darstellt. Geht man von einer beliebigen Stellung (α) aus, so entspricht

einer Drehung um β die Hebung des Gewichtes Q um $q[\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha]$ und die Senkung des Gewichtes P um $p[\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha]$. Man hat also

$$\mathfrak{A} = - Qq[\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha] + Pp[\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha].$$

Für $\mathfrak{A} = 0$ ergiebt sich für alle Werte von α und β als Bedingung des Gleichgewichtes

$$Qq = Pp.$$

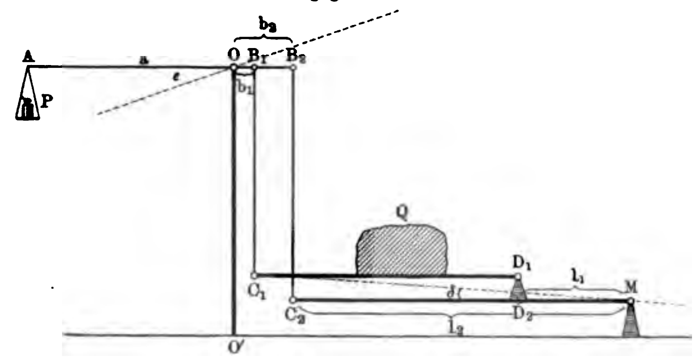
Will man auch R bestimmen, so muß man R am Hebel haftend denken und etwa die (unerlaubte) Verschiebung $[s]$ in Richtung von $[P]$ und $[Q]$ betrachten. Man hat dann

$$P.s + Q.s - R.s = 0,$$

d. h. $R = P + Q$ gilt für das Gleichgewicht.

Als verwickelteres Beispiel betrachten wir noch eine Hebelverbindung, welche eine Art der gebräuchlichen Brückenwagen darstellt (vergl. Fig. 311). Dreht sich der Hebel AB_1B_2 um O um einen kleinen Winkel ε so, daß sich A senkt, so heben sich B_1 und B_2 bezw. um $b_1 \, arc\, \varepsilon$ und $b_2 \, arc\, \varepsilon$, und ebenso

Fig. 311.



die Endpunkte C_1 und C_2 der bei B_1 und B_2 eingelenkten Stangen, von denen B_2C_2 die Platte C_1D_1 mit Spielraum durchbricht. Die Hebung von C_2 dreht die in C_2 und in M eingelenkte Stange C_2M um einen Winkel δ, für dessen Bestimmung $b_2 \, arc\, \varepsilon = l_2 \, arc\, \delta$ gilt, so daß $arc\, \delta = \frac{b_2}{l_2} \, arc\, \varepsilon$ ist. Infolgedessen hebt sich D_2 und damit D_1 um $l_1 \, arc\, \delta = \frac{l_1}{l_2} \cdot b_2 \, . \, arc\, \varepsilon$. Sollen sich die Punkte C_1 und D_1 gleichmäßig heben, so daß C_1D_1 dabei horizontal bleibt, wenn es einmal horizontal ist, so muß

$$b_1 \, arc\, \varepsilon = \frac{l_1}{l_2} \cdot b_2 \, arc\, \varepsilon$$

sein, d. h.

$$b_1 : b_2 = l_1 : l_2.$$

Ist die Konstruktion so ausgeführt, daß $b_1 : b_2 = l_1 : l_2$ ist, so ist die Bedingung des Gleichgewichts leicht zu bestimmen, da alle Reaktionen (in den Gelenken) bei Vernachlässigung der Reibung senkrecht stehen zu den Bahnen

ihrer Angriffspunkte. Es handelt sich dann nur um die Arbeit der Kraft $[P]$, deren Weg $a \operatorname{arc} \varepsilon$ und um die Arbeit der Kraft $[Q]$, deren Weg $b_1 \operatorname{arc} \varepsilon$ ist. Man hat also

$$+ Pa \operatorname{arc} \varepsilon - Qb_1 \operatorname{arc} \varepsilon = 0, \quad \text{d. h.: } P \, . \, a = Q \, . \, b_1$$

als Bedingung des Gleichgewichtes.

Für $a : b_1 = 10 : 1$ erhält man eine sogen. Dezimalwage ($P = \frac{1}{10} Q$), für $a : b_1 = 100 : 1$ eine sogen. Centesimalwage ($P = \frac{1}{100} Q$).

Als nächstes Beispiel betrachten wir noch eine senkrecht stehende Schraube, durch welche eine an der Spindel befestigte Last Q gehoben werden soll, und zwar durch eine Kraft K, welche an der Achse der Spindel in einer, zu dieser senkrechten Ebene am Arme k wirkt. Bei Vernachlässigung der Reibung sind die Reaktionen zwischen Spindel und Mutter senkrecht zu ihren Bahnen, so daß sie vernachlässigt werden können. Dreht man die Spindel einmal um, so hebt sie sich um die sogenannte Ganghöhe h, wobei die Arbeit $-(Q + G)h$ geleistet wird, wenn man das Gewicht der Spindel mit G bezeichnet. Der Weg der Kraft K ist dabei $2k\pi$, so daß die Arbeit $+ K \, . \, 2k\pi$ ist. Man hat also

$$\mathfrak{A} = -(Q + G)h + K \, . \, 2k\pi.$$

Für $\mathfrak{A} = 0$ erhält man

$$K = \frac{(Q + G)h}{2k\pi}$$

als Bedingung des Gleichgewichtes, dem Ruhe oder eine (mäßige) gleichförmige Bewegung der Spindel entspricht.

Führt man das Moment $Mo = Kk$ ein, so läßt sich obige Gleichung auch schreiben

$$Mo = \frac{h}{2\pi}(Q + G).$$

Schließlich betrachten wir die entsprechenden Verhältnisse für ein zusammengesetztes Triebwerk, bei welchem sämtliche Reaktionen bei Vernachlässigung der Reibung die Arbeit Null leisten.

Dies gilt z. B. für eine Bockwinde.

Entspricht einem vollen Umgange der Kurbel eine Hebung der Last Q um h, so gilt wieder für die Arbeit während eines Umganges bei Gleichgewicht

$$K \, . \, 2k\pi = Q \, . \, h.$$

Führt man die Zeit T ein, welche für einen Umgang der Kurbel erforderlich ist, so gilt auch

$$K \cdot \frac{2k\pi}{T} = Q \cdot \frac{h}{T}.$$

Dabei bezeichnet $\frac{2k\pi}{T}$ die mittlere oder auch die konstante Geschwindigkeit c_1 des Kurbelendes, während $\frac{h}{T}$ die mittlere oder auch die konstante Geschwindigkeit c_2 eines Punktes der Last darstellt. Demnach gilt hier auch

$$K \cdot c_1 = Q \cdot c_2 \quad \text{oder} \quad K = \frac{c_2}{c_1} \cdot Q.$$

Dabei ist $u = c_1 : c_2$ das Umsetzungsverhältnis (vergl. S. 204) der Maschine, gerechnet von Kraft zu Last.

Den Ansatz $K \cdot c_1 = Q \cdot c_2$ kann man auch unmittelbar erhalten, wenn man die Arbeitsstärke (vergl. S. 256) für K und Q ansetzt.

Das **Princip der virtuellen Verrückungen** leistet für einen **ersten** Überschlag stets gute Dienste, falls man sich vorbehält, die Ergebnisse durch **nachträgliche Einführung der Reibungen** nach Bedürfnis von Fall zu Fall zu verbessern.

Geschichtlich ist zu bemerken, daß man ursprünglich die Geschwindigkeiten betrachtete, welche virtuellen Verrückungen entsprechen, und daß man das in Rede stehende Princip deshalb früher das **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten** nannte.

Anwendungen der Lehre von den Befestigungsreaktionen.

---

1. **Das sichere Gleichgewicht der Wippe.** Ein prismatischer Körper ruht, wie Fig. 312 andeutet, auf einem Cylinder im Gleichgewichte. Um dessen Art zu bestimmen, betrachten wir die Höhe S' des Schwerpunktes in der Nebenlage, welche durch Abrollen von $B'B_1$ auf BB_1 zu stande gekommen ist. Über der Horizontalen durch B_1 hat, da $B'B_1 = BB_1 = r \,.\, arc\,\delta$ ist, B' die Höhe $r \,.\, arc\,\delta \,.\, sin\,\delta$, während S' über der Horizontalen durch B' die Höhe $h \,.\, sin\,(90^0 - \delta)$ hat.

Fig. 312.

Demnach hat S' über der Horizontalen durch B_1 die Höhe

$$r \,.\, arc\,\delta \,.\, sin\,\delta + h\cos\delta,$$

während S über ihr die Höhe

$$h + BC = h + MB - MC = h + r - r\cos\delta$$

hat. Das Gleichgewicht ist sicher, wenn $S'C' > SC$ für $lim\,\delta = 0$.

Für $S'C' = SC$ erhält man, falls man diese Größen in zweiter Annäherung darstellt

$$r \,.\, arc^2\delta + h(1 - \tfrac{1}{2}arc^2\delta) = h + r - r(1 - \tfrac{1}{2}arc^2\delta),$$

d. h.

$$h = r.$$

Sicheres Gleichgewicht ist also vorhanden, falls $h < r$ ist.

Die Betrachtung gilt auch für eine Kugel als Unterlage.

2. **Das sichere Gleichgewicht der Epicykloidenwiege.** Ein cylindrischer Körper ruht, wie Fig. 313 (a. f. S.) andeutet, auf einem Cylinder vom Radius R im Gleichgewichte. Um dessen Art zu bestimmen, betrachten wir die Höhe des Schwerpunktes S' in der Nebenlage, welche durch Abrollen von $B'B_1$ auf BB_1 zu stande gekommen ist. Über der Horizontalen durch B_1 hat M' die Höhe $y_1 = r\cos\varepsilon$ und B' die Höhe $y_2 = B'B_1 \sin B'B_1C$. Da $B'B_1 = 2r\sin\frac{\delta}{2}$ und $\measuredangle B'B_1C = 180^0 - \left(90^0 - \frac{\delta}{2}\right) - (90^0 - \varepsilon) = \varepsilon + \frac{\delta}{2}$ ist, so ist $y_2 = 2r\sin\frac{\delta}{2}\sin\left(\varepsilon + \frac{\delta}{2}\right)$.

Ist $BS = B'S' = h$, so ist $S'M' = r - h$, so daß S' die Strecke $B'M'$ im Verhältnisse $h : (r - h)$ teilt. Demnach ist die Höhe y_3 von S' über der Horizontalen durch B_1 gegeben als

$$y_3 = \frac{h y_1 + (r - h) y_2}{h + (r - h)} = \frac{h\, r \cos \varepsilon + (r - h)\, 2\, r \sin \frac{\delta}{2} \cdot \sin\left(\varepsilon + \frac{\delta}{2}\right)}{r}.$$

Dagegen ist die Höhe SC von S über der Horizontalen durch B_1 gegeben als

$$h + BC = h + BM - MC = h + R - R \cos \varepsilon.$$

Das Gleichgewicht ist sicher, wenn $S'C' > SC$ ist für $\lim \delta = 0$.

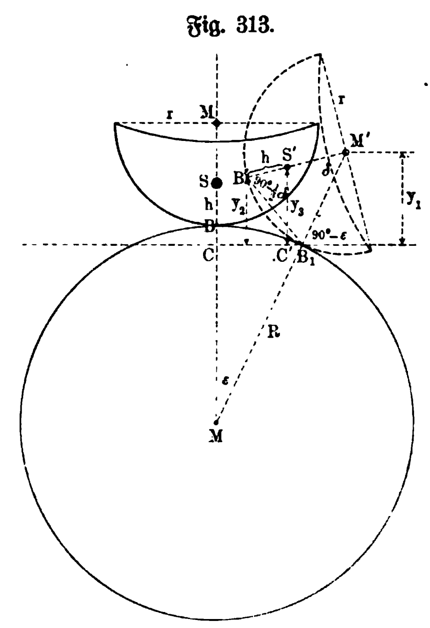
Für $S'C' = SC$ erhält man, falls man diese Größen in zweiter Annäherung darstellt

$$h(1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{arc}^2 \varepsilon) + 2(r - h)(\tfrac{1}{2} \operatorname{arc} \delta \,.\, \operatorname{arc} \varepsilon + \tfrac{1}{4} \operatorname{arc}^2 \delta)$$
$$= h + R - R(1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{arc}^2 \varepsilon).$$

Da wegen der Abwickelung beim Rollen $R \operatorname{arc} \varepsilon = r \operatorname{arc} \delta$ ist, so ist $\frac{\operatorname{arc} \delta}{\operatorname{arc} \varepsilon} = \frac{R}{r}$ und man hat daher, bei Division durch $\operatorname{arc}^2 \varepsilon$

$$-\frac{h}{2} + 2(r - h)\left(\frac{1}{2}\frac{R}{r} + \frac{1}{4}\frac{R^2}{r^2}\right) = \frac{1}{2} R$$

Fig. 313.



oder

$$\frac{h(r + R)^2}{r^2} = \frac{R(r + R)}{r},$$

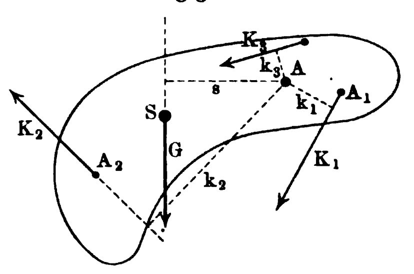
d. h.

$$h = \frac{rR}{r + R}.$$

Sicheres Gleichgewicht ist also vorhanden, falls $h < \frac{rR}{r + R}$ ist.

Dieselbe Betrachtung gilt auch für zwei Kugeln.

Fig. 314.



3. Der Hebel und seine Verwendung. Ein Körper (vergl. Fig. 314) sei bei A um eine, senkrecht zur Ebene der Zeichnung liegende Achse drehbar und werde von Kräften angegriffen, welche sämtlich in der Ebene der Zeichnung liegen, und zwar mag sich unter den angreifenden Kräften auch das Gewicht

G des Körpers in dessen Schwerpunkte S befinden. Soll sich der Körper im Gleichgewichte befinden, so muß das Moment der angreifenden Kräfte in Bezug auf A als Drehpunkt verschwinden, d. h. man hat für Fig. 314

$$+ K_1 k_1 + K_2 k_2 - K_3 k_3 - G \cdot s = 0.$$

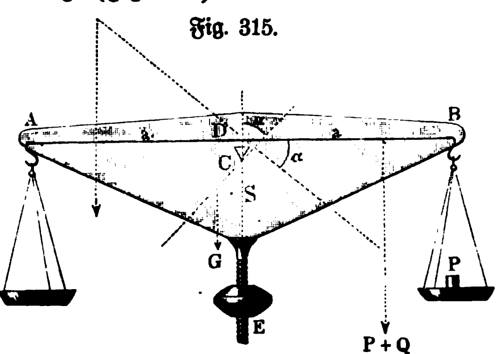
Ist diese Gleichung erfüllt, so verschiebt man, um die Reaktion in A zu bestimmen, alle Kräfte nach A und bildet ihr Polygon; die Gegenkraft der entstehenden Resultante ist die gesuchte Reaktion. Die Kräftepaare, welche der Verschiebung der Kräfte nach A entsprechen (vergl. S. 328), zerstören sich von selbst, wenn die oben aufgestellte Gleichung erfüllt ist.

Die einfachen Formen des Hebels sind aus dem ersten Lehrgange der Physik bekannt.

Wir betrachten hier zunächst noch die gleicharmige Hebelwage etwas genauer. Sie zeigt eine Anwendung des um einen Punkt drehbaren Körpers, der sich im stabilen Gleichgewicht befindet, bei dem also der Schwerpunkt S senkrecht unter dem Drehpunkte C liegt (Fig. 315).

Es sei AB der Wagebalken von der Länge $2a$, G das Gewicht desselben, Q das Gewicht einer Schale mit Zubehör, C der Drehpunkt des Balkens, S der Schwerpunkt der Wage und D der Durchschnittspunkt der Linie AB mit der Linie CSE. Es werde an einer Seite ein Übergewicht P angebracht, wodurch der Balken aus seiner horizontalen Gleichgewichtslage in eine geneigte übergeht, die durch den Winkel α bestimmt werden kann, welchen die neue Lage von AB mit der Horizontalen bildet. Es ist der Winkel α zu bestimmen, wobei $CS = b$ und $CD = -c$ ist, da sich S und D zu verschiedenen Seiten des Drehpunktes C befinden. Man hat

Fig. 315.



$$(P + Q)(a \cos\alpha - c \sin\alpha) - Q(a \cos\alpha + c \sin\alpha) - G b \sin\alpha = 0$$

d. h. $\cos\alpha(Pa + Qa - Qa) - \sin\alpha(Pc + Qc + Qc + Gb) = 0.$

Hieraus folgt:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{Pa}{(2Q + P)c + Gb}.$$

Man will bei einem kleinen Übergewicht P einen großen Ausschlagwinkel α haben. In dem vorliegenden Ausdruck soll also $\operatorname{tang}\alpha$ recht groß werden. Es läßt sich das erreichen, wenn man a, den Arm des Balkens, recht lang macht, das Gewicht G desselben möglichst reduziert und die Entfernung c recht klein annimmt.

In der praktischen Ausführung, besonders für feine, zum chemischen Gebrauche geeignete Wagen ist c gewöhnlich gleich Null, d. h. der Drehpunkt des Balkens liegt mit den Aufhängepunkten der Schalen in derselben geraden Linie. Hierfür gilt:

$$tang\,\alpha = \frac{Pa}{Gb}.$$

Weiter vermindert man, um bei der Wage eine recht große Empfindlichkeit zu erreichen, b so viel als möglich, d. h. man bringt den Schwerpunkt S wenig tiefer als den Aufhängepunkt.

Da die Wagebalken, welche zwar gleiche Längen haben sollen, thatsächlich nicht genau gleich sind, so hilft man sich diesem Übelstande gegenüber durch eine doppelte Wägung. Wird ein Körper vom Gewichte W in der Schale, welche dem Arme a_1 entspricht, durch das Gewicht Q_1 im Gleichgewichte gehalten, dagegen in der Schale, welche dem Arme a_2 entspricht, durch das Gewicht Q_2, so gilt

$$W \cdot a_1 = Q_1 \cdot a_2 \quad \text{und} \quad W \cdot a_2 = Q_2 \cdot a_1.$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen erhält man

$$W = \sqrt{Q_1 Q_2}.$$

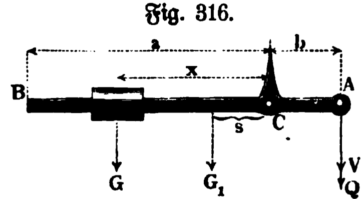
Durch Division beider Gleichungen erhält man

$$a_1 : a_2 = \sqrt{Q_1} : \sqrt{Q_2}.$$

Für den Fall der Fig. 316, bei welcher V die Belastung bezeichnet, welche den unbelasteten Hebel vom Gewichte G_1 im Gleichgewichte erhält, gilt zunächst

$$G_1 s = Vb.$$

Fig. 316.

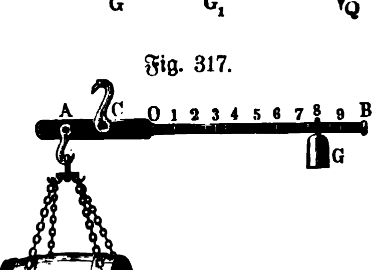


Wird in A eine Last Q angehängt und auf BC das Gewicht G aufgeschoben, so gilt ferner bei Gleichgewicht

$$Gx = Qb,$$

d. h. $x = Q \cdot \frac{b}{G}$, so daß x proportional ist zu Q.

Fig. 317.



Die praktische Ausführung dieses Apparates wird als Wiegevorrichtung benutzt und heißt **römische Schnellwage** (Fig. 317). Bei derselben ist der lange Hebelarm, zur Aufnahme des **konstanten** Gegengewichtes G, der Gleichung $x = AC \cdot \frac{Q}{G}$ gemäß, in gleiche Teile zu teilen, und zwar von O aus, falls G in O bei unbelasteter Wage Gleichgewicht herstellt.

Zeigerwagen sind Wiegevorrichtungen, bei welchen die Größe einer abzuwiegenden Last durch ein konstantes Gewicht, welches mit der Wage unveränderlich verbunden ist, bestimmt werden kann, und bei denen das Gewicht der Last von einem Zeiger auf bestimmter Skala angegeben wird.

In Fig. 318 ist eine Garnsortierwage abgebildet, wie dieselbe z. B. zur Bestimmung der Feinheitsnummer baumwollener geweifter Garne benutzt wird.

Der Wagebalken AB ist ein ungleicharmiger Hebel, der bei C seinen Drehpunkt hat, bei B mit einem Haken zur Aufnahme der Garnsträhne versehen ist und bei A ein Gegengewicht von solcher Größe trägt, daß der Schwerpunkt des Balkens in den Drehpunkt C fällt. Rechtwinkelig zu AB, im Punkte C, ist mit dem Balken der Arm CD fest verbunden, der an seinem Ende das konstante Gewicht trägt und unmittelbar darüber mit einem durchbrochenen Rahmen versehen ist, um dadurch die Zahlen auf dem Gradbogen EG erkennen zu können. Das Gewicht des Armes CD mit dem konstanten Gewicht am Ende sei W und dasselbe wirke im Schwerpunkt S. Die Wage ist hiernach so eingerichtet, daß im unbelasteten Zustande der Balken AB eine horizontale und der Arm CD eine vertikale Lage hat. Es sei $CB = a$, $CS = b$ und das zu bestimmende Gewicht in B sei gleich Q, dann haben wir, wenn der Arm CD bei dieser Belastung mit der Vertikalen den Winkel α bildet, als Gleichgewichtsbedingung

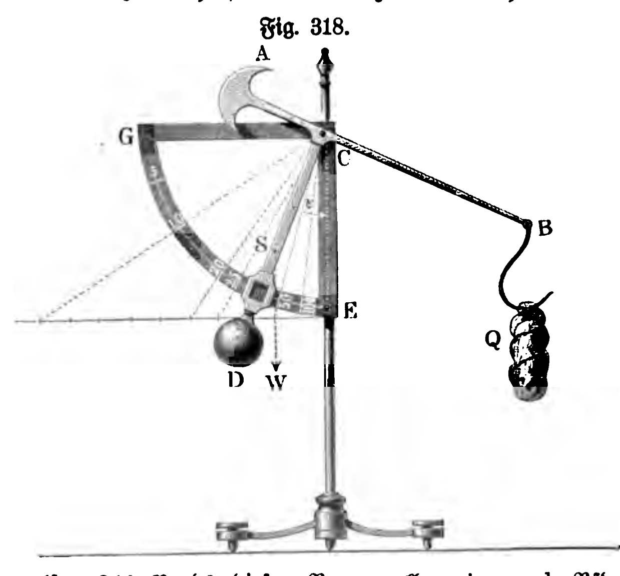
$$Qa \cos\alpha - Wb \sin\alpha = 0.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\tang\alpha = \frac{Qa}{Wb},$$

d. h. die trigonometrischen Tangenten der Ausschlagwinkel sind den Gewichten der Garnsträhne proportional. Hiernach ist eine in E zu CE errichtete Normale in gleiche Teile zu teilen, und die Verbindungslinien dieser Teilpunkte mit C werden auf dem Gradbogen die entsprechenden Teilstriche angeben, welche also unter sich ungleich sind. Bei den Garnen wird anstatt des Gewichtes die Feinheitsnummer angegeben, d. i. diejenige Zahl, mit der das Gewicht von 840 Yards Garnlänge zu multiplizieren ist, um 1 Pfd. engl. zu erhalten. Baumwolle Nr. 50 bedeutet also: 840 Yards dieser Baumwolle wiegen $\frac{1}{50}$ Pfd.

Fig. 318.



In der Figur sind auf dem Gradbogen, dieser Bezeichnung entsprechend, die einzelnen Teilstriche mit diesen Nummern versehen, wonach die Wage von Garn Nr. 100 bis Garn Nr. 5 benutzt werden kann.

4. Stangenverbindungen. Die Bestimmung, welche S. 479 u. f. für zwei sich gegenseitig stützende Blöcke durchgeführt wurde, gilt zugleich für zwei

Stangen, die in A_1, B, A_2 durch Gelenke verbunden sind. Man kann in A_1 und A_2 statt des festen Anschlusses wiederum eingelenkte Stangen einführen u. s. f., so daß man zu einem Stangenpolygon oder Stangeneck gelangt. Die auf S. 479 u. f. durchgeführten Betrachtungen gelten dann für je zwei benachbarte Stangen des Polygons. Namentlich bleibt auch die Regel über die Reaktion einer kraftfreien Stange dabei in Geltung, wonach diese stets innerhalb der Achse der Stange liegt.

Rückt $[G_1]$ nach A_1 oder nach B, während BA_2 kraftfrei ist, so rückt O_1 in gleichem Sinne weiter. Bei einer Belastung von A_1 ist $[R_{A_1}]$ senkrecht nach oben gerichtet, während $[R_1]$ verschwindet; bei einer Belastung von B fällt $[R_{A_1}]$ in die Achse der Stange A_1B, während $[R_1]$ in die Achse der Stange BA_2 fällt, d. h. bei Knotenbelastung von sonst kraftfreien Stangen liegen die Reaktionen in den Achsen der Stangen (vergl. Fig. 150).

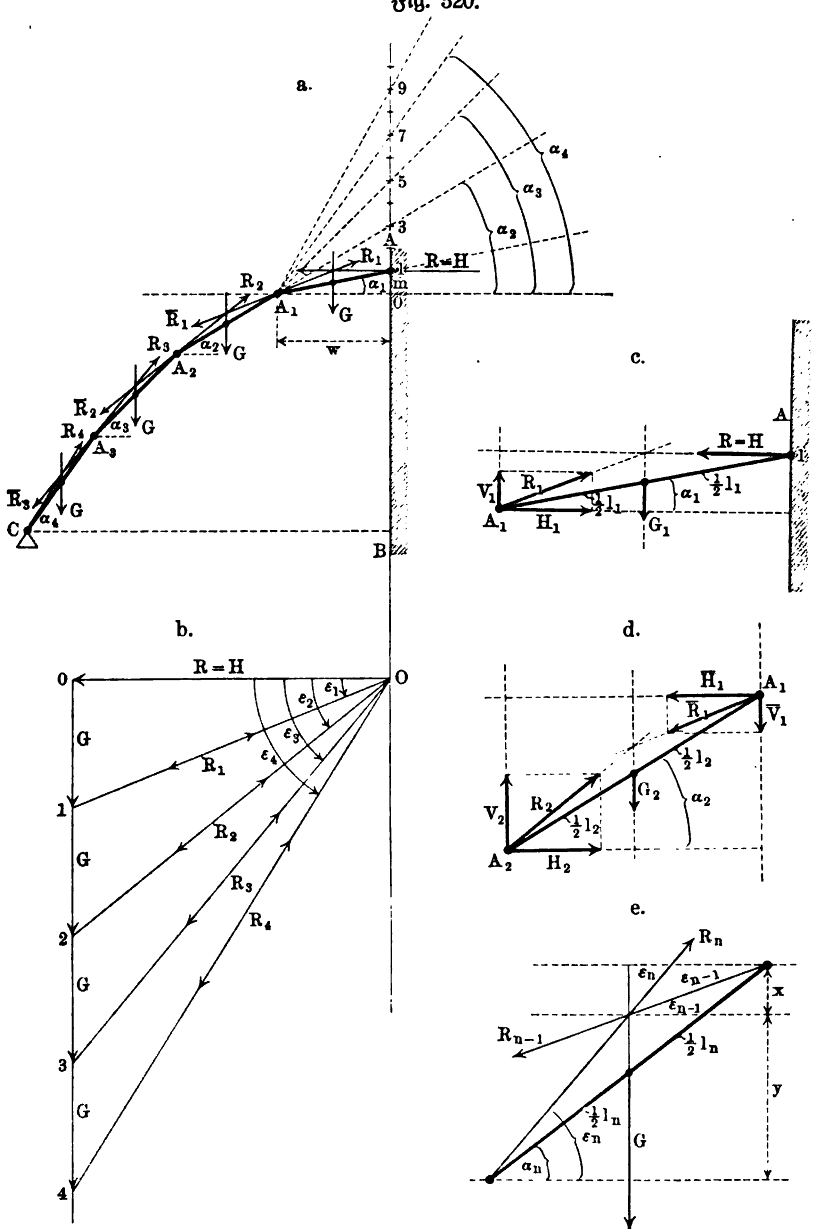
Fig. 319.

Wir behandeln zunächst die Aufgabe, welche S. 479 u. f. durchgeführt wurde, durch Einführung von Knotenbelastungen. Die Kraft $1\frac{1}{2}$ in S_1 ist in die parallelen Kräfte $\frac{1}{2}$ in A_1 und 1 in B zerlegt, ebenso die Kraft 3 in S_2 in die parallelen Kräfte 2 in A_2 und 1 in B. Die Kraft 2 in B zerlegt sich nach den Stangen in BC_1 und in BC_2; diese Komponenten geben, nach A_1 bezw. A_2 verschoben, dort im Verein mit den außerdem vorhandenen Kräften, bezw. die Resultanten A_1D_1 und A_2D_2, welchen bezw. die Reaktionen $[R_{A_1}]$ und $[R_{A_2}]$ entsprechen. Schneidet man die Konstruktion in B durch MN, so geben die in Fig. 319 b und c dargestellten Kraftdreiecke die Reaktionen $[R_1]$ und $[R_2]$. Zur Kontrolle dient noch Fig. 319 d.

Beim Mansardendach, welches Fig. 320 a darstellt, liefert die Wand AB, statt deren auch ein zweites, symmetrisch gelegenes Dach auftreten kann, eine horizontale Reaktion $[R]$, welche mit dem Gewichte der ersten Stange (Sparren) und der Reaktion $[R_1]$ von $[A_1]$ im Gleichgewichte steht. Für die zweite Stange spielt die Gegenkraft $[\overline{R}_1]$ von $[R_1]$ dieselbe Rolle, wie $[R]$ für die erste Stange u. s. f.

In Fig. 320 b sind die einzelnen Dreiecke, welche zur Bestimmung der Reaktionen dienen, für g l e i c h e Sparrengewichte aneinander gefügt; dabei ist

Fig. 320.



$1\,0 = R_1$ und $0\,1 = \overline{R_1}$, $2\,0 = R_2$ und $0\,2 = \overline{R_2}$ u. s. w. Man bezeichnet R als Horizontalschub (H).

In Bezug auf die Winkel, welche die Stangen mit der Horizontalen bilden, erhält man Beziehungen, wenn man die einzelnen Stangen in den Gelenken durch Schnitte voneinander trennt und auf sie die Gleichungen des Gleichgewichtes anwendet. Für die erste Stange (vergl. Fig. 320 c a. v. S.) giebt der Momentensatz in Bezug auf A_1 die Gleichung

$$-R(l_1 \sin \alpha_1) + G_1(\tfrac{1}{2} l_1 \cos \alpha_1) = 0,$$

d. h.

$$tg\, \alpha_1 = \frac{\frac{1}{2} G_1}{R}.$$

Außerdem ist $H_1 = R = H$ und $V_1 = G_1$.

In Bezug auf die zweite Stange (vergl. Fig. 320 d a. v. S.) giebt der Momentensatz in Bezug auf A_2 die Gleichung

$$-\overline{H_1}(l_2 \sin \alpha_2) + \overline{V_1}(l_2 \cos \alpha_2) + G_2(\tfrac{1}{2} l_2 \cos \alpha_2) = 0,$$

d. h.

$$tang\, \alpha_2 = \frac{\overline{V_1} + \frac{1}{2} G_2}{\overline{H_1}} = \frac{G_1 + \frac{1}{2} G_2}{R}.$$

Außerdem ist $H_2 = H_1 = R$ und $V_2 = G_2 + \overline{V_1} = G_2 + G_1$.

Ebenso ergiebt sich

$$tg\, \alpha_3 = \frac{G_1 + G_2 + \frac{1}{2} G_3}{R},\ H_3 = R \text{ und } V_3 = G_1 + G_2 + G_3 \text{ u. s. w.}$$

Für $G_1 = G_2 = \ldots G$, d. h. für unter sich gleichartige Stangen gilt also

$$tg\, \alpha_1 = \frac{G}{2R},\quad tg\, \alpha_2 = \frac{3G}{2R},\quad tg\, \alpha_3 = \frac{5G}{2R},\quad \cdots$$

Ist α_1 gegeben, so zeigt Fig. 320 a die Konstruktion für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ u. s. f.

Sind die Stangen nicht gleichartig, so ist die Konstruktion auch durchführbar, wenn auch in verwickelterer Weise.

Hat man die Sparren eingesetzt, so bestimmt sich auch das System der Reaktionen eindeutig. Diese Bestimmung muß übereinstimmen mit der in Fig. 320 b.

Bildet die $n$te Stange mit der Horizontalen den Winkel α_n, während die bereits bestimmte Reaktion $[R_{n-1}]$ mit der Horizontalen den Winkel ε_{n-1} bildet, so zeigt Fig. 320 e die Bestimmung der Reaktion $[R_n]$, die mit der Horizontalen den Winkel ε_n bildet. Man hat

$$tg\, \varepsilon_{n-1} = x : \frac{l_n}{2} \cos \alpha_n \quad \text{und} \quad tg\, \varepsilon_n = y : \frac{l_n}{2} \cos \alpha_n,$$

d. h.

$$tg\, \varepsilon_{n-1} + tg\, \varepsilon_n = (x + y) : \frac{l_n}{2} \cos \alpha_n = l_n \sin \alpha_n : \frac{l_n}{2} \cos \alpha_n = 2\, tg\, \alpha_n.$$

Da $tg\, \varepsilon_n = n \dfrac{G}{R}$ ist (nach Fig. 320 b), so ist

$$2\, tg\, \alpha_n = (2n - 1) \frac{G}{R}.$$

Man hat also

$$tg\,\varepsilon_1 : tg\,\varepsilon_2 : tg\,\varepsilon_3 : \cdots = 1 : 2 : 3 : \cdots$$

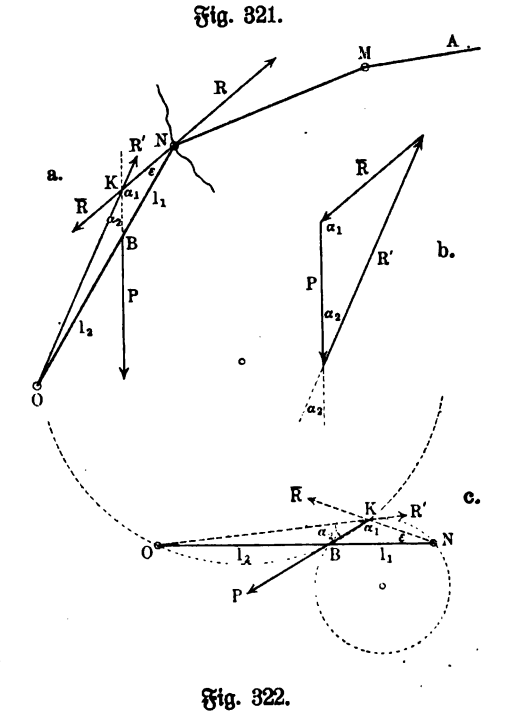
und

$$tg\,\alpha_1 : tg\,\alpha_2 : tg\,\alpha_3 : \cdots = 1 : 3 : 5 : \cdots$$

Dabei ist $tg\,\alpha_1 = \frac{m}{w}$ nach Fig. 320a und $tg\,\varepsilon_1 = \frac{G}{H} = \frac{2m}{w} = 2\,tg\,\alpha_1$ nach Fig. 320b, d. h. $H = \frac{1}{2}\,G\,cot\,\alpha_1$.

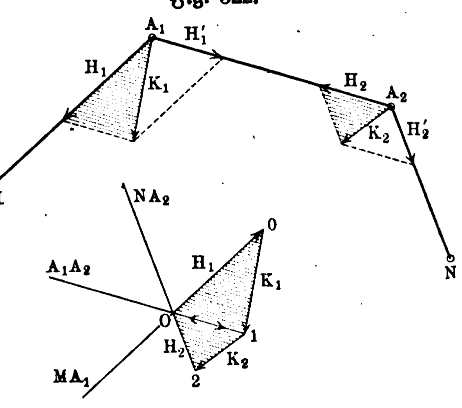
Handelt es sich allgemein darum (vergl. Fig. 321a), in einer Stangenverbindung AMN eine Stange l von bestimmter Belastung P in einem bestimmten Punkte N einzufügen, dessen Reaktion $[R]$ bereits bekannt ist, so kann man zunächst aus $[\bar{R}]$ und $[P]$ die Reaktion $[R']$ für das andere Ende der einzulenkenden Stangen bestimmen (Fig. 321b) und dem entsprechenden Dreiecke die Winkel α_1 und α_2 entnehmen, welche über den beiden Stücken l_1 und l_2 der Stange l stehen. Die Kreisbogen für α_1 und α_2 geben (vergl. Fig. 321c) den Punkt K und den Winkel ε, so daß die Stange nun in richtiger Lage in die Hauptfigur 321a eingezeichnet werden kann.

Fig. 321.



Für Knotenbeanspruchungen, welche unmittelbar als solche gegeben sind, findet Zerlegung nach den Achsen der Stangen statt, so daß die Stangenverbindung dann genau einem Seilpolygon entspricht, abgesehen davon, daß in Seilstücken nur Zug, in Stangen aber auch Druck auftreten kann.

Fig. 322.



In Fig. 322 ist ein solcher Fall behandelt, wobei $O\,0$ die Reaktion von M und $2\,O$ die Reaktion von N darstellt.

Stangenpolygone von unendlich-kleinen Seiten gehen in Stangenkurven über, welche alle Eigenschaften der Seilkurven haben. Vergl. S. 352.

5. Stützlinien und Belastungslinien. In Fig. 323 (a. f. S.) ist die Hälfte eines

gewöhnlichen Gewölbes (Tonnengewölbe mit horizontaler Achse) dargestellt, während dessen andere Hälfte durch die wagerechte Kraft $[H]$ ersetzt ist, mit welcher diese gegen die erste drückt. Die Aufschüttung oder Übermauerung über den einzelnen Gewölbesteinen ist, diesen entsprechend, zerlegt, so daß die eingezeichneten Schwerpunkte S_1, S_2, ... immer den Schwerpunkt je eines Gewölbestückes und der zugehörigen Belastung bezeichnen. Damit der erste Stein mit seiner Belastung, d. h. $ABCD$ im Gleichgewichte ist, muß ein Punkt der Fläche DD' eine Reaktion $[R_1]$ liefern, die mit $[H]$ und mit dem Gewichte $[G_1]$, welches sich in S_1 verdichtet, im Gleichgewichte ist; sie ist in der Nebenfigur bestimmt. Die Gegenkraft $[\overline{R_1}]$ dieser Reaktion drückt auf den zweiten Stein $DCFE$, so daß für dessen Gleichgewicht $[\overline{R_1}]$ mit $[G_2]$ und der Reaktion von $[R_2]$ von EE' im Gleichgewichte sein muß; auch $[R_2]$ ist in der Nebenfigur bestimmt.

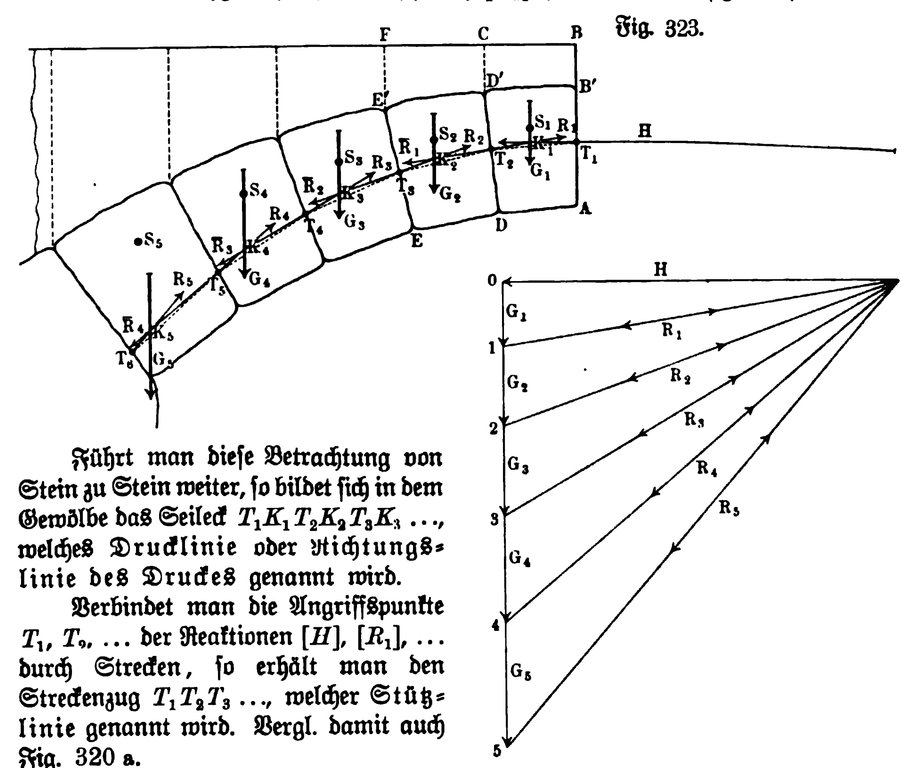


Fig. 323.

Führt man diese Betrachtung von Stein zu Stein weiter, so bildet sich in dem Gewölbe das Seileck $T_1 K_1 T_2 K_2 T_3 K_3 \ldots$, welches **Drucklinie** oder **Richtungslinie des Druckes** genannt wird.

Verbindet man die Angriffspunkte T_1, T_2, ... der Reaktionen $[H]$, $[R_1]$, ... durch Strecken, so erhält man den Streckenzug $T_1 T_2 T_3 \ldots$, welcher **Stützlinie** genannt wird. Vergl. damit auch Fig. 320 a.

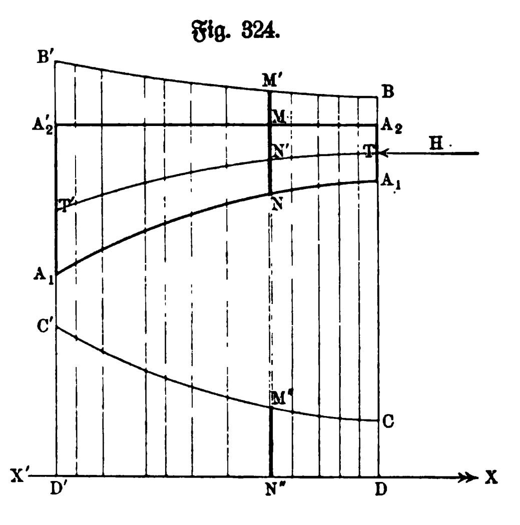
Zerlegt man das Gewölbe samt seiner Belastung nicht nach den natürlichen Fugen, sondern durch Schnitte, parallel zu AB, und bestimmt man für die dabei entstehenden Teilkörper die Drucklinie und die Stützlinie, so gehen beide Linien ineinander über, falls man die Schnitte einander unendlich nahe legt.

In diesem Falle kann man die Eigenschaften, welche die Drucklinie als Seilpolygon hat, auf die Stützlinie übertragen.

Ist für den Körper $A_1 A_2 A_2' A_1'$ der Fig. 324 in dieser Weise die Linie

TT' bestimmt, welche zugleich Drucklinie und zugleich Stützlinie ist, so kann man diese Linie als den Träger der ganzen Belastung ansehen, indem man für jede unendlich-dünne Schicht $MN = M'N'$ macht; bei dem Gewölbe, von dem wir ausgingen, könnte man die Fläche $AB'B$ in Fig. 323 entbehren, falls nur T_1 fest bleibt, ebenso die Fläche $DD'C$, falls nur T_2 fest bleibt u. s. f., da die Reaktionen lediglich die Punkte T_1, T_2 ... als feste Angriffspunkte erfordern.

Fig. 324.



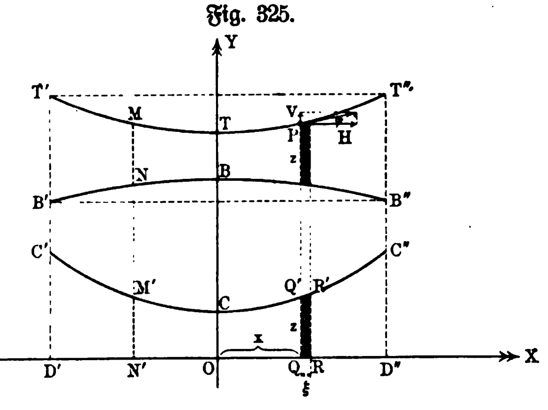
Man gelangt so zu einer Linie BB', welche die zur Stützlinie TT' gehörige **Belastungslinie** genannt wird.

In Fig. 324 ist die Belastung auch noch horizontal abgeglichen dargestellt, indem senkrecht zu der Achse $X'X$ überall $M''N'' = MN$ gemacht ist; so entsteht $DCC'D'$.

Dreht man Fig. 324 um A_2A_2' um 180°, so läßt sich TT' als ein Seil auffassen, zu welchem BB' die zugehörige Belastung bestimmt.

In Fig. 325 ist dies für die beiden Hälften des Körpers, von denen Fig. 324 die eine darstellt, durchgeführt; außerdem ist auch wieder die Belastung auf einer Horizontalen OX graphisch dargestellt, so daß überall $MN = M'N'$, also im besondern $T''B'' = C''D''$ und $TB = CO$ ist.

Fig. 325.



Ist die Gleichung der Seilkurve $T'T''$ in Bezug auf die Achsen XY dargestellt durch $y = f(x)$, so wird $tg\,\varphi$ für einen beliebigen Punkt P durch die Ableitung $f'(x)$ dargestellt, so daß

$$tg\,\varphi = \frac{V}{H} = f'(x)$$

ist.

Da H eine Konstante ist und da V mit der Belastung für den Bogen TP übereinstimmt, falls die Tangente in T horizontal ist (vergl. S. 353 u. f.), so ist $f'(x)$ proportional zu der Fläche von TP oder zu der Fläche $CQ'QO$.

Gelingt es, diese Fläche als Funktion $\varphi(x)$ von x darzustellen, so daß man für $OQ = x$ die zugehörige Fläche $OQQ'C$ berechnen kann, so gilt also

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{H}.$$

Bildet man aus beiden Seiten die Ableitungen, wobei die Ableitung von $f'(x)$, die sogenannte zweite Ableitung von $f(x)$, durch $f''(x)$ bezeichnet werden mag, so gilt auch

$$f''(x) = \frac{\varphi'(x)}{H}.$$

Der Erklärung nach (vergl. S. 58) hat man

$$\varphi'(x) = lim\left[\frac{\varphi(x+\xi) - \varphi(x)}{\xi}\right]_{\xi=0}.$$

Hier bedeutet $\varphi(x+\xi)$ die Fläche $ORR'C$ und $\varphi(x)$ die Fläche $OQQ'C$, also $\varphi(x+\xi) - \varphi(x)$ die Fläche $QRR'Q'$, welche sich an der Grenze als $z\,.\,\xi$ darstellen läßt, falls z die Strecke QQ', welche der Belastung in P gleich ist, bezeichnet. Demnach ist $\varphi'(x) = z$, und es gilt

$$f''(x) = \frac{z}{H}.$$

Hat man z. B. gleichmäßige Belastung der Horizontalen (vergl. S. 354), so ist $C'CC''$ eine Parallele zu OX und z hat einen konstanten Wert h, so daß

$$f''(x) = \frac{h}{H}$$

und also $f'(x) = \frac{h}{H}x + C$ ist, falls C eine Konstante bezeichnet; da $tg\,\varphi = f'(x) = 0$ ist für $x = 0$, so ist $C = 0$. Demnach gilt

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\frac{h}{H}x^2 + C',$$

falls C' eine Konstante bezeichnet. Ist $y = f(x) = a$ für $x = 0$, so ist $C' = a$, d. h. man hat als Gleichung der Seilkurve

$$y = f(x) = \tfrac{1}{2}\frac{h}{H}x^2 + a,$$

gelangt also zurück zu der früher bestimmten Parabel (vergl. S. 355), falls man $h = \gamma$ setzt und das Kreuz so verschiebt, daß $a = 0$ ist.

Für bestimmte Anwendungen ist es zweckmäßig, den Krümmungsradius ϱ der Seilkurve einzuführen. Unter den Ausdrücken für ϱ ist in diesem Falle

$$\varrho = \frac{1}{cos^3\varphi\,.\,f''(x)}$$

am geeignetsten.

Da $f''(x) = \frac{z}{H}$, so ist demnach

$$\varrho = \frac{H}{z\,.\,cos^3\varphi}.$$

Nennt man die Werte von ϱ und z für den Schnitt, für welchen $\varphi = 0$ ist, bezw. ϱ_0 und z_0, so ist im besonderen im Scheitel

$$\varrho_0 = \frac{H}{z_0}, \quad \text{d. h. } H = \varrho_0 z_0.$$

Durch Division der Gleichungen für ϱ und ϱ_0 erhält man noch

$$\varrho = \frac{\varrho_0 z_0}{z \,.\, \cos^3\varphi}.$$

Ist für einen Kreisbogen vom Radius r, der als Stützlinie gegeben ist, die zugehörige Belastungslinie gesucht, so ist die eben entwickelte Gleichung von besonderem Nutzen, da hier $\varrho = r$ ist.

Es ist dann, da auch $\varrho_0 = r$ ist, hier

$$z = \frac{z_0}{\cos\varphi^3}.$$

Demnach kann z für jede Stelle leicht durch eine dreifache Projektion aus z_0 gewonnen werden, wie Fig. 326 zeigt. Für diese gilt

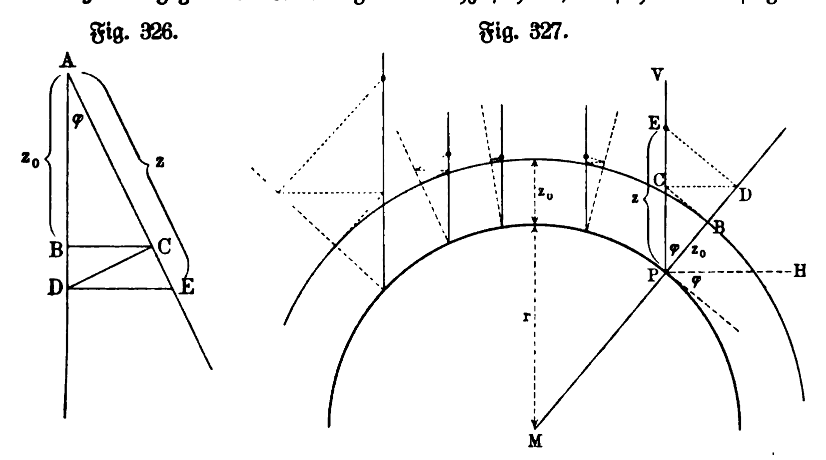
$$AC \,.\, \cos\varphi = z_0$$
$$AD \,.\, \cos\varphi = AC$$
$$AE \,.\, \cos\varphi = AD.$$

Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen erhält man

$$AE = \frac{z_0}{\cos^3\varphi} = z.$$

Um diese Konstruktion (vergl. Fig. 327) für beliebig-viele Punkte des als Stützlinie gegebenen Kreisbogens durchzuführen, verfährt man folgender-

Fig. 326. Fig. 327.



maßen. Die Tangente in P bildet mit der Horizontalen den Winkel φ, welchen auch die Vertikale PV mit dem Radius MP liefert. Trägt man also Fig. 326 in Fig. 327 ein, so daß A auf P und AE in die Richtung PV fällt, so ist E der zu P gehörige Punkt der gesuchten Belastungskurve.

Schlägt man mit $r + z_0$ einen Kreis um M, so liefert dieser auf jedem Radius MP den Punkt B, von dem aus Punkt E auf der zugehörigen Vertikalen PV gefunden werden kann.

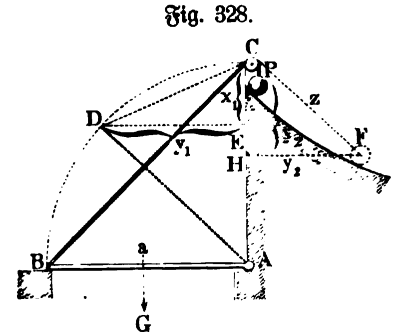
Eine weitere Betrachtung zeigt, daß der Krümmungsradius der Belastungskurve im Scheitel den Wert $\frac{r^2}{3z_0 - r}$ annimmt, so daß für $r = 3z_0$ eine Belastungskurve entsteht, welche in der Nähe des Scheitels angenähert horizontal verläuft.

Die Belastungslinie ist, von oben gesehen, in der Nähe des Scheitels für $r < 3z_0$ hohl, für $r > 3z_0$ erhaben.

Schreibt man als Belastungslinie eine Gerade vor, so findet man als zugehörige Stützlinie eine Gewölbelinie (vergl. S. 355).

6. **Führungsbahn eines Klappengewichtes.** Eine Klappe AB (Fig. 328) wird in horizontaler Lage durch ein Gewicht P im Gleichgewicht erhalten, das Gewicht ist mittels eines Seiles über eine feste Rolle geführt und hängt vertikal herab.

Fig. 328.



Wird die Klappe gehoben, so hört auch das Gleichgewicht auf, so daß eine Bewegung entsteht, durch welche die Klappe mit Heftigkeit gegen die vertikale Wand geschlagen wird. Um das letztere zu vermeiden, läßt man das Gewicht P nicht vertikal, sondern auf einer krummen Bahn herabsinken, so daß P mit der Klappe in jeder Lage im Gleichgewichte ist. Es ist diese krumme Bahn zu konstruieren.

Das Gewicht der Klappe sei G, ihre Länge a, das Seil BC habe die Länge l und für die horizontale Lage befinde sich das Gewicht P angenähert in dem Punkte C.

Für die horizontale Lage ist (für $AB = AC = a$)

$$G\frac{a}{2} - Pa \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0,$$

d. h.

$$P = \tfrac{1}{2}G\sqrt{2}.$$

Wir zerlegen G in zwei parallele Kräfte, die an den Enden der Klappe wirksam sind, von denen $\frac{G}{2}$ in A für die Bewegung ohne Einfluß ist. Die beiden Kräfte, die weiter in Betracht zu ziehen, sind also $\frac{G}{2}$, in B wirksam, und P.

Der Schwerpunkt der beiden Gewichte P und $\frac{G}{2}$ sei für die horizontale Lage um λ von der durch C gezogenen Horizontalen entfernt.

Die zur Bestimmung von λ dienende Gleichung ist:

$$\lambda\left(P+\frac{G}{2}\right)=P\,.\,o+\tfrac{1}{2}Ga$$

$$\lambda=\frac{\frac{1}{2}G}{P+\frac{G}{2}}a.$$

Das Gleichgewicht, welches für jede beliebige Lage der Klappe und des Gewichtes P bestehen soll, ist ein neutrales, da jede noch so kleine Vermehrung auf einer Seite eine Bewegung zur Folge haben soll, die nach Wegnahme des Übergewichtes sogleich wieder vernichtet werden soll. Der Schwerpunkt des Systems kann daher bei der Bewegung weder gehoben noch gesenkt werden, d. h. der Schwerpunkt des Systems ist von der durch C gelegten Horizontalen immer um λ entfernt.

Es stelle AD eine beliebige Lage der Klappe vor, für die P nach F gekommen ist.

Es sei

$$CE=x_1,\quad CH=x_2,$$
$$DE=y_1,\quad FH=y_2 \text{ und } CF=z.$$

Zwischen z und x_2 erhalten wir auf folgende Weise eine Beziehung. Es ist

$$z=l-\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$
$$z=l-\sqrt{2ax_1},$$

und wegen des neutralen Gleichgewichtes

$$\tfrac{1}{2}Gx_1+Px_2=\lambda\left(P+\frac{G}{2}\right),$$

d. h.

$$x_1=\frac{\lambda(P+\frac{1}{2}G)-Px_2}{\frac{1}{2}G},$$

oder, falls man den oben entwickelten Wert von λ substituiert,

$$x_1=\frac{\frac{1}{2}aG-Px_2}{\frac{1}{2}G}.$$

Wir erhalten hiernach

$$z=l-\sqrt{\frac{\frac{1}{2}aG-Px_2}{\frac{1}{2}G}\cdot 2a}.$$

Wird hierin P gleich $\frac{1}{2}G\sqrt{2}$ gesetzt, so entsteht

$$z=l-\sqrt{2a(a-x_2\sqrt{2})} \quad \text{oder}$$
$$z=l-\sqrt{l(l-2x_2)}.$$

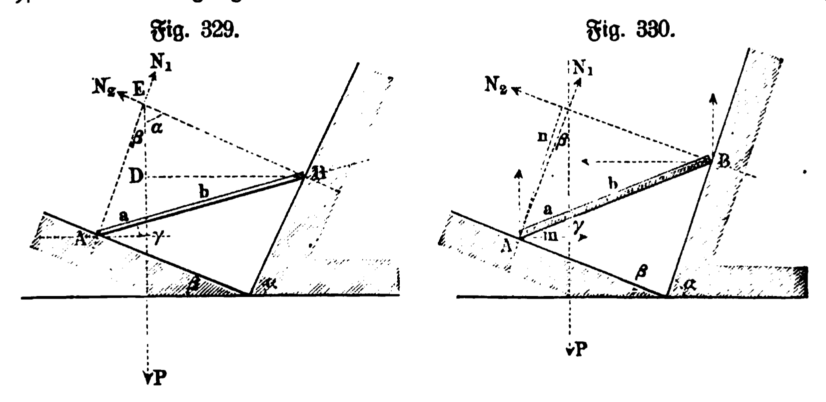
Hieraus läßt sich zu jedem Werte von x_2 das zugehörige z berechnen; die krumme Bahn, welche dem Gewichte P zur Unterlage dienen muß, ist also auf leichte Weise zu konstruieren.

7. Reaktionsbestimmungen in besonderen Fällen. I. Eine gerade gewichtslose Stange ruht mit ihren Enden auf zwei vollkommen glatten geneigten Ebenen, für die eine durch die Achse der Stange gelegte Vertikalebene

rechtwinkelig ausfallen mag. In einem beliebigen Punkte der Stange wird ein Druck P in einer zur Horizontalebene normalen Richtung ausgeübt. Es ist die Gleichgewichtslage der Stange zu bestimmen.

Erste Auflösung. Die in dem vorliegenden Falle entstehenden Reaktionen N_1 und N_2 (Fig. 329) sind in den Endpunkten des Stabes normal zu den geneigten Ebenen anzunehmen, und liegen mit P in der durch die Achse des Stabes gelegten Vertikalebene. Wenn die Reaktionen die Wirkung

Fig. 329. Fig. 330.



des Gewichtes P vernichten sollen, so müssen sich die Richtungen von N_1, N_2 und P in einem Punkte E schneiden. Zu dem Ende ist AE oder BE, oder der Winkel γ dem Gleichgewichtszustande gemäß zu bestimmen, da die Länge der Stange gleich $a + b$ bekannt ist. Es ist $BD = b \cos\gamma = BE \sin\alpha$, d. h.

$$BE = b\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}.$$

Weiter ist aus dem Dreieck AEB

$$BE : (a + b) = \sin(R - \beta - \gamma) : \sin(2R - \alpha - \beta)$$
$$= \cos(\gamma + \beta) : \sin(\beta + \alpha)$$

d. h.

$$BE = (a + b)\frac{\cos(\gamma + \beta)}{\sin(\beta + \alpha)}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für BE gefundenen Werte erhalten wir

$$b\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} = (a + b)\frac{\cos(\gamma + \beta)}{\sin(\beta + \alpha)}$$

$$b\sin(\beta + \alpha) = (a + b)\sin\alpha(\cos\beta - \sin\beta\,\mathrm{tang}\,\gamma)$$

$$\mathrm{tang}\,\gamma = \frac{-b\sin(\beta + \alpha) + (a + b)\sin\alpha\cos\beta}{(a + b)\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\mathrm{tang}\,\gamma = \frac{a\,\mathrm{cotg}\,\beta - b\,\mathrm{cotg}\,\alpha}{a + b}.$$

Zweite Auflösung. Wir nehmen A als Koordinatenanfangspunkt (Fig. 330) und zerlegen die Reaktionen N_1 und N_2 nach der Kraftrichtung von P und normal dazu, so sind die Gleichgewichtsbedingungen

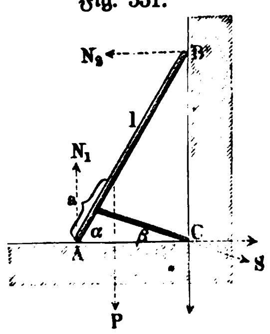
$$P - N_2 \cos\alpha - N_1 \cos\beta = 0$$
$$N_1 \sin\beta - N_2 \sin\alpha = 0$$
$$Pm - N_2 n = 0.$$

Hieraus folgt

$$P - N_2 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cos\beta - N_2 \cos\alpha = 0$$
$$N_2 = P \frac{\sin\beta}{\sin(\beta + \alpha)}$$
$$m = a\cos\gamma;\ n = (a + b)\cos(\gamma - \alpha)$$
$$aP\cos\gamma = P(a + b)\frac{\sin\beta\ \cos(\gamma - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}$$
$$a\sin(\beta + \alpha) = (a + b)\sin\beta\,(\cos\alpha + \sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\gamma)$$
$$\mathrm{tang}\,\gamma = \frac{a\sin(\beta + \alpha) - (a + b)\sin\beta\,\cos\alpha}{(a + b)\sin\beta\,\sin\alpha}$$
$$\mathrm{tang}\,\gamma = \frac{a\,\mathrm{cotg}\,\beta - b\,\mathrm{cotg}\,\alpha}{a + b}.$$

II. Ein Stab ohne Gewicht von der Länge l stützt sich mit dem einen Ende A gegen eine glatte horizontale, mit dem anderen gegen eine glatte vertikale Ebene und ist in der Entfernung a von dem Ende A durch ein Gewicht P belastet, das nach einer zur Horizontalebene normalen Richtung wirkt. Das Ausgleiten des Stabes wird durch die Befestigung desselben mittels eines gewichtlosen Seiles an einem Punkte C der Durchschnittslinie der beiden betreffenden Ebenen verhindert. Es ist die Spannung S dieses Seiles zu bestimmen, wenn die Punkte A, B, C in einer zu beiden Ebenen normalen Ebene liegen, und der Neigungswinkel des Stabes gegen die Horizontalebene gleich α, der des Seiles gleich β gegeben ist.

Fig. 331.



Wir nehmen die in den Punkten A und B entstehenden Reaktionen N_1 und N_2 (Fig. 331) normal zu den Ebenen zu Hülfe, zerlegen die Kraft S nach Richtung von AC und BC, und wählen C als Koordinatenanfangspunkt, so sind die Gleichgewichtsbedingungen

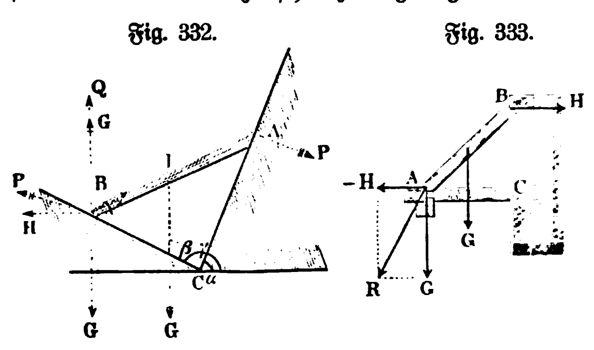
$$N_1 - P - S\sin\beta = 0$$
$$N_2 - S\cos\beta = 0$$
$$N_1 l\cos\alpha - N_2 l\sin\alpha - P(l - a)\cos\alpha = 0.$$

Hieraus folgt

$$(P + S\sin\beta)l\cos\alpha - Sl\cos\beta\,\sin\alpha = P(l - a)\cos\alpha$$
$$Sl(\sin\beta\,\cos\alpha - \cos\beta\,\sin\alpha) = -Pa\cos\alpha$$
$$Sl\sin(\alpha - \beta) = Pa\cos\alpha$$
$$S = P\frac{a}{l}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Für $\alpha = \beta$, wo $[S]$, $[N_1]$ und $[N_2]$ durch einen Punkt gehen, wird $S = \infty$; für $\beta > \alpha$ wird S negativ (Druck), so daß das Seil durch eine Stange ersetzt werden muß. Eine Stange hat für $\beta < \alpha$ Zug auszuhalten, für $\beta > \alpha$ Druck, für $\alpha = \beta$ ist sie unbrauchbar.

III. Ein Balken (Fig. 332) von der Länge l und dem Gewichte G ist mit seinen beiden Enden zwischen zwei geneigten Ebenen befestigt, dabei aber nicht in der Gleichgewichtslage, welche in Nr. I bestimmt wurde. Es sind die Kräfte zu bestimmen, die den Balken in dieser Lage erhalten, oder die Wirkungen, die gegen die Befestigungspunkte ausgeübt werden.



Die geneigten Ebenen bilden mit der Horizontalen die Winkel α und β, und der Balken bilde mit derselben Ebene den Winkel γ.

Wir verschieben G parallel seiner Richtung nach B; das entstehende Paar $G\frac{l}{2}\cos\gamma$ bringen wir auf eine solche Breite, daß die Kräfte nach dem Verschieben durch A und B gehen und normal zu AC wirksam sind. Nennen wir die Kraft P, so ist

$$G\frac{l}{2}\cos\gamma = Pl\cos(\alpha - \gamma),$$

d. h.

$$1)\quad P = \tfrac{1}{2}\frac{\cos\gamma}{\cos(\alpha - \gamma)}G.$$

Die Kraft P in dem Punkte B zerlegen wir nach horizontaler und vertikaler Richtung in die Komponenten H und Q. Es ist

$$H = P\sin\alpha$$

$$Q = P\cos\alpha.$$

$$2)\quad H = \tfrac{1}{2}\frac{\sin\alpha\cos\gamma}{\cos(\alpha - \gamma)}G.$$

Der lotrechte Druck V im Punkte B ist gleich $G - Q$, d. h. es ist

$$3)\quad V = \left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{\cos(\alpha - \gamma)}\right)G.$$

Diese allgemeinen Formeln finden ihre Anwendung, wenn Balken untereinander in geneigter Lage verbunden werden.

Ein Beispiel dafür stellt Fig. 333 dar.

1) $P = \frac{1}{2} G \cot g \gamma$,
2) $H = \frac{1}{2} G \cot g \gamma = P$,
3) $V = G$.

Ein weiteres Beispiel stellt Fig. 334 dar.

1) $P = \frac{1}{2} G \cos \gamma$,
2) $H = \frac{1}{4} G \sin 2\gamma$,
3) $V_1 = \frac{1}{2}(1 + \sin \gamma^2) G$.

Fig. 334.

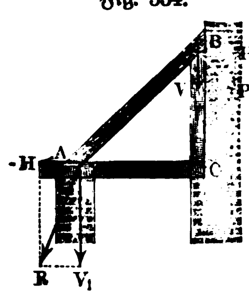
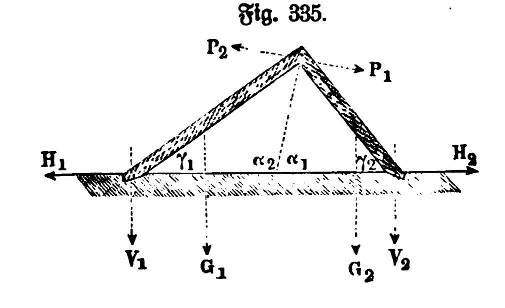


Fig. 335.



Ebenso folgt für Fig. 335

$$1)\quad P_1 = \frac{1}{2} G_1 \frac{\cos \gamma_1}{\cos(\alpha_1 - \gamma_1)}$$

$$P_2 = \frac{1}{2} G_2 \frac{\cos \gamma_2}{\cos(\alpha_2 - \gamma_2)}.$$

Für den Fall des Gleichgewichtes muß $P_1 = P_2$ sein. Gewöhnlich ist dann γ_1 und γ_2 gegeben, während α_1 bestimmt werden muß. Man hat:

$$\tan g\, \alpha_1 = \frac{G_1 + G_2}{G_1 \tan g \gamma_2 - G_2 \tan g \gamma_1}$$

und

$$2)\quad H_1 = \frac{1}{2} \frac{G_1 + G_2}{\tan g \gamma_1 + \tan g \gamma_2} = H_2,$$

$$3)\quad V_1 = G_1 - \frac{1}{2} \frac{G_1 \tan g \gamma_2 - G_2 \tan g \gamma_1}{\tan g \gamma_1 + \tan g \gamma_2}$$

$$V_2 = G_2 + \frac{1}{2} \frac{G_1 \tan g \gamma_2 - G_2 \tan g \gamma_1}{\tan g \gamma_1 + \tan g \gamma_2}$$

$$V_1 + V_2 = G_1 + G_2$$

$$V_2 - V_1 = \frac{G_2 \tan g \gamma_2 - G_1 \tan g \gamma_1}{\tan g \gamma_1 + \tan g \gamma_2}.$$

Das Zeichen des letzten Ausdruckes läßt erkennen, welcher der beiden Drucke V_1 oder V_2 der größere ist. Ist in dem letzten Falle $\gamma_1 = \gamma_2$, haben die geneigten Hölzer also gleiche Länge, so ist

$$P_1 = P_2 = H_1 = H_2 = \frac{1}{2} G \cot g \gamma$$

und

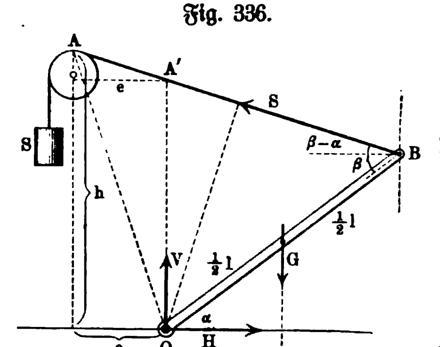
$$V_1 = V_2 = G.$$

IV. Ein prismatischer Stab OB von der Länge l ist an dem einen Ende O in einem Gelenke befestigt, während das andere Ende durch ein Seil gehalten wird, welches über eine feste Rolle läuft (vergl. Fig. 336). Es sind die Reaktionen in O zu bestimmen, sowie die Seilspannung, falls der Stab nur durch sein Gewicht G belastet ist.

Man hat

1) $S \cos(\beta - \alpha) = H$ für die Horizontalkräfte,
2) $V + S \cdot \sin(\beta - \alpha) = G$ für die Vertikalkräfte,
3) $G \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha = S l \sin\beta$ als Moment für O als Drehpunkt.

Fig. 336.



Aus Nr. 3 folgt

$$S = \frac{G}{2} \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}.$$

Der Wert für S liefert ferner im Verein mit Nr. 1 und Nr. 2

$$H = \frac{G}{2} \frac{\cos\alpha \cdot \cos(\beta - \alpha)}{\sin\beta}$$

$$V = G - \frac{G}{2} \frac{\cos\alpha \sin(\beta - \alpha)}{\sin\beta}.$$

Dabei ist β für ein bestimmtes α gegeben durch

$$\tan g\,\beta = \frac{e \sin\alpha + h \cos\alpha}{l + e \cos\alpha - h \sin\alpha}.$$

Man hat nämlich

$$l : OA' = \cos(\beta - \alpha) : \sin\beta$$

und

$$OA' = h - e \tan g(\beta - \alpha),$$

d. h.

$$h \cos(\beta - \alpha) - e \sin(\beta - \alpha) = l \sin\beta.$$

Daraus folgt $\tan g\,\beta$ durch Entwickelung von $\cos(\beta - \alpha)$ und $\sin(\beta - \alpha)$. Diese Betrachtung liegt der Theorie der einfachen Zugbrücke zu Grunde.

V. In einer Vertikalebene stützt sich ein prismatischer Stab AB von der Länge l gegen eine ebene Wand ST, während er außerdem noch im Punkte P durch einen runden Bolzen unterstützt wird. Welches ist die Bedingung des Gleichgewichtes? Vergl. Fig. 337 a.

Der Schwerpunkt des Stabes beschreibt bei allen möglichen Lagen eine Konchoide (vergl. Aufg. Nr. 173 a. S. 224). Die horizontalen Tangenten dieser Linie, welche der höchsten und der tiefsten Lage des Schwerpunktes entsprechen, bestimmen je eine Lage des sicheren und des unsicheren Gleichgewichtes.

Zur Bestimmung der Reaktionen $[N]$ senkrecht zu ST und $[N']$ senkrecht AB hat man, gemäß Fig. 337 a

1) $G - N' \cos\beta - N \cos\alpha = 0$ für die Vertikalkräfte,
2) $N' \sin\beta - N \sin\alpha = 0$ für die Horizontalkräfte,

3) $G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\beta - \overline{AP} \cdot N' = 0$ als Moment für A als Drehpunkt.

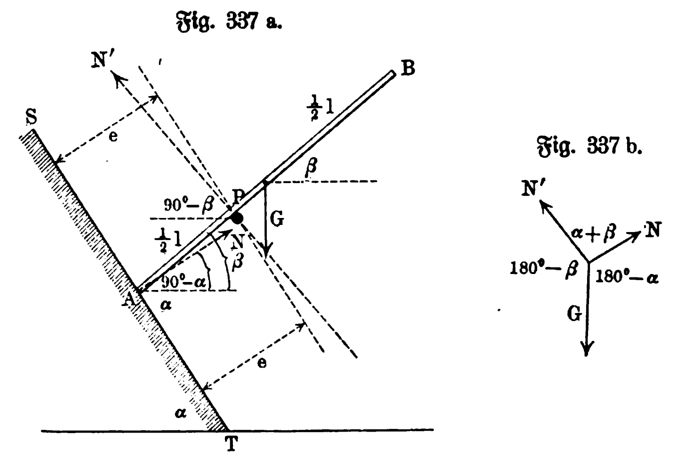
Dabei ist $AP = \frac{e}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Aus 1) und 2) folgt

$$N = \frac{G \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{und} \quad N' = \frac{G \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Dies zeigt auch unmittelbar der Satz von den drei Kräften, falls man Fig. 337 b entwirft.

Fig. 337 a.



Setzt man den Wert von N' ein in Nr. 3), so hat man

$$2\,e \sin\alpha = l \cos\beta \sin^2(\alpha + \beta)$$

als Gleichung zur Bestimmung von β; die Entwickelung von $\sin(\alpha + \beta)$ führt zu einer Gleichung sechsten Grades für $\sin\beta$ oder für $\cos\beta$.

VI. Ein prismatischer Stab AB von der Länge l ist in einem Punkte O an zwei Fäden von den Längen l_1 und l_2 aufgehangen. Es sind deren Spannungen für die Gleichgewichtslage zu bestimmen. Vergl. Fig. 338.

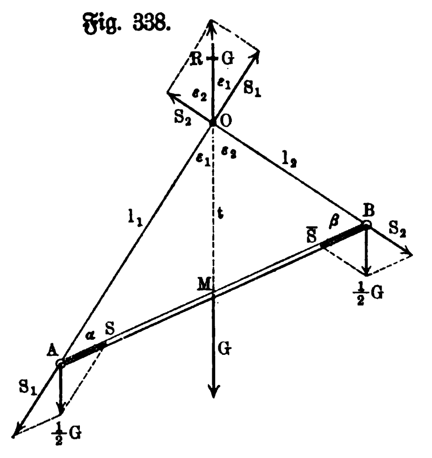
In O tritt eine Reaktion $[R]$ vom Werte G auf, so daß $[R]$ und $[G]$ Gegenkräfte werden. Zerlegt man $[R]$ nach den Richtungen der Fäden, so ist

$$S_1 = \frac{R \cdot \sin\varepsilon_2}{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

und

$$S_2 = \frac{R \cdot \sin\varepsilon_1}{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Fig. 338.



Für $OM = t = \frac{1}{2}\sqrt{2l_1^2 + 2l_2^2 - l^2}$ gilt

$$\sin\varepsilon_1 = \frac{l}{2t}\cdot\sin\alpha \quad \text{und} \quad \sin\varepsilon_2 = \frac{l}{2t}\cdot\sin\beta.$$

Demnach ist

$$S_2 = R\cdot\frac{l}{2t}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} = R\cdot\frac{l_2}{2t}$$

und

$$S_1 = R\cdot\frac{l}{2t}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} = R\cdot\frac{l_1}{2t}.$$

Dieselben Werte erhält man, wenn man zunächst $[G]$ in $[\frac{1}{2}G]$ in A und $[\frac{1}{2}G]$ in B zerlegt und ferner in A und B die weiteren Zerlegungen der Fig. 338 bildet.

Dabei ergiebt sich auch noch

$$S = \frac{1}{2}G\cdot\frac{\sin\varepsilon_1}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}G\cdot\frac{l}{2t} \quad \text{und} \quad \overline{S} = \frac{1}{2}G\cdot\frac{\sin\varepsilon_2}{\sin\beta} = \frac{1}{2}G\cdot\frac{l}{2t}.$$

VII. In einer Vertikalebene stützt sich eine dünne Platte von der Form eines rechtwinkelig-gleichschenkeligen Dreiecks auf zwei Pflöcke P_1 und P_2 in gleicher Höhe. Welches sind die Reaktionen für die Lage des Gleichgewichtes? Vergl. Fig. 339 a.

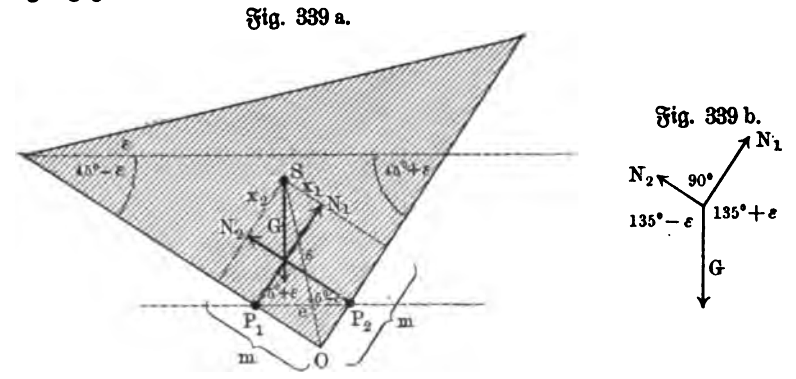


Fig. 339 a.

Fig. 339 b.

Man hat

1) $N_1\cos(45^0+\varepsilon) = N_2\cos(45^0-\varepsilon)$ für die Horizontalkräfte,

2) $N_1\sin(45^0+\varepsilon) + N_2\sin(45^0-\varepsilon) = G$ für die Vertikalkräfte.

Daraus folgt

$$N_2 = G\,.\,\cos(45^0+\varepsilon)$$
$$N_1 = G\,.\,\cos(45^0-\varepsilon).$$

Dieses Ergebnis folgt auch unmittelbar durch den Satz der drei Kräfte, gemäß Fig. 339 b.

Ist e der Abstand von P_1 und P_2, so giebt der Momentensatz für S als Drehpunkt

$$3)\quad N_1x_1 - N_2x_2 = 0.$$

Dabei ist $x_1 = m - e . sin(45^0 + \varepsilon)$ und $x_2 = m - e . sin(45^0 - \varepsilon)$, so daß Nr. 3 liefert

$$e . G[sin(45^0 + \varepsilon) . cos(45^0 - \varepsilon) - cos(45^0 + \varepsilon)\, sin(45^0 - \varepsilon)]$$
$$- m G[cos(45^0 - \varepsilon) - cos(45^0 + \varepsilon)] = 0,$$

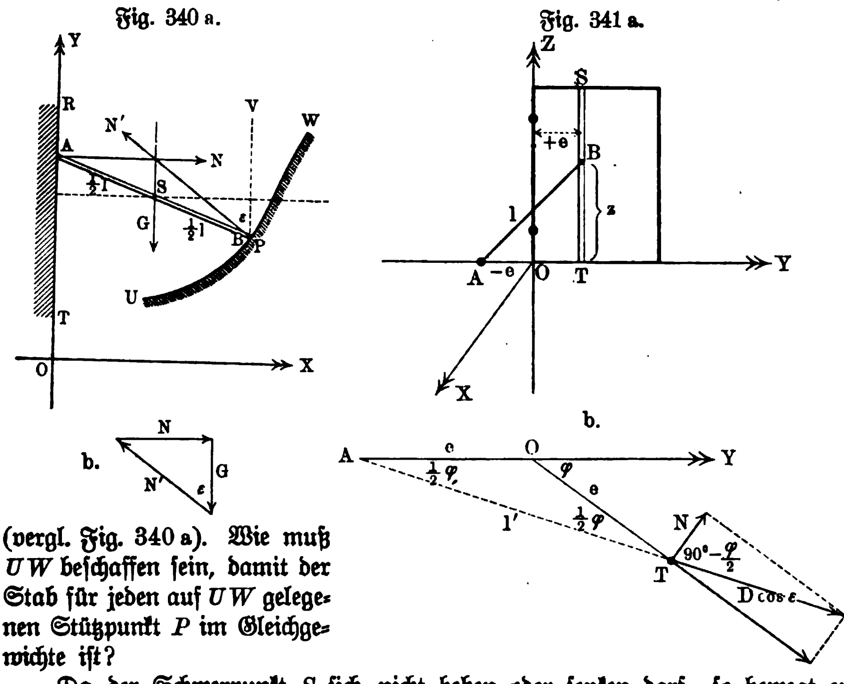
d. h. $e . sin 2\varepsilon = 2m . sin 45^0 . sin \varepsilon$. Da $OS = s = \frac{m}{cos 45^0}$ ist, so ist $e . sin 2\varepsilon = 2 . s . cos 45^0 . sin 45^0 . sin\varepsilon = s . sin \varepsilon$.

Da $sin 2\varepsilon = 2 sin\varepsilon . cos\varepsilon$ ist, so ist schließlich

$$2e . sin\varepsilon . cos\varepsilon = s . sin\varepsilon,$$

d. h. man hat die beiden Wurzeln $sin\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = 0$ und $cos\varepsilon = \frac{s}{2e}$.

VIII. Ein prismatischer Stab AB von der Länge l stützt sich in einer vertikalen Ebene gegen eine ebene Wand RT und gegen eine Hohlfläche UW



(vergl. Fig. 340 a). Wie muß UW beschaffen sein, damit der Stab für jeden auf UW gelegenen Stützpunkt P im Gleichgewichte ist?

Da der Schwerpunkt S sich nicht heben oder senken darf, so bewegt er sich bei Verwendung der Stützpunkte P auf einer horizontalen Geraden, während dabei A auf einer vertikalen Geraden gleitet.

Nimmt man die Horizontale durch den Schwerpunkt S als X-Achse, so beschreibt Punkt B, der augenblicklich mit P zusammenfällt, eine Ellipse (vergl. S. 194), deren horizontale Halbachse l und deren vertikale Halbachse $\frac{l}{2}$ ist, so daß sie für die durch S verlegte X-Achse die Gleichung

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4} l^2} = 1$$

hat.

Bestimmt man in P für die Ellipse UW Tangente und Normale, so ist damit die Richtung von $[N']$ gegeben, so daß das Kraftdreieck der Fig. 340b (a. v. S.) gezeichnet werden kann. Man hat, falls $[N']$ mit der Vertikalen den Winkel ε bildet,

$$N' = \frac{G}{\cos \varepsilon} \quad \text{und} \quad N = N' \sin \varepsilon = G \operatorname{tang} \varepsilon.$$

IX. Ein prismatischer Stab AB von der Länge l lehnt sich gegen eine Thür mit vertikaler Achse und gegen den Fußboden, so daß er beim Öffnen der Thür diese durch sein Gewicht wieder schließt (Thürschließer). Die genaueren Beziehungen zeigt Fig. 341a (a. v. S.) für die geschlossene Thür, für welche OZ Drehungsachse ist; die Führungsbahn ST für das Stabende B ist im Abstande e zu OZ parallel, während das Ende A auf der Y-Achse im Abstande $-e$ auf dem Fußboden drehbar befestigt ist.

Bei einer Öffnung der Thür um den Winkel φ ist die Horizontalprojektion l' des Stabes gegeben als $l' = 2e \cos \frac{\varphi}{2}$, so daß die Neigung ε des Stabes gegen den Horizont durch $\cos \varepsilon = \frac{l'}{l}$ bestimmt ist. Bezeichnet man den Druck des Stabes gegen die Thür durch $[D]$, so ist $D \,.\, \sin \varepsilon$ dessen senkrechte Komponente und diese muß gleich dem Gewichte G des Stabes sein. Man hat also

$$D = \frac{G}{\sin \varepsilon} \quad \text{und} \quad \cos \varepsilon = \frac{2e}{l} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$$

zur Bestimmung von D gegeben.

Da $\sin \varepsilon = \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon} = \frac{1}{l} \sqrt{l^2 - 4e^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}$ ist, so ist

$$D = \frac{G \,.\, l}{\sqrt{l^2 - 4e^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Die Komponente $[N]$ von $[D \,.\, \cos \varepsilon]$, welche zur Thürfläche senkrecht steht, hat den Wert

$$N = (D \cos \varepsilon) \,.\, \cos\left(90^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = D \,.\, \cos \varepsilon \,.\, \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Demgemäß ist das Moment, welches zur Offenhaltung der Thür nötig ist,

$$Mo = N \,.\, e = D \,.\, e \,.\, \cos \varepsilon \,.\, \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{G e^2 \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - 4e^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

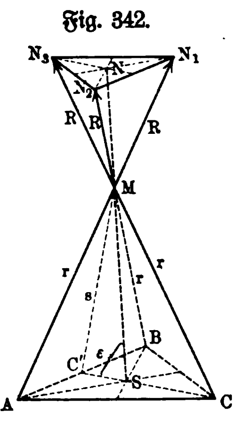
Die Höhe z von B über der Horizontalen ist $l \sin \varepsilon = \sqrt{l^2 - 4e^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}$, wobei sich für $\varphi = 0$ ergiebt $z = h = \sqrt{l^2 - 4e^2}$.

Umgekehrt ist $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{l^2 - z^2}}{2e}$.

X. In einer hohlen Halbkugel befindet sich eine schwere dreieckige Platte ABC, deren Dicke vernachlässigt werden kann, im Gleichgewichte. Wie bestimmt sich dieses? Vergl. Fig. 342.

Die Reaktionen von A, B, C stehen senkrecht zur Kugeloberfläche, schneiden sich also in deren Mittelpunkte M; ihre Resultante, welche gleichfalls durch M geht, ist die Gegenkraft des Gewichtes $[G]$ der Platte, welches in deren Schwerpunkte S wirkt. Verschiebt man die drei Reaktionen nach M, so daß sie bezw. durch $[MN_1]$, $[MN_2]$, $[MN_3]$ dargestellt werden, so geht deren Resultante $[MD]$ durch den Schwerpunkt N des Dreiecks $N_1N_2N_3$. Bildet man nämlich zunächst aus $[MN_2]$ und $[MN_3]$ die Resultante $[ME]$ und dann aus $[ME]$ und $[MN_1]$ die Resultante $[MD]$, so geht $[ME]$ durch die Mitte der Strecke N_2N_3 und demnach geht die Ebene des Parallelogramms $MEDN$, d. h. Ebene MN_1D durch den Schwerpunkt N des Dreiecks $N_1N_2N_3$; entsprechendes gilt für die Ebene MDN_2 und MDN_3, so daß auch der Durchschnitt MD der drei Ebenen durch N geht. Da die Gerade von $[MD]$ auch durch S geht, so liegen die Dreiecke $N_1N_2N_3$ und ABC perspektivisch in Bezug auf M, und da $MA = MB = MC$ als Kugelradien sind, so ist auch $MN_1 = MN_2 = MN_3$, d. h. die drei Reaktionen sind einander gleich. Da ihre Resultante $3[MN]$ den Wert G hat, so sind sie in einer, zur Pyramide $M(ABC)$ ähnlichen Pyramide $M(N_1N_2N_3)$ als die, den Kanten MA, MB, MC entsprechenden Kanten gegeben; dabei ist $MN = \frac{1}{3}G$.

Fig. 342.



Will man noch MS, welches MN entspricht, bestimmen, so hat man etwa einen Schnitt durch die Punkte M, C, S zu legen. Er ist dann für $CC' = t_c$

$$s^2 = \overline{MS}^2 + \frac{1}{9}t_c^2 - \frac{2}{3}t_c \, . \, MS \, . \, \cos\varepsilon$$
$$r^2 = \overline{MS}^2 + \frac{4}{9}t_c^2 - \frac{4}{3}t_c \, . \, MS \, . \, \cos(180^0 - \varepsilon).$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit 2, so ergiebt sich bei Addition

$$2s^2 + r^2 = 3\overline{MS}^2 + \frac{2}{3}t_c^2,$$

d. h.

$$MS = \sqrt{\frac{1}{3}(2s^2 + r^2 - \frac{2}{3}t_c^2)}.$$

Führt man die Seiten a, b, c des Dreiecks ABC ein, so gilt zunächst

$$s^2 = r^2 - \frac{1}{4}c^2.$$

Da ferner $t_c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$ ist, so ergiebt sich

$$MS = \frac{1}{3}\sqrt{9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Demnach ist

$$MN : MS = R : r = \frac{1}{3}G : \frac{1}{3}\sqrt{9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Man hat also

$$R = G \cdot \frac{r}{\sqrt{9 r^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}}.$$

Die Lage des Dreiecks ist also dadurch bestimmt, daß man S senkrecht unter M in dem bestimmten Abstande MS anbringt und das Dreieck um S schwenkt, so daß A, B, C in der Kugelfläche ruhen.

Legt man drei Kugeln von den Radien r_1, r_2 und r_3 in die Hohlkugel vom Radius r, so bilden deren Mittelpunkte C_1, C_2, C_3 ein Dreieck mit den Seiten $r_2 + r_3$, $r_3 + r_1$, $r_1 + r_2$, in dessen Ecken bezw. die Gewichte G_1, G_2, G_3 der drei Kugeln wirken. Die Reaktionen der Kugelfläche gehen durch C_1, C_2, C_3 und schneiden sich in M, so daß der Schwerpunkt S der Kugelgruppe wieder unter M liegen muß.

Für die weitere Ausführung ist zu beachten, daß hier $C_1 M = r - r_1$, $C_2 M = r - r_2$, $C_3 M = r - r_3$ ist.

Übungen zur Lehre von den Befestigungsreaktionen.

1. Welche Bedingung fordert das sichere Gleichgewicht, falls in Fig. 296 der Kegel durch einen Cylinder von der Höhe h ersetzt wird?

$$h < \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

2. Welche Bedingung fordert das Gleichgewicht, wenn sich ein Kugelabschnitt auf einer horizontalen Ebene wiegt?

Das Gleichgewicht ist stets sicher.

3. Welche Bedingung fordert das sichere Gleichgewicht, falls in Fig. 313 der Cylinder vom Radius R durch einen Hohlcylinder ersetzt wird (Hypocykloidenwiege)?

$$\frac{r^2}{R-r} + R - h = 0.$$

4. Hängt man eine fein gegliederte Kette auf, so stellt ihre Mittellinie in großer Annäherung eine Kettenlinie dar (vergl. S. 355 u. f.). Da die Kette in ihre alte Lage zurückkehrt, wenn sie aus dieser durch kleine Verrückungen entfernt wird, so findet für jene Lage Stabilität statt. Demgemäß muß der Schwerpunkt für die Gleichgewichtslage möglichst tief liegen (vergl. S. 470) und z. B. steigen, wenn die Kette durch einen nach unten gerichteten vertikalen Zug in der Mitte möglichst gerade gespannt wird. Dies ist nachzuweisen mit Rücksicht auf die fünfte Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte.

5. Der Hebel eines Sicherheitsventils von 0,5 m Länge sei am Ende mit 6 kg belastet. In der Entfernung von 0,025 m vom Drehpunkte befindet sich der Stützpunkt des Ventils, welches vermöge des inneren Dampfdruckes aufwärts gegen den Hebel gedrückt wird. Wie groß ist dieser Dampfdruck unter Voraussetzung des Gleichgewichtes?

120 kg.

6. An einem einarmigen Hebel von 0,8 m Länge ist ein Druck von 30 kg in der Entfernung 0,2 m vom Stützpunkte wirksam. Wie groß ist die zur Herstellung des Gleichgewichtes nötige Kraft am Ende des Hebels?

7,5 kg.

7. An einem zweiarmigen Hebel von 2 m Länge wirkt an dem einen Ende, das von dem Drehpunkt 1,75 m entfernt ist, eine Kraft von 5 kg.

Wie groß ist die zur Herstellung des Gleichgewichtes notwendige Kraft am anderen Ende?

35 kg.

8. An einem Winkelhebel, dessen Armlängen 0,6 und 2 m betragen, wirkt an dem Ende des 0,6 m langen Armes eine Kraft, welche einen Winkel von 60° mit demselben bildet. Wie groß ist dieselbe, wenn ihr durch eine rechtwinkelig zu dem 2 m langen Arme wirkende Kraft von 80 kg das Gleichgewicht gehalten wird?

307,9 kg.

9. Mittels einer Schraubenpresse, bei der die Schraubenganghöhe 12 mm beträgt, will man einen Druck von 1000 kg ausüben. Welche Kraft muß an dem 0,2 m langen Hebelarme wirksam sein?

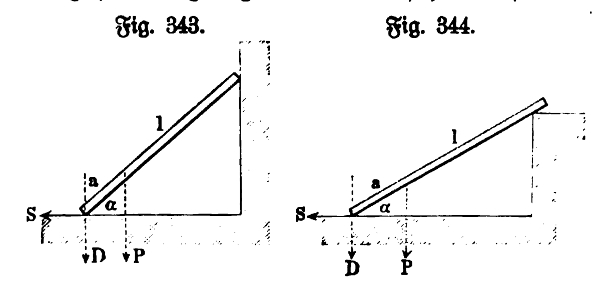
9,5 kg.

10. Am Arm derselben Presse läßt man eine Kraft von 20 kg wirken und fragt nach dem Druck, der in diesem Falle ausgeübt werden kann.

2094,4 kg.

11. Ein Stab von der Länge l (Fig. 343) sei um den Winkel α gegen den Fußboden geneigt, indem er sich mit seinem oberen Ende gegen eine vertikale Wand lehnt. In der Entfernung a von dem unteren Ende wirkt ein Gewicht P in einer zum Fußboden normalen Richtung, während der Stab selbst ohne Gewicht vorausgesetzt wird. Wie groß ist der normale Druck D und der Schub S am unteren Ende des Stabes, wenn die durch die Achse desselben gelegte Vertikalebene zur Wand normal ist?

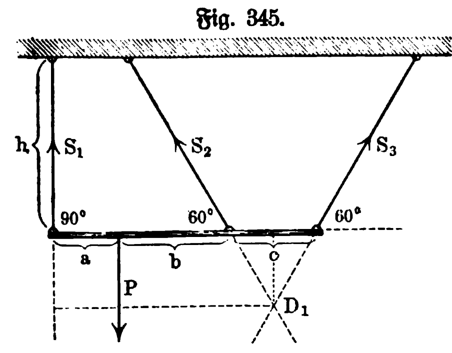
Fig. 343. Fig. 344.



$$D = P$$

$$S = P\,\frac{a}{l}\,\mathrm{cotg}\,\alpha.$$

Fig. 345.



12. Wie ändern sich die erhaltenen Resultate, wenn unter den obigen Voraussetzungen der Stab (Fig. 344) sich gegen eine Mauerkante legt, die der Durchschnittslinie zwischen Wand und Fußboden parallel läuft?

$$D = P\,\frac{l - a\cos\alpha^2}{l},$$

$$S = \tfrac{1}{2}P\,\frac{a}{l}\,\sin 2\alpha.$$

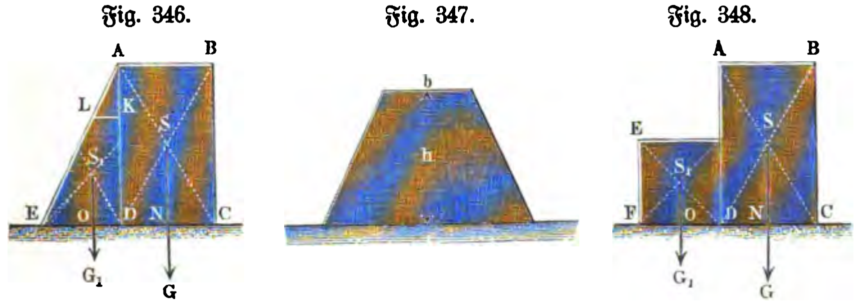
13. Es sind die Seilspannungen S_1, S_2, S_3 für Fig. 345 zu bestimmen, wobei die Schnittpunkte je zweier Seile, wie z. B. D_1, für Anwendung des Momentensatzes als Drehpunkte dienen können. Für D_1 gilt z. B.

$$S_1 (a + b + \tfrac{1}{2} c) = P(b + \tfrac{1}{2} c).$$

Sind die Strecken a, b, c und h völlig willkürlich?
Unter welchen Umständen wird die Aufgabe statisch unbestimmt?
Wie löst man die Aufgabe konstruktiv?

14 bis 16. Es ist das Stabilitätsmoment Mo für normale Prismen zu berechnen, die mit einer Seitenfläche auf einer Horizontalebene liegen und um eine der Seitenkanten gekippt werden sollen.

Fig. 346. Fig. 347. Fig. 348.



Die normalen Querschnitte sind nachstehend angegeben, die Länge der Körper sei l, das Gewicht eines Kubikdecimeters sei γ Kilogramm. Äußere Kräfte mögen nicht vorhanden sein.

Es sei (Fig. 346) $AB = b$, $BC = h$ und $ED = nh$, d. h. die Mauer erhalte bei 1 m Höhe eine Ausladung von n Metern. Man hat

a) für die durch E gehende Seitenkante

$$Mo = hl\gamma \frac{2n^2h^2 + 3b(b + 2nh)}{6},$$

b) für die durch C gehende Seitenkante

$$Mo = hl\gamma \frac{3b^2 + nh(3b + nh)}{6}.$$

Es sei (Fig. 347) die Mauer nach beiden Seiten auf gleiche Weise geböscht, so ist für dieselben Bezeichnungen

$$Mo = hl\gamma \frac{(b + nh)(b + 2nh)}{2}.$$

Es seien (Fig. 348) BC und EF bezw. h_1 und h_2, und AB und CF bezw. b_1 und b_2, so ist

a) für die durch F gehende Seitenkante

$$Mo = l\gamma \frac{(b_2 - b_1)^2 h_2 + b_1 h_1 (2b_2 - b_1)}{2},$$

b) für die durch C gehende Seitenkante

$$Mo = l\gamma \frac{b_1^2 h_1 + h_2 (b_2^2 - b_1^2)}{2}.$$

17 bis 19. Bestimmung der Stabilitätsarbeit für Nr. 14 bis 16.

20. Ein Kugelabschnitt von der Höhe h und zu einer Kugel vom Halbmesser r gehörig, liegt mit seiner Grundfläche auf einer Horizontalebene. Eine im Schwerpunkte desselben angreifende Kraft P wirke unter einem Winkel α gegen den Horizont auf Umwerfen. Es ist die Größe der Kraft P zu bestimmen, so daß der Körper sich auf der Grenze des Gleichgewichtes gegen Kippen befindet. Nehmen wir das Gewicht G des Körpers als eine im Schwerpunkte desselben lotrecht wirksame Kraft an, so erfolgt das Kippen um diejenige Tangente des Grundkreises, die auf der durch die Richtungen von P und G gelegten Ebene normal steht.

Bezeichnen wir die Dichtigkeit des Körpers mit γ, so ist

$$\left(\frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)\,\gamma - P \sin\alpha\right)\sqrt{h(2r - h)} - P\cos\alpha \cdot \frac{h(4r - h)}{4(3r - h)} = 0$$

und

$$P = \tfrac{4}{3}\pi h^2 \gamma \, \frac{(3r - h)^2 \sqrt{h(2r - h)}}{h(4r - h)\cos\alpha + 4(3r - h)\sin\alpha\sqrt{h(2r - h)}}.$$

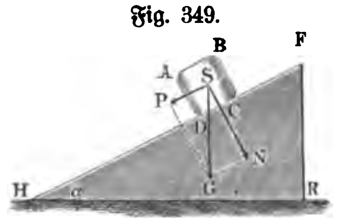
Zur numerischen Berechnung sei

$$r = 2\,\text{dm};\ h = 3\,\text{dm};\ \alpha = 15^0;\ \gamma = 0{,}7\,\text{kg}.$$

$$P = \tfrac{4}{3}\pi \,.\, 9 \,.\, 0{,}7\, \frac{9\sqrt{3}}{25\cos\alpha + 12\sin\alpha\sqrt{3}} = 20{,}7\,\text{kg}.$$

21. Auf einer zum Horizont geneigten Ebene (Fig. 349) liegt ein Körper vom Gewicht G. Das Abgleiten des Körpers sei unmöglich gemacht. Es ist der Winkel der geneigten Ebene zu bestimmen, so daß sich der Körper auf der Grenze des Gleichgewichtes gegen Kippen befinde.

Fig. 349.



Es gehe die Kippachse durch den Punkt D und es sei $DC = a$, $SC = b$, dann ist

$$Mo = G a \cos\alpha - G b \sin\alpha.$$

Für den Grenzfall ist $Mo = 0$, d. h. $\tang\alpha = \frac{a}{b}$.

Es sei der Winkel zu berechnen:

a) für eine Halbkugel vom Halbmesser r,

b) für einen normalen Kegel mit kreisförmiger Basis, wenn die Höhe h gleich dem doppelten Halbmesser des Grundkreises ist,

c) für ein dreiseitiges Prisma, dessen Seitenkanten parallel der Durchschnittslinie zwischen der geneigten Ebene und dem Horizonte sind, und dessen normaler Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist.

$$\alpha = 69^0\,26'\,38'',$$
$$\alpha = 63^0\,26'\,6'',$$
$$\alpha = 60^0.$$

22. Ein fester Körper R (Fig. 350) stützt sich mit einem Punkte A auf eine unverrückbare Ebene VW, die gegen den Horizont unter dem Winkel

α geneigt ist, während die Achse AB des Körpers mit dem Horizont den Winkel β bildet. Im Endpunkte B des Körpers ist eine Kraft P angebracht, die mit der Achse AB den Winkel γ einschließt, und in einem Punkte S der Achse wirkt senkrecht abwärts eine Kraft Q. Es sind die Gleichgewichtsbedingungen des Körpers unter der Voraussetzung zu entwickeln, daß die sämtlichen Kräfte sich in der durch VW und AB gelegten Vertikalebene befinden und die Reaktion in A normal zur geneigten Ebene N ist. Für $AB = a$, $AS = b$ gilt:

$$P = Q\,\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$$

$$N = \frac{Q}{a\sin\gamma}\sqrt{(b\cos\beta)^2 + (a\sin\gamma)^2 - 2ab\sin\beta\cos\gamma\sin(\beta-\gamma)}$$

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{b\cos\beta\cos\gamma + a\sin\beta\sin\gamma}{a\sin\gamma\cos\beta - b\cos\beta\sin\gamma}.$$

Wirkt P horizontal, so ist $\gamma = \beta$ und

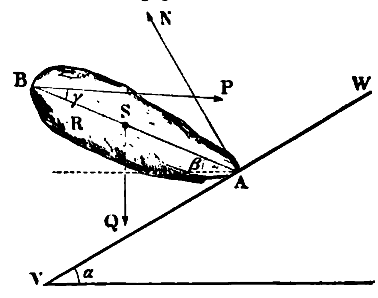


Fig. 350.

$$P = Q\,\frac{b}{a}\operatorname{cotg}\beta$$

$$N = \frac{Q}{a\sin\beta}\sqrt{(b\cos\beta)^2 + (a\sin\beta)^2}$$

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{b\cos\beta^2 + a\sin\beta^2}{(a-b)\sin\beta\cos\beta}.$$

23. Ein Mansardendach (vgl. S. 499) soll aus zwei gleich langen Sparren konstruiert werden. Zu dem Ende ist gegeben:

a) die Tiefe des Gebäudes und die Dachhöhe gleich der halben Tiefe

$$\alpha_1 = 30^0$$
$$\alpha_2 = 60^0;$$

b) die Tiefe des Gebäudes gleich $2a$ und die Höhe gleich h.

Die Koordinaten x und y des ersten Sparrenendes, wenn $2a$ und h als Koordinatenachsen genommen werden, sind

$$x = \frac{1}{2a}\left(2a^2 + h^2 - \sqrt{a^4 + h^2(a^2+h^2)}\right)$$

$$y = \frac{1}{2h}\left(a^2 + 2h^2 - \sqrt{a^4 + h^2(a^2+h^2)}\right).$$

24. Es sind die Reaktionen zu bestimmen für die in Fig. 351 (a. f. S.) gezeichnete Auflagerung eines Balkens.

25. Desgl. für die in Fig. 352 (a. f. S.) gezeichnete Auflagerung.

26. Desgl. für die in Fig. 172 gezeichnete Aufhängung, bei Berücksichtigung der Stütze.

27. Desgl. für die in Fig. 353a (a. f. S.) und in Fig. 353b (a. f. S.) gezeichnete Aufhängung bei Vernachlässigung des Stangengewichtes.

28. Desgl. für die in Fig. 354 dargestellte Konstruktion.

29. Desgl. für die in Fig. 355 dargestellte Konstruktion, in der AC und BC gleiche prismatische Balken vom Gewichte G darstellen, welche in A und B frei aufgelagert sind, wobei das Gewicht der Verbindungsstange $A'B'$ vernachlässigt werden kann.

$$S = H = \frac{1}{2n} G \cot\alpha \quad \text{und} \quad V = G.$$

30. Desgl. für die in Fig. 356 dargestellte Konstruktion, in der AC und $A'C$ prismatische Stangen bezw. von den Gewichten G und G' darstellen.

$$V = \tfrac{1}{2} \frac{G\,tg\,\alpha - G'\,tg\,\alpha'}{tg\,\alpha + tg\,\alpha'}$$

$$H = \tfrac{1}{2}(G + G') \frac{tg\,\alpha\; tg\,\alpha'}{tg\,\alpha + tg\,\alpha'}.$$

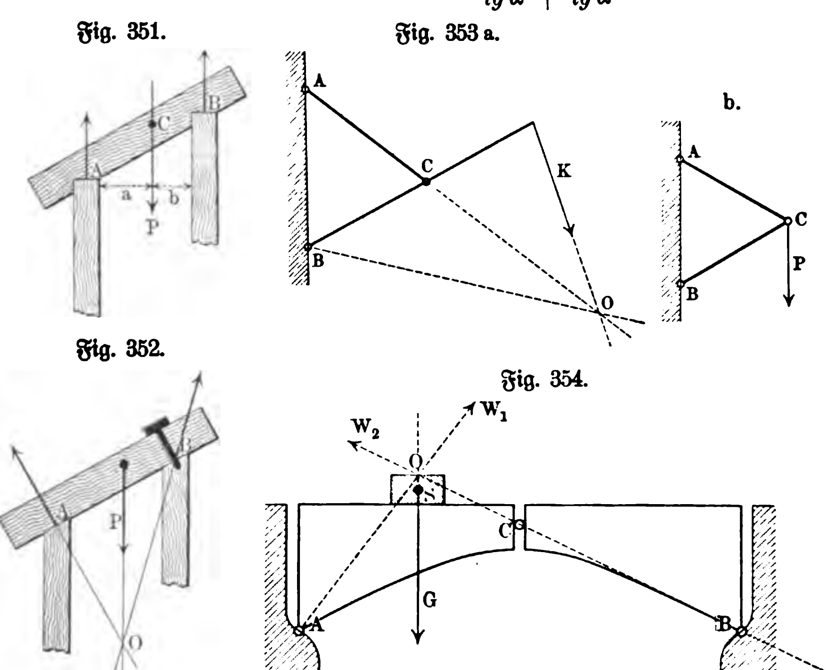


Fig. 351. Fig. 353 a. Fig. 352. Fig. 354.

31. Desgl. für die in Fig. 357 dargestellte Konstruktion, in der AB und $A'B$ prismatische Stangen bezw. von den Gewichten G und G' darstellen, während das Gewicht der Stange AA' vernachlässigt werden kann.

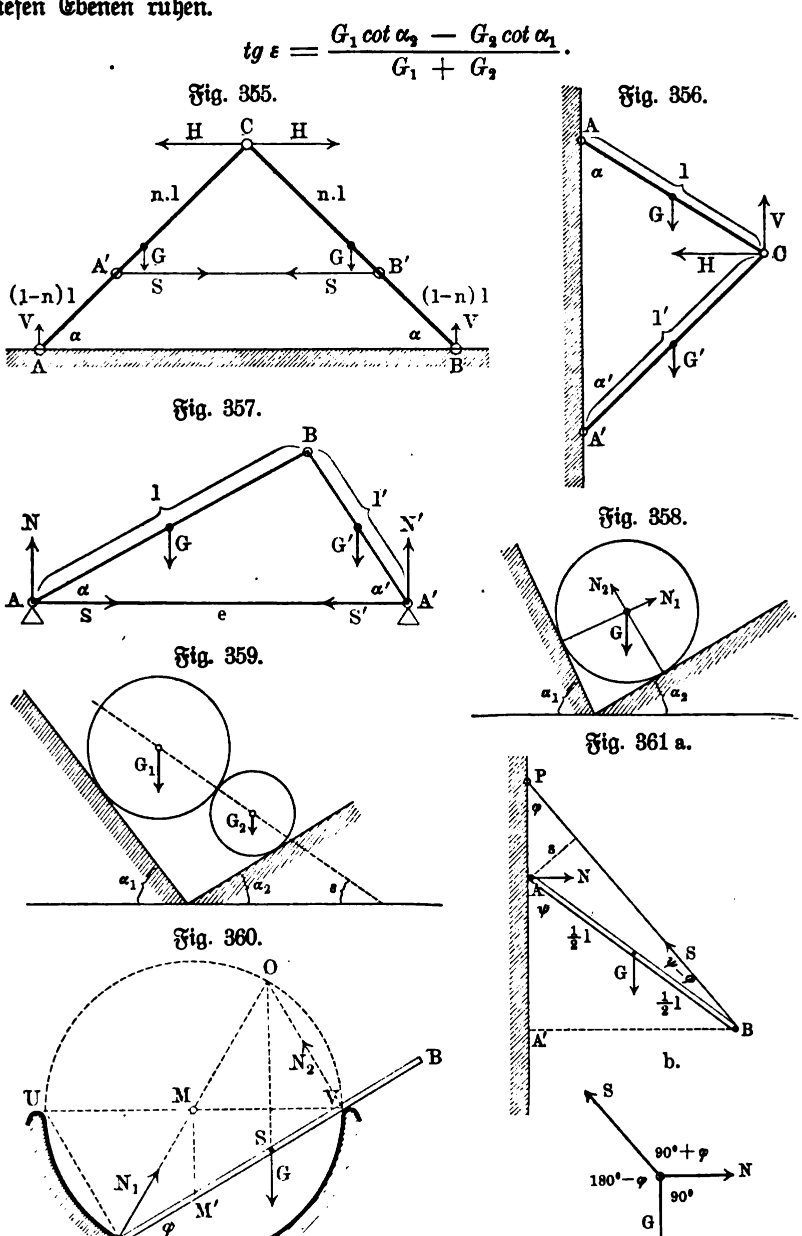
$$S = \tfrac{1}{2} \frac{G\,l\sin\alpha + G'\,l'\sin\alpha'}{e\,tg\,\alpha \,.\, tg\,\alpha'} = \tfrac{1}{2} \frac{G + G'}{tg\,\alpha + tg\,\alpha'} = S'.$$

32. Desgl. für eine Kugel, die, wie Fig. 358 zeigt, zwischen zwei schiefen Ebenen ruht.

$$\frac{G \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = N_2 \quad \text{und} \quad \frac{G \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = N_1.$$

33. Desgl. für zwei Kugeln, die, wie Fig. 359 zeigt, zwischen zwei schiefen Ebenen ruhen.

$$tg\, \varepsilon = \frac{G_1 \cot \alpha_2 - G_2 \cot \alpha_1}{G_1 + G_2}.$$



34. Desgl. für einen prismatischen Stab AB von der Länge l, der in einer halben Hohlkugel vom Radius r steht und sich gegen den (rund umgebogenen) Rand lehnt (vergl. Fig. 360 a. v. S.)?

$$\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi} = \frac{l}{4r}$$

$$N_1 = G\, tg\,\varphi \quad \text{und} \quad N_2 = \frac{G\cos 2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Da $\measuredangle\, OVA = 90^0$ ist, so liegt O auf dem Kreise um M, dessen senkrechte Projektion M' die Mitte von $AS = \frac{1}{2} l$ ist. Da $\measuredangle\, UMM' = 90^0$ und da $\measuredangle\, UAV = 90^0$ ist, so ist $UMM'A$ ein Sehnenviereck, d. h. man hat

$$VM' \,.\, VA = VM \,.\, VU = r \,.\, 2r = 2r^2.$$

Für $VM' = x$ gilt also $x\left(x + \frac{l}{4}\right) = 2r^2$.

Demgemäß ist die Lage von V auf AB leicht konstruktiv zu bestimmen.

35. Desgl. für einen prismatischen Stab AB von der Länge l, der sich mit dem Ende A gegen eine feste senkrechte Wand stützt, während das Ende B durch einen Faden mit einem Punkte P der Wand verbunden ist. Vergl. Fig. 361 (a. v. S.).

Wie Fig. 361 b zeigt, ist nach dem Satze der drei Kräfte

$$N = G \,.\, tg\,\varphi$$

$$S = \frac{G}{\cos\varphi}.$$

Für A als Drehpunkt ergiebt sich

$$S \,.\, l \,.\, \sin(\psi - \varphi) = G \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin\psi$$

oder

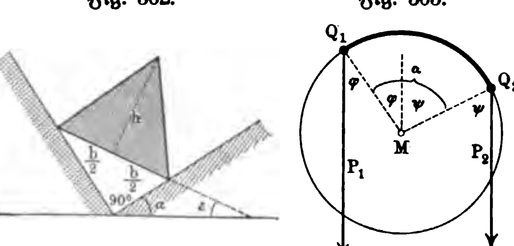
$$2\sin(\psi - \varphi) = \sin\psi\, \cos\varphi.$$

Für $BP = t$ ist $A'B = t\sin\varphi$, so daß außerdem ist

$$t\sin\varphi = l\sin\psi.$$

36. In einer Vertikalebene lehnt sich ein gleichschenkeliges Dreieck von der Basis b und der Höhe h auf zwei, unter 90^0 zusammentreffende Ebenen, wie es Fig. 362 zeigt.

Fig. 362. Fig. 363.



Für Gleichgewicht ist die Neigung der Basis ε zu bestimmen.

$$tang\,\varepsilon = \frac{b\cos 2\alpha}{b\sin 2\alpha + \frac{2}{3}h}.$$

37. Auf einem Cylinderstück MQ_1Q_2 vom Winkel α ruhen zwei, durch eine Schnur verbundene Gewichte P_1 und P_2, wie Fig. 363 zeigt.

Welches ist die Bedingung des Gleichgewichtes?

$$tg\frac{\psi - \varphi}{2} = \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}\,tg\frac{\alpha}{2}$$

$$\psi + \varphi = \alpha.$$

38. Bei einer Schraube ohne Ende, mit der die Last Q gehoben werden soll, sei die Kraft P am Kurbelarm R wirksam, h die Ganghöhe der Schraube, r' der Halbmesser des eingreifenden Rades und r der Halbmesser der mit ihm verbundenen Lastwelle.

Die Bedingung des Gleichgewichtes ist nach dem Principe der virtuellen Verrückungen festzustellen.

$$P \,.\, 2R\pi = Qh \cdot \frac{r}{r'}\cdot$$

Für $P = 20\,\mathrm{kg}$, $R = 39\,\mathrm{cm}$, $h = 1{,}3\,\mathrm{cm}$, $r' = 36{,}4\,\mathrm{cm}$, $r = 7{,}8\,\mathrm{cm}$ ist $Q \sim 17\,590\,\mathrm{kg}$.

Der Druck zwischen Rad und Schraube ist $Q \cdot \frac{r}{r'} \sim 3769\,\mathrm{kg}$.

39. Bei einer Differentialschraube, für welche h_1 und h_2 die Ganghöhen sind, ist durch das Princip der virtuellen Verrückungen die Bedingung des Gleichgewichtes festzustellen, falls die Kraft P am Arme R wirkt und Q die zu hebende Last bezw. den entsprechenden Widerstand bezeichnet.

$$P \,.\, 2R\pi = Q(h_1 - h_2).$$

Für $h_1 = 25\,\mathrm{mm}$, $h_2 = 21\,\mathrm{mm}$ und $R = 70\,\mathrm{cm}$ ergiebt sich

$$P : Q \sim 1 : 1100.$$

40. Bei einer Schraubenwinde bezw. Schraubenpresse wirkt die Kraft P am Arme R und überträgt die Bewegung zunächst auf ein konisches Zahnrad (r) mit horizontaler Achse; dieses steht im Eingriff mit einem konischen Zahnrade (r') mit vertikaler Achse, mit welchem die Mutter der beweglichen Schraube von der Ganghöhe h fest verbunden ist.

Durch das Princip der virtuellen Verrückungen ist die Bedingung des Gleichgewichtes festzustellen.

$$P \,.\, 2R\pi = Qh \cdot \frac{r}{r'}\cdot$$

Sind die Zähnezahlen für die Räder bezw. z und z', so ist auch $\frac{r}{r'} = \frac{z}{z'}\cdot$

Für $P = 30\,\mathrm{kg}$, $R = 39\,\mathrm{cm}$, $z : z' = 1 : 4$, $h = 2{,}6\,\mathrm{cm}$ ist

$$Q \sim 11\,310\,\mathrm{kg}.$$

Zweite Abteilung.

Die Reibungen.

84. Das Auftreten von Reibungen und die Arbeit der Reibungen. Es ist eine alte Erfahrung, daß in der Berührungsfläche gegeneinander gedrückter Körper Kräfte auftreten, wenn sich die Körper entweder gegeneinander bewegen oder wenn derartige Bewegungen den angreifenden Kräften entsprechen würden; in letzterem Falle sind es gerade die Kräfte in der Berührungsfläche, welche die erwarteten Bewegungen unterdrücken.

Diese tangentialen Reaktionen werden Reibungen genannt.

Man hat vor allem die Reibungen bei gleitenden Bewegungen von den Reibungen bei rollenden Bewegungen zu unterscheiden.

Ein Beispiel für erstere bieten die Kräfte in den Berührungsflächen zwischen den Kufen der Schlitten oder der Schleifen und deren Fahrbahnen, ein Beispiel für letztere die Kräfte in den Berührungsflächen zwischen den Rädern der gewöhnlichen Fuhrwerke oder der Eisenbahnwagen und deren Fahrbahnen; bremst man in letzterem Falle die Räder so stark, daß die rollende Bewegung aufhört, so gelangt man zum ersten Falle zurück.

In beiden Fällen fordert die Erhaltung der gleichförmigen Bewegung die Anwendung von Kräften, welche mit den Reibungen im Gleichgewichte stehen.

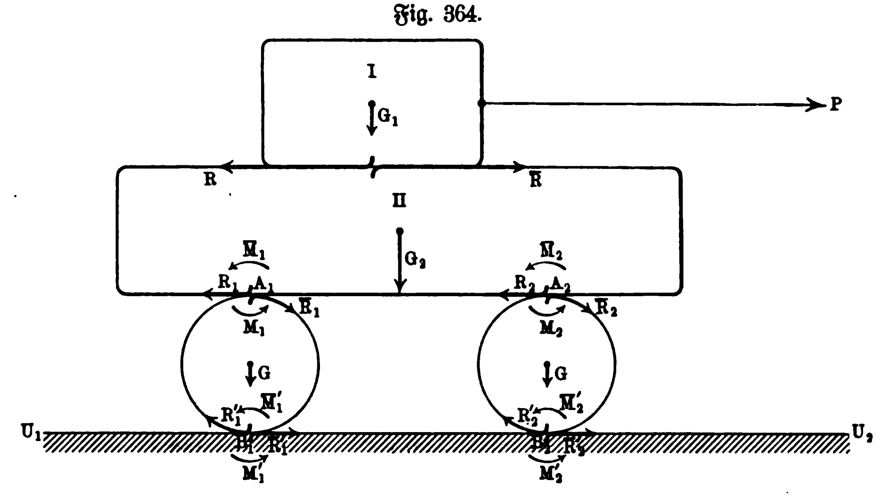
Die Reibungen treten stets als Gegenkräfte auf und zwar so, daß die eine dieser Gegenkräfte an dem einen, die andere an dem anderen der sich berührenden Körper haftet und dabei jedesmal der wirklichen angestrebten Bewegung des Körpers, an dem sie haftet, entgegenwirkt, soweit diese Bewegung relativ zur Berührungsfläche beider Körper erfolgt oder erfolgen sollte.

Man bezeichnete deshalb früher jede Reibung als einen Widerstand und pflegte auch wohl zu sagen, daß Reibungen nur bewegungshindernd, aber niemals bewegungsfördernd wären.

So richtig diese Aussage in Bezug auf die Bewegung des Körpers ist, an dem die eine der beiden zugleich auftretenden Reibungen haftet, so irreleitend ist sie doch im allgemeinen. Die Wellen, welche der Wind, wenn er horizontal über die Oberfläche eines Wasserspiegels streicht, hervorruft, werden durch die an der Wasserfläche haftende Reibung eingeleitet, während deren Gegenkraft allerdings verzögernd auf die unteren Teile des Luftstromes wirkt.

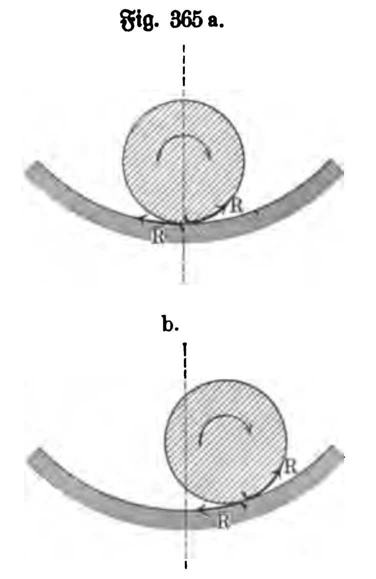
Liegt ein Körper I vom Gewichte G_1 auf einer beweglichen Unterlage II, wie es Fig. 364 andeutet[1]), so wirkt die Reibung [R] an I der Kraft [P] und der von ihr angestrebten Bewegung von I entgegen, während die Reibung [$\overline{R}$] von II im Sinne von [P] auf II bewegend wirkt, so daß er-

Fig. 364.



fahrungsmäßig eine Bewegung von II im Sinne von [$\overline{R}$] zu stande kommen kann. Kommt diese Bewegung zu stande, so können auch die unterstützenden Walzen durch Reibung in Bewegung kommen, sie können gleiten oder rollen oder auch beides thun. Beim Auftreten aller hier möglichen Reibungen wirken [R_1] und [R_2] bezw. in A_1 und A_2 verzögernd auf die Bewegung von II, während deren Gegenkräfte [$\overline{R}_1$] und [$\overline{R}_2$] die Bewegung der Walzen einleiten. Diese wird verzögert, soweit es sich um Gleiten handelt, durch die Reibungen [R_1'] und [R_2'], welche in Berührung mit der festen Unterlage $U_1 U_2$ bezw. in B_1 und B_2 auftreten, während auf die Unterlage selbst die Reibungen [$\overline{R}_1'$] und [$\overline{R}_2'$] wirken. Außerdem treten noch die Momente der sogenannten rollenden Reibung auf für A_1, A_2 und B_1, B_2 als Drehpunkte, sie sind in Fig. 364 durch [M_1], [$\overline{M}_1$] u. s. w. bezeichnet.

Fig. 365 a.



b.

Ein Zapfen, der sich in einem ausgelaufenen Lager (mit großem Spielraum) dreht,

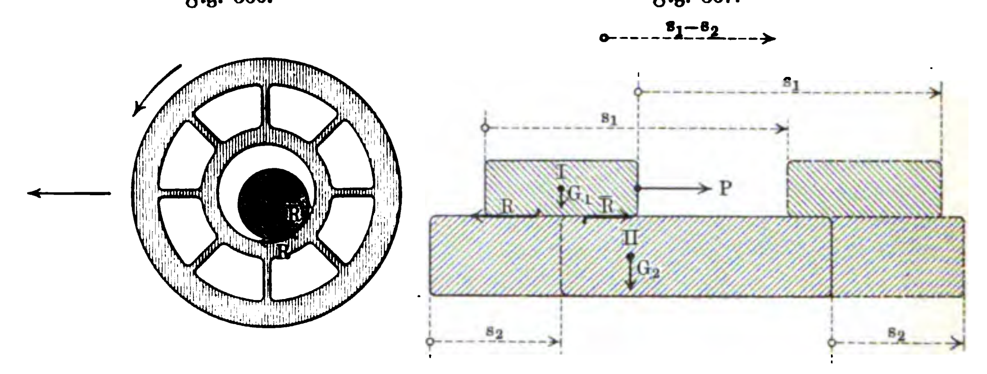
[1]) In den Figuren sind die Strecken, welche die Reibungen darstellen, an ihrem Ursprunge in den Körper hineingebogen gezeichnet, an welchem die entsprechende Reibung haftet.

klettert, seiner Bewegung entgegen, durch die an ihm haftende Reibung empor, er hat also nicht die Lage der Fig. 365a (a. v. S.), sondern die Lage der Fig. 365b (a. v. S.).

Die Relativbewegung des kletternden Zapfens kann man an ausgelaufenen Buchsen eines Wagens täglich beobachten, wie es Fig. 366 zeigt.

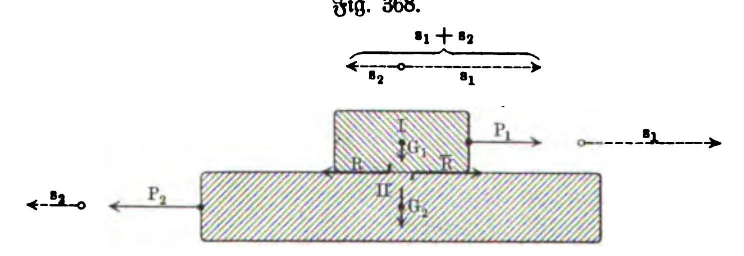
Bewegt sich ein Körper I, wie Fig. 367 andeutet, gleitend auf einem ruhenden Körper II unter Reibung, so ist die Arbeit der Reibung $[R]$ für eine Verschiebung s_1 anzusetzen als $-Rs_1$. Bewegt sich auch der Körper II,

Fig. 366. Fig. 367.



anstatt zu ruhen, bei diesem Vorgange durch die Reibung $[\overline{R}]$ um eine Strecke s_2, so ist die Arbeit von $[\overline{R}]$ anzusetzen als $+\overline{R}s_2$. Da $R=\overline{R}$, so hat die Gesamtarbeit von R und $\overline{R}$ den Wert $-R(s_1-s_2)$, ist also Null für $s_1=s_2$, d. h. für den Fall, daß die Körper durch Reibung aufeinander haften. Werden die Körper I und II (vergl. Fig. 368) durch Kräfte P_1 und P_2 gegen-

Fig. 368.



sinnig bewegt bezw. um s_1 und s_2 gegen die ursprüngliche Ruhelage, so ist die Gesamtarbeit der Reibungen R und $\overline{R}$ bezw. $-Rs_1-\overline{R}s_2=-R(s_1+s_2)$. In den betrachteten Fällen ist also die Reibungsarbeit stets das Produkt aus dem Werte der Reibung und der relativen Verschiebung der sich berührenden Körper.

Diese Betrachtung hat allgemeine Bedeutung, wenn man sie zunächst auf Flächenelemente einschränkt und von diesen aus zu endlichen Flächenstücken übergeht.

Demgemäß verschwindet die Gesamtarbeit der Reibung niemals bei relativen Verschiebungen der Körper an den Berührungs-

stellen, und damit ist unter anderem die Einschränkung für das Princip der virtuellen Verrückungen, welche eingeführt wurde (vergl. S. 484), gerechtfertigt.

85. Die Bestimmung der Reibung für gleitende Bewegungen. Nach den Morin-Coulombschen Versuchsreihen pflegte man für die Reibung bei gleitenden Bewegungen die Gesetze aufzustellen:

1. Die Reibung ist abhängig von den Stoffen der Körper, welche sich berühren, und von der Oberflächenbeschaffenheit dieser Stoffe.
2. Die Reibung ist proportional dem Normaldrucke zwischen den Körpern an der Berührungsstelle.
3. Die Reibung ist unabhängig von der Größe der Flächen, welche in Berührung stehen, falls weder Spitzen noch Kanten u. s. w. vorhanden sind.
4. Die Reibung ist unabhängig von den Geschwindigkeiten der Körper an der Berührungsstelle, falls man nur die Reibung bei Bewegungen aus der Ruhelage und die Reibung innerhalb der Bewegungen unterscheidet.

Auf Grund dieser Gesetze gelangt man für die Reibung R zu der Formel

$$R = f \,.\, N \quad \ldots \ldots \ldots \quad 139)$$

falls man unter N den Wert des Normaldrucks (Pressung) zwischen den Körpern an der Berührungsstelle versteht, und unter f eine Materialkonstante, abhängig von den beiden sich reibenden Stoffen und der Beschaffenheit ihrer Oberflächen.

Man nannte f den Reibungskoeffizienten und unterschied den Reibungskoeffizienten für Bewegungen aus der Ruhe von dem Reibungskoeffizienten innerhalb der Bewegungen.

Außerdem machte man darauf aufmerksam, daß gemäß Nr. 1 Erwärmungen der sich reibenden Körper und Formänderungen jeder Art den Wert von f verändern, und daß bei Anwendung von reichlichen Schmiermitteln (mittelbare Reibung) z. B. nicht mehr unmittelbar Kupfer auf Eisen, sondern am Eisen haftendes Öl auf am Kupfer haftenden Öle zur Reibung käme.

Die Steigerung der technisch verwendeten Drucke und Geschwindigkeiten hat zu der Einsicht geführt, daß obige Gesetze nur für mittlere Drucke (20 kg bis 40 kg auf den Quadratcentimeter) und für mittlere Geschwindigkeiten $\left(0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} \text{ bis } 5\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)$ angenähert in Geltung sind, während sich darüber hinaus, sowohl für größere [1]) als für kleinere [2]) Werte nur von Fall zu Fall durch besondere Versuche eine Grundlage für theoretische Ansätze gewinnen läßt.

Nur die unbestimmte Aussage von Nr. 1 der obigen Regeln bleibt bestehen und die allgemeine Abhängigkeit (nicht Proportionalität) vom Drucke.

Bei dem augenblicklichen Stande unserer Kenntnisse von dem Werte der Reibungen hält man im allgemeinen an der alten

[1]) Hier kommt vor allem Erwärmung und Formänderung in Frage.

[2]) Hier kommt auch die Adhäsion in Frage.

Formel $R = f \,.\, N$ fest, sieht aber f nicht mehr als eine Materialkonstante an, sondern behält sich vor, f von Fall zu Fall durch Versuche zu bestimmen.

Lediglich um das Problem zu kennzeichnen, mag die Bochetsche Formel für f angeführt werden, sie lautet

$$f = \frac{f_0 - f_\infty}{1 + \alpha \,.\, v} + f_\infty .$$

Dabei bedeutet f_0 den Reibungskoeffizienten für eine sehr langsame und f_∞ den Reibungskoeffizienten für eine sehr rasche Bewegung, v die Geschwindigkeit der Bewegung, für welche f benutzt werden soll, α einen Zahlenkoeffizienten, der im Meter-Sekundensystem im Mittel 0,3 ist; die Größen f_0 und f_∞ sind abhängig vom Materiale und dessen Oberflächenbeschaffenheit, vom Drucke u. s. w. und müssen von Fall zu Fall besonders bestimmt werden.

Unter den somit gemachten Einschränkungen legen wir den folgenden Betrachtungen die alte Formel $R = f \,.\, N$ zu Grunde, in der f eine Materialkonstante bezeichnet, und bemerken, daß diese für statische Konstruktionen im engeren Sinne, d. h. bei ruhenden Körpern, thatsächlich verwendet werden darf, bei gleichförmigen Bewegungen aber nur innerhalb gewisser Grenzen, falls man dabei stets den Wert von f für die Bewegung aus der Ruhe und den Wert von f innerhalb der Bewegung voneinander unterscheidet.

Man bezeichnet ersteren als f_0 und letzteren als f_1, falls es nötig ist.

Um eine Anschauung dieser Verhältnisse zu geben, führen wir einige Werte von f für mittlere Drucke und Geschwindigkeiten an:

Reibende Körper	Koeffizient bei Bewegung aus der Ruhe (f_0)	Koeffizient innerhalb d. Bewegung (f_1)
Gußeisen auf Gußeisen, wenig angefettet	0,16	0,15
Schmiedeeisen auf Bronze	0,19	0,18
Gußeisen auf Eichenholz, parallel der Faser, unter Wasserbefeuchtung	0,65	0,22
Schmiedeeisen auf Eichenholz, parallel der Faser, unter Wasserbefeuchtung	0,65	0,26
Desgl. mit Talgschmiere	0,11	0,08
Stein auf Stein	0,5 bis 0,7	—

Es entsprechen also z. B. einem Normaldrucke von 100 kg im ersteren Falle 16 kg Reibung bei der Bewegung aus der Ruhe und 15 kg Reibung innerhalb der Bewegung u. s. w.

Bei Anwendung von reichlichem Schmiermaterial kann unter günstigen Umständen innerhalb der Bewegung $f = 0{,}10$ und geringer angesetzt werden.

86. Der Reibungswinkel und der Reibungskegel. Liegt ein Körper vom Gewichte G auf einer horizontalen Unterlage, so hat die (normale) Reaktion der Unterlage $[N]$ den Wert G. Einer Bewegung im Sinne des Pfeiles B der Fig. 369 entspricht die (tangentiale) Reibung $[R]$ vom Werte $f \cdot N = f \cdot G$, welche sich mit $[N]$ zu einer Gesamtreaktion $[W]$ zusammensetzt. Die Einwirkung auf die Unterlage ist die Resultante $[\overline{W}]$ aus $[G]$ und $[\overline{R}]$, wobei natürlich $W = \overline{W}$ ist. Den Winkel φ, um welchen $[W]$ von $[N]$ bezw. $[\overline{W}]$ von $[G]$ abweicht, nennt man Reibungswinkel, es ist

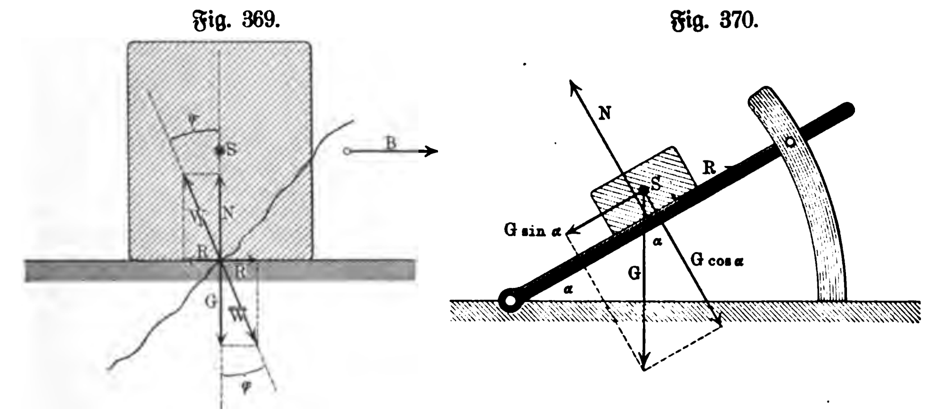
$$tang\, \varphi = f, \qquad 140)$$

denn man hat $tang\, \varphi = \frac{R}{N} = \frac{fN}{N} = f$.

Da der Reibungswinkel φ lediglich durch f bestimmt wird, so ist er, solange f als Konstante vorausgesetzt werden darf, von dem Werte von N durchaus unabhängig.

Man kann sich φ für zwei bestimmte Materialien veranschaulichen, wenn man einen Körper aus dem einen Stoff auf einer verstellbaren schiefen Ebene

Fig. 369. Fig. 370.



aus dem anderen Stoff (vergl. Fig. 370) gleiten läßt. Läßt man α von 0^0 an wachsen, so tritt das Gleiten ein, wenn $R = G \sin \alpha$ ist, woraus für $R = f \cdot N = f \cdot G \cdot \cos \alpha$ folgt

$$G \sin \alpha = f \cdot G \cos \alpha, \text{ d. h. } tg\, \alpha = f.$$

Der Reibungswinkel φ ist also der Wert von α, bei dem das Gleiten gerade eintritt. Mißt man α unter dieser Bedingung, so ist $f = tg\, \alpha$, d. h. man hat f für die beiden Materialien bestimmt und zwar für die Bewegung aus der Ruhe, d. h. als f_0.

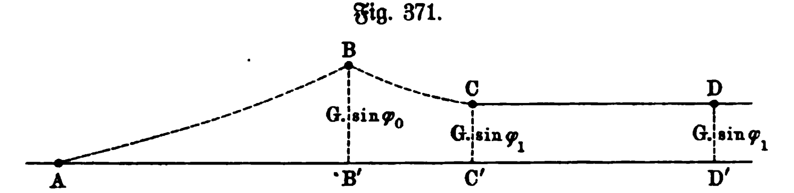
Zu den Figuren 369 und 370 mag noch bemerkt werden, daß die Lage des Normaldruckes $[N]$ in Bezug auf die Vertikale des Schwerpunktes abhängt von der Höhenlage der bewegenden Kraft, welche die $[R]$ entsprechende Bewegung einleitet oder einzuleiten strebt. Fig. 369 ist genau richtig für den Fall, daß die bewegende Kraft, welche dem Bewegungspfeile B entspricht, in der Gleitfläche selbst angreift. Liegt sie höher, so verschiebt sich der

Normaldruck in Fig. 369 nach rechts, so daß er mit $[G]$ ein Kräftepaar (—) bildet, welches im Gleichgewichte steht mit dem Kräftepaare, das die bewegende Kraft und die Reibung bilden. Da in Fig. 370 die bewegende Kraft nicht in der Gleitfläche liegen kann, so ist die Verschiebung von $[N]$ dort auch zeichnerisch dargestellt. Diese Beziehungen werden bei der Frage des Kippens unter dem Einflusse der Reibung noch genauer besprochen werden.

Behielte f innerhalb der Bewegung den Wert $f_0 = tg\,\varphi_0$, den es für den Übergang aus der Ruhe erhalten hat, so würde die Stellung $\alpha = \varphi_0$ nun weiter einer gleichförmigen Bewegung entsprechen. Da aber f innerhalb der Bewegung im allgemeinen kleiner wird gegenüber der Bewegung aus der Ruhe, so tritt im allgemeinen eine gleichmäßig-beschleunigte Bewegung ein.

Will man eine gleichförmige Bewegung erzielen, so hat man die schiefe Ebene, nachdem Bewegung eingetreten ist, langsam zu senken bis zu einem

Fig. 371.



bestimmten Winkel φ_1, dem eine gleichförmige Bewegung entspricht; es ist dann $\varphi_1 < \varphi_0$ und $f_1 = tg\,\varphi_1$ bezeichnet den Reibungskoeffizienten innerhalb der Bewegung.

Für eine wirkliche Bestimmung von φ_1 bezw. f_1 eignet sich natürlich dieses Verfahren nicht. Man betrachtet zu diesem Zwecke die Beschleunigung b für eine beschleunigte Bewegung auf der schiefen Ebene. Ist ψ bei dem Versuche der Neigungswinkel der schiefen Ebene, so ist $G\,sin\,\psi - R$ die treibende Kraft und $\frac{G}{g}$ die getriebene Masse, so daß man hat

$$b = g\,\frac{G\,sin\,\psi - R}{G} = g\,\frac{G\,(sin\,\psi - f_1\,cos\,\psi)}{G}.$$

Daraus folgt:

$$f_1 = tg\,\psi - \frac{b}{g}\cdot\frac{1}{cos\,\psi}.$$

Für $b = 0$ erhält man $f_1 = tg\,\psi$, d. h. ψ ist dann der vorher mit φ_1 bezeichnete Winkel.

Während man bei der schiefen Ebene α von 0^0 auf φ_0 anwachsen läßt, entwickelt sich die Reibung vom Werte 0 bis zum Werte $G\,sin\,\varphi_0$, um dann innerhalb der Bewegung, dem Übergange von f_0 zu f_1 entsprechend, auf $G\,sin\,\varphi_1$ zu sinken.

Dabei nimmt der Normaldruck zunächst ab von G bis $G\,cos\,\varphi_0$, um dann, bei einer Senkung der Ebene, wieder auf $G\,cos\,\varphi_1$ zu steigen, so daß f nach der Formel $R = fN$ von 0 über $tg\,\varphi_0$ nach $tg\,\varphi_1$ geht.

Fig. 371 stellt diese Entwickelung der Reibung graphisch dar. Die Strecke AB' entspricht dem Wachsen des Winkels α von 0^0 bis φ_0, die Strecke

$B'C'$ der Abnahme des Winkels α von φ_0 bis φ_1, die Strecke $C'D'$ der Stellung φ_1; über die Kurven AB und BC ist nichts Bestimmtes auszusagen.

Denkt man sich in Fig. 369 nach allen möglichen Richtungen Bewegungen des Körpers auf der Unterlage ausgeführt, so beschreibt $[W]$ einen geraden Kreiskegel von der Öffnung φ, und ebenso $[\overline{W}]$. Man nennt diesen Kegel den **Reibungskegel** ($tg\,\varphi = f$).

Um aus dem Normalwiderstande $[N]$ durch Einführung der Reibung den Gesamtwiderstand $[W]$ herzuleiten, hat man $[N]$ zur Achse eines geraden Kreiskegels von der Öffnung φ zu nehmen und auf diesem Kegel die Seite aufzusuchen, welche mit N in der Bewegungsrichtung liegt und mit ihr einen stumpfen Winkel bildet.

Für jede Überführung eines Körpers aus der Ruhe in die Bewegung hat man eine Entwickelung der Reibung, entsprechend Fig. 371, anzunehmen. Für die Ruhe ist $[W] = [N]$, während des Überganges in die Bewegung dreht sich $[W]$ unter Vergrößerung seines Wertes aus der Achsenlage in eine Seite des Reibungskegels hinein, während der Fortsetzung der Bewegung bleibt $[W]$ in der Seite des Reibungskegels liegen, der aber zunächst von der Öffnung φ_0 auf die Öffnung φ_1 zurückgeht, um diese dann beizubehalten.

Diese Betrachtungen sind ganz unabhängig von dem gewählten Beispiele: **Der Normaldruck $[N]$ bildet stets die Achse für den Reibungskegel, innerhalb dessen alle Gesamtwiderstände liegen, welche $[N]$ im Verein mit der mehr oder minder entwickelten Reibung bilden kann.**

Um eine Anschauung der Größe von φ zu geben, diene folgende Tabelle:

Stein auf Stein:	$f = 0{,}6$	$\varphi = 31^0$
Stahl auf Eis:	$f = 0{,}027$	$\varphi = 1^0\,33'$
Holz auf Holz:	$f = 0{,}10$ bis $0{,}70$	$\varphi = 5^0\,45'$ bis $35^0\,0'$.

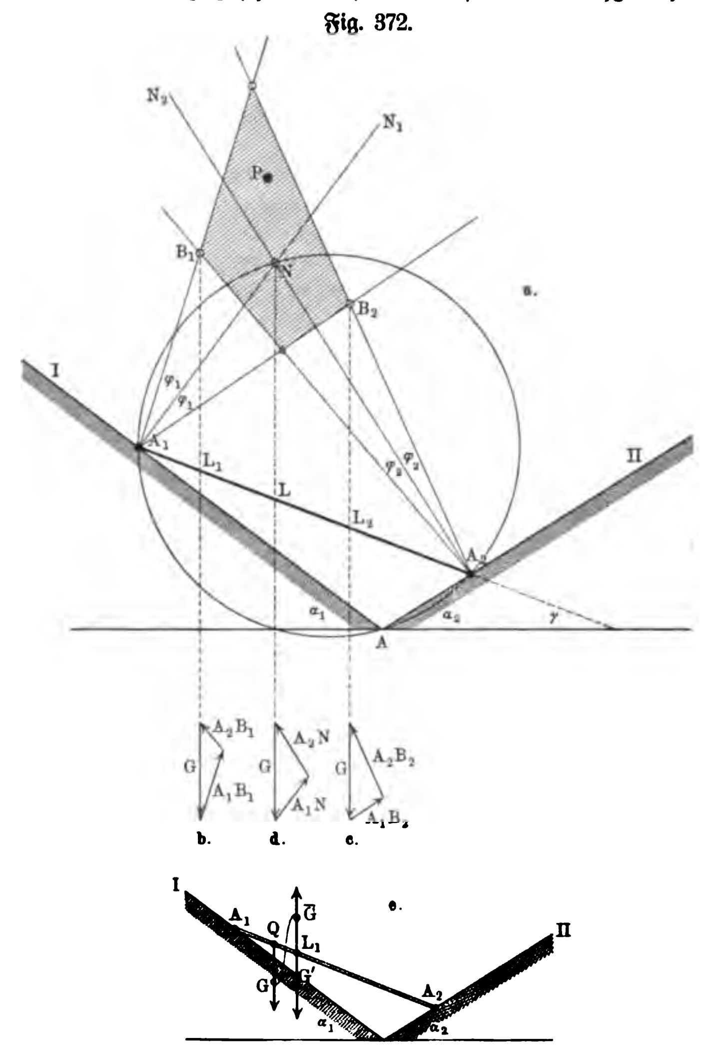
Wir wollen diese Beziehungen sogleich an einem Beispiele erläutern, das von besonderer Wichtigkeit für technische Anwendungen ist. Ein Körper stütze sich auf die beiden Ebenen I und II so, daß A_1 und A_2 als Stützpunkte angesehen werden dürfen. Konstruiert man in A_1 und A_2 bezw. die Normalen A_1N_1 und A_2N_2 zu den Ebenen, legt um diese die, der Reibung zwischen dem Körper und I und der Reibung zwischen dem Körper und II entsprechenden Reibungskegel mit den Öffnungen φ_1 und φ_2, so ist jeder Punkt P des Raumes, der innerhalb **beider** Kegelöffnungen liegt, ein Punkt, in welchem sich Gesamtwiderstände A_1P und A_2P bezw. von A_1 und A_2 schneiden können. Hat also das Kräftesystem, welches den in A_1 und A_2 gestützten Körper angreift, eine Resultante, welche den gemeinsamen Raum beider Kegelöffnungen durchdringt, so ist für den Körper stets Gleichgewicht vorhanden.

Liegen A_1 und A_2 in einer Vertikalebene, welche auf der Schnittgeraden (A) von I und II senkrecht steht, wie es Fig. 372 (a. f. S.) zeigt, und ist der Körper lediglich durch Belastungen, einschließlich seines Eigengewichtes, in Anspruch genommen, welche sich auf der Geraden A_1A_2 konzentrieren, so kommt von dem gemeinsamen Raume der beiden Reibungskegel lediglich das schraffierte Viereck in Frage. Durch dieses muß die Resultante der Belastungen des

Körpers gehen, falls für ihn Gleichgewicht vorhanden sein soll, d. h. L_1 und L_2 sind die Grenzpunkte für die Lage dieser Resultante.

Solange also die Resultante der Belastungen des in A_1 und A_2 gestützten Körpers die Strecke L_1L_2 schneidet, ist der Körper im Gleichgewichte.

Fig. 372.



Geht die Resultante durch L_1, so haben die Widerstände von A_1 und A_2 bezw. die Richtungen A_1B_1 und A_2B_1; ihren Wert giebt das darunter gezeichnete Kraftdreieck an (Fig. 372 b).

Geht die Resultante durch L_2, so haben die Widerstände von A_1 und A_2 bezw. die Richtungen A_1B_2 und A_2B_2; ihren Wert giebt das darunter gezeichnete Kraftdreieck an (Fig. 372 c).

In beiden Fällen ist die Reibung von A_1 und A_2 voll entwickelt, im

ersten Falle für eine Bewegung des Stabes im Sinne I ... II, im zweiten Falle für eine Bewegung des Stabes im Sinne II ... I. In Fig. 372 d ist die Konstruktion auch noch für L durchgeführt.

Überschreitet die Resultante die Grenzlage L_1 oder L_2, so tritt Bewegung des Körpers ein, im Sinne I ... II bezw. II ... I. Fig. 372 e erläutert dies für L_1; G greift in Q an, während in L_1 die Kräfte $[\overline{G}]$ und $[G']$ zugesetzt sind, von dem G' durch die Reaktionen aufgehoben wird, so daß noch das Kräftepaar aus $[G]$ und $[\overline{G}]$ übrig bleibt, um den Körper im Sinne I ... II zu bewegen.

Geht die Resultante zwischen L_1 und L_2 hindurch, so sind für die Gleichgewichtslage des Körpers unendlich-viele Möglichkeiten der Entwickelung der Reibungen in A_1 und A_2 gegeben, da jeder Punkt P der schraffierten Fläche, welcher auf jener Resultanten liegt, die Richtungen A_1P und A_2P für Reaktionen von A_1 und A_2 bestimmt, die mit $[G]$ zu einem bestimmten Kraftdreieck führen. Besonderes Interesse bietet der Punkt N der schraffierten Fläche, der einem Durchgang der Resultante $[G]$ in L entspricht, weil für ihn keine Entwickelung der Reibungen in A_1 und A_2 in Frage kommt. Während für das Gleichgewicht der Belastung in L jeder Punkt der Vertikalen LN innerhalb der schraffierten Fläche benutzt werden kann, wobei unendlich-viele verschiedene Entwickelungen der Reibungen in A_1 und A_2 in Frage kommen, entspricht umgekehrt dem Punkte N, für welchen keine Reibungen in A_1 und A_2 vorgesehen sind, nur der eine Belastungspunkt L. Die Aufgabe, die Belastungsvertikale für den Körper A_1A_2 zu bestimmen, falls die Reibungen in A_1 und A_2 nicht in Frage kommen, ist also eindeutig (N), die Aufgabe, sie unter Verwendung der Reibungen in A_1 und A_2 zu bestimmen, ist unendlich-vieldeutig; unter den unendlich-vielen Lösungen sind die beiden (L_1 und L_2) von besonderem Interesse, welche einer vollen Entwickelung der Reibungen in A_1 und A_2 entsprechen.

Bemerkt mag noch werden, daß der Kreis durch AA_1NA_2 die Punkte B_1 und B_2 aufnimmt, falls $\varphi_1 = \varphi_2$ ist.

Bestimmt man A_1L_2 und A_2L_2 aus $\triangle\ A_1L_2B_2$ und $\triangle\ A_2L_2B_2$, so erhält man bei Einführung des Neigungswinkels γ für $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$

$$\frac{A_1L_2}{A_2L_2} = n = \frac{\cot(\alpha_2 - \varphi) - tg\,\gamma}{\cot(\alpha_1 + \varphi) + tg\,\gamma}.$$

Bestimmt man A_1L_1 und L_1A_2 aus $\triangle\ A_1L_1B_1$ und $\triangle\ A_2L_1B_1$, so erhält man ebenso

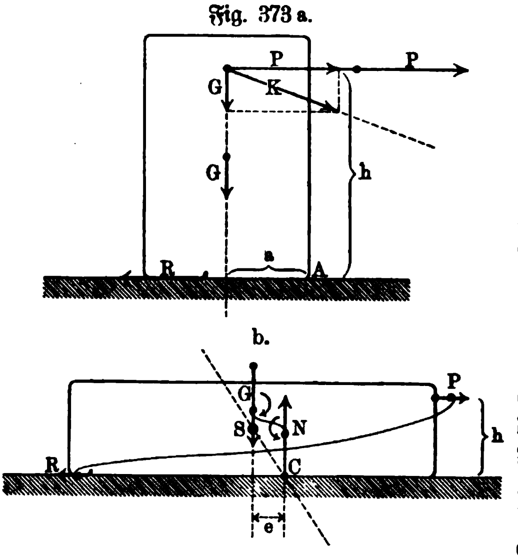
$$\frac{A_1L_1}{A_2L_1} = n' = \frac{\cot(\alpha_2 + \varphi) - tg\,\gamma}{\cot(\alpha_1 - \varphi) + tg\,\gamma}.$$

Aus beiden Gleichungen, welche die Zusammenhänge von n und n' mit γ darstellen, folgt für $\varphi = 0$ das Verhältnis $A_1L : A_2L$. Vergl. S. 508.

87. Genauere Darstellung der Erscheinungen durch Einführung der gleitenden Reibung. Sobald gegeneinander gepreßte Berührungsflächen von Körpern vorhanden sind, in denen eine relative gleitende Bewegung der Körper

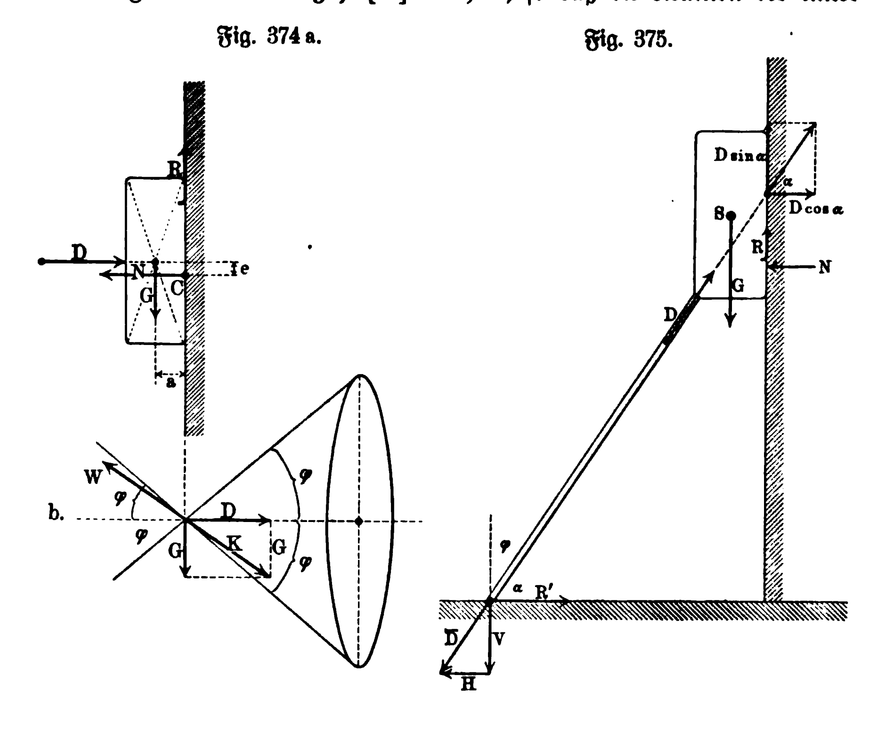
möglich ist, müssen die entsprechenden Reibungen für eine genauere Darstellung der Erscheinungen eingeführt werden. Demgemäß sind viele der bisher gegebenen Entwickelungen von Fall zu Fall zu verbessern. Dabei hat man sich zunächst davon zu überzeugen, daß auch wirklich ein Gleiten eintritt. Wollte man z. B. bei dem in Fig. 373 dargestellten Körper ohne weiteres die Reibung $[R]$ einführen, so würde man einen Fehler begehen. Für A als Kippachse wirkt P am Arme h dem Stabilitätsmomente Ga entgegen, so daß für $Ph \geqq Ga$ ein Kippen um A eintritt. Bildet man aus $[G]$ und P die Resultante $[K]$, so schneidet diese im Falle $Ph > Ga$ die Unterstützungsfläche nicht, kann also auch nicht durch eine Resultante aus $[R]$ und der Reaktion der Unterlage vom Werte G aufgehoben werden. Für $Ph = Ga$ geht $[K]$ durch A, so daß die Reaktion der Unter-

Fig. 373 a.



b.

Fig. 374 a. Fig. 375.



b.

stützungsfläche noch gerade in A angreifen kann, es ist dies der früher betrachtete Fall des unsicheren Gleichgewichtes.

Für $Ph < Ga$ tritt eine gleitende Bewegung ein, wenn $[P]$ die Reibung $[R]$ überwindet. Diese Bewegung (vergl. Fig. 373 b) ist gleichförmig für $P = R = fG$. Da aber hier das Kräftepaar Ph nach wie vor auf Kippen wirkt, so muß die Reaktion der Unterlage $[N]$ vom Werte G dabei ihr dynamisches Centrum in C haben und zwar so, daß $Ge = Ph$ ist. Die Resultanten von $[G]$ und $[P]$ und von $[N]$ und $[R]$ sind nun wieder Gegenkräfte.

Fig. 376.

Fig. 373 b ist entworfen für $P = R = \frac{2}{5} G$, so daß $e = \frac{2}{5} h$ ist.

Entsprechende Überlegungen gelten für den in Fig. 374 dargestellten Fall, wo für $G = R = fD$ das Kräftepaar aG gegen die Uhr dreht, so daß sich die Reaktion $[N]$ der Wand vom Werte D in C konzentriert, falls dabei $De = Ga$ ist.

Soll der Körper gegen die Wand in Ruhe sein, so muß $R > G$, d. h. $fD > G$ oder $f > \frac{G}{D}$ oder $tg\,\varphi > \frac{G}{D}$ sein; die Resultante $[K]$ von $[D]$ und $[G]$ muß in den Reibungskegel der Wand fallen (vergl. Fig. 374 b), wobei $W = \overline{K}$ ist.

In Fig. 375 entwickelt der Druck der Stütze $[D]$ senkrecht zur Wand eine Komponente vom Werte $D\cos\alpha$, so daß $R = fD\cos\alpha$ ist. Die Bedingung des Gleichgewichtes ist

$$R + D\sin\alpha = G \quad \text{oder} \quad fD\cos\alpha + D\sin\alpha = G.$$

Für $f = tg\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ geht diese Bedingung über in

$$D = \frac{G\cos\varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Da der Nenner von D höchstens den Wert 1 annehmen kann, so erhält D seinen kleinsten Wert $G\cos\varphi$ für $\sin(\alpha + \varphi) = 1$, d. h. für $\alpha + \varphi = 90^0$. Der damit gegebene Wert von α bestimmt die günstigste Stützenstellung, weil für ihn die Inanspruchnahme der Stütze am geringsten ist.

Wir untersuchen noch, Fig. 376 entsprechend, die Wirkung einer Kraft K für die Stellungen von $\alpha = 0^0 \ldots 180^0$. Der Normaldruck ist für die Unterlage $G - K\cos\alpha$, also $R = f(G - K\cos\alpha)$.

Man hat Gleichgewicht für $K\sin\alpha = R = f(G - K\cos\alpha)$, d. h. für

$$K = G\frac{f}{\sin\alpha + f\cos\alpha}.$$

Führt man wieder $f = tg\,\varphi = \frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi}$ ein, so erhält man

$$K = G\frac{sin\,\varphi}{sin\,(\alpha + \varphi)}.$$

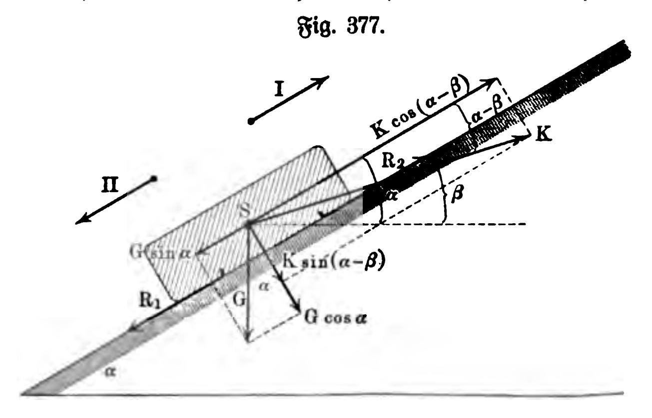
Für $\alpha = 0$ ist $K = G$, entsprechend dem senkrechten Emporheben der Last. K erhält seinen kleinsten Wert für $\alpha + \varphi = 90^0$, womit die günstigste Stellung (vergl. Fig. 377) für die Stellung eines Seiles (K) bei Fortziehen einer Last (G) bestimmt ist.

K erhält seinen größten Wert und zwar ∞ für $\alpha + \varphi = 180^0$, so daß $\alpha = 0^0$ und $\alpha = 180^0 - \varphi$ die Grenze bezeichnen, innerhalb deren eine Überwindung der Reibung durch [K], also eine Fortbewegung der Last (G) möglich ist. Für $\alpha = 180^0 - \varphi$ fällt [K] auf den Mantel des Reibungskegels der Grundfläche.

Für $\alpha > 180^0 - \varphi$ wird K negativ, was auf eine Umkehrung der Kraftrichtung in Bezug auf den gedachten Zweck hindeutet, — K liegt dann in dem Reibungskegel.

Entwickelt man eine Tabelle von K für $\alpha = 0^0 \ldots 180^0 - \varphi$, so findet man für $\alpha = 90^0 - 2\,\varphi$ und für $\alpha = 90^0$ denselben Wert $K = G\,tg\,\varphi$.

Fig. 377.



Wir betrachten noch die Beziehungen auf der schiefen Ebene, unter Berücksichtigung der Reibung, wie sie Fig. 377 darstellt.

Die Kraft K liefert, parallel und senkrecht zur schiefen Ebene, die Komponenten $K cos(\alpha - \beta)$ und $K sin(\alpha - \beta)$, so daß der Normaldruck N auf die Ebene durch $N = G\,cos\,\alpha + K\,sin\,(\alpha - \beta)$ gegeben ist.

I. Soll der Körper emporgezogen werden, so wirkt die Reibung $f \,.\, N$ als R_1, so daß die Zugkraft

$$K\,cos\,(\alpha - \beta) - G\,sin\,\alpha$$

die Reibung R_1 zu überwinden hat.

Die Gleichung

$$K\,cos\,(\alpha - \beta) - G\,sin\,\alpha = f[G\,cos\,\alpha + K\,sin\,(\alpha - \beta)]$$

liefert

$$K[cos\,(\alpha - \beta) - f\,sin\,(\alpha - \beta)] = G\,(sin\,\alpha + f\,cos\,\alpha).$$

Für $f = tg\,\varphi = \frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi}$ erhält man

$$K = G \cdot \frac{sin\,(\alpha + \varphi)}{cos\,(\alpha - \beta + \varphi)}.$$

II. Soll der Körper unter der Gegenwirkung von K abgelassen werden, so wirkt die Reibung $f \,.\, N$ als R_2, so daß

$$K \cos(\alpha - \beta) + R_2 = G \sin \alpha$$

ist. Man hat hier

$$K = \frac{G \,.\, \sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \beta - \varphi)}.$$

Die Formeln I und II unterscheiden sich, dem umgekehrten Sinne der Reibung entsprechend, durch die Vorzeichen von φ, so daß man sie in die Formel

$$K = \frac{G \,.\, \sin(\alpha \pm \varphi)}{\cos(\alpha - \beta \pm \varphi)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 141)$$

zusammenziehen kann.

Praktisch wichtig sind die Sonderfälle $\alpha = \beta$ und $\beta = 0$, in denen $[K]$ bezw. der schiefen Ebene parallel oder horizontal wirkt.

Für $\alpha = \beta$ gilt

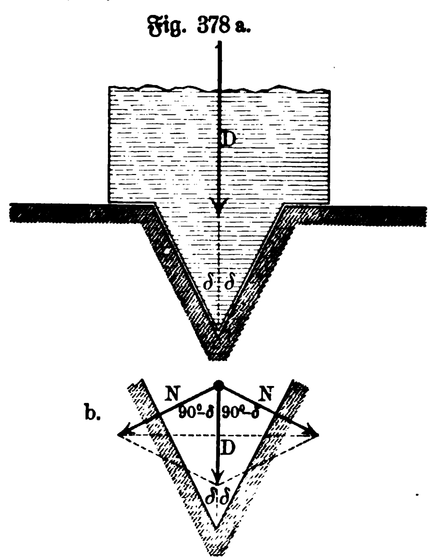
$$K = \frac{G \,.\, \sin(\alpha \pm \varphi)}{\cos \varphi} \quad 142)$$

Für $\beta = 0$ gilt

$$K = G \,.\, tg(\alpha \pm \varphi) \quad 143)$$

Für $\alpha - \beta \pm \varphi = 90^0$ wird $K = \infty$, d. h. beim Hinaufziehen darf $\alpha - \beta$ den Wert $90^0 - \varphi$ nicht erreichen, d. h. $[K]$ muß mit der Normalen der schiefen Ebene einen Winkel einschließen, der größer ist als φ. Für $\beta = 0$ ist diese Bedingung $\alpha < 90^0 - \varphi$, d. h. bei einer Horizontalkraft muß die schiefe Ebene gegen die Vertikale mehr als um den Reibungswinkel abweichen, wenn ein Hinaufziehen möglich sein soll.

Fig. 378 a.



Für $\varphi = 0$ hat man $K = \frac{G \,.\, \sin \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}$ als Bedingung des Gleichgewichtes, die beiden Formeln ($\pm$) der Nr. 141 geben die Grenze für das Gleichgewicht an, unter Berücksichtigung der beiden möglichen Bewegungen.

Läßt man einen Körper zunächst auf einer Horizontalebene vermittelst einer Keilnute (vergl. Fig. 378) laufen, so liefert D für beide Seiten den Normaldruck $N = \frac{D}{2 \sin \delta}$, so daß die Reibung für jede Seite $fN = \frac{fD}{2 \sin \delta}$, im ganzen also $D \cdot \frac{f}{\sin \delta}$ ist.

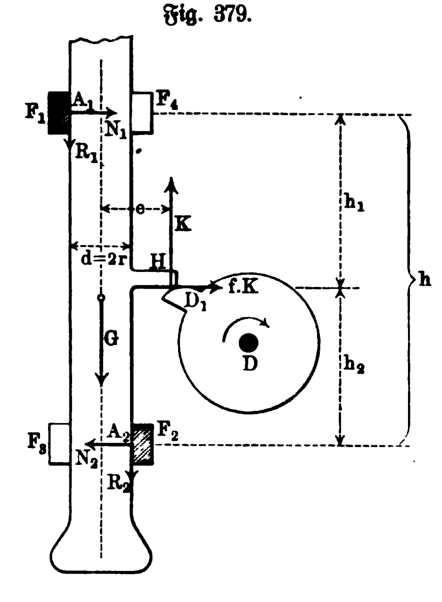
Bei der Bewegung in der Keilnute ist also f zu ersetzen durch den größeren Wert $\frac{f}{\sin \delta} = \overline{f}$, dem $tg\, \overline{\varphi} = \overline{f}$ entspricht.

Das gilt auch für eine Führung aus mehreren parallel verlaufenden Keilnuten von gleicher Öffnung (δ).

An der Betrachtung ändert sich nichts, wenn die Keilnuten in eine schiefe Ebene eingelassen sind, senkrecht zu deren Schnitt mit der Horizontalen. Es gelten die vorher abgeleiteten Formeln, falls man f durch $\overline{f}$ bezw. φ durch $\overline{\varphi}$ ersetzt.

Alles in allem entspricht der Einfluß der Reibung einer Änderung des Neigungswinkels α der schiefen Ebene, der beim Abwärtsgleiten aus α in $\alpha + \varphi$ oder $\alpha + \overline{\varphi}$, beim Aufwärtsgleiten aus α in $\alpha - \varphi$ oder $\alpha - \overline{\varphi}$ übergeht.

Fig. 379.



Wir betrachten noch die gleichförmige Hebung eines Pochstempels (Stampfe), wie er zum Zerkleinern von Erzen u. s. w. (vergl. Fig. 379) dient. Der horizontale Ansatz H des Stempels wird durch den Daumen D_1 einer Daumenwelle D gefaßt, wodurch der Stempel selbst mit Pressung gegen die Führungen F_1 und F_2 gehoben wird, bis er, frei geworden, durch sein Gewicht herabfällt, um die nötige Arbeit zu leisten.

Ist $[K]$ der Normaldruck an der Übertragungsfläche zwischen dem Daumen D_1 und dem Ansatze H, so entspricht diesem die Reibung $[fK]$. Ist der Normaldruck für die Führungen F_1 und F_2 bezw. $[N_1]$ und $[N_2]$, so treten dort bezw. die Reibungen $[f'N_1]$ und $[f'N_2]$ auf, falls die Reibung hier einen anderen Koeffizienten hat, als bei der Übertragung an dem Daumen. Man hat also als Bedingungen des Gleichgewichtes

1. in horizontaler Richtung: $fK + N_1 = N_2$,
2. in vertikaler Richtung: $G + R_2 + R_1 = K$,
3. für Drehung um A_1 (oder A_2): $G \,.\, r - K(e + r) - fK \,.\, h_1 + N_2(h_1 + h_2) + 2r \,.\, R_2 = 0$.

Die Auflösung der drei Gleichungen führt zu

$$K = \frac{G}{1 - \dfrac{2e}{h_1 + h_2} f' - ff'\left(1 - \dfrac{2r}{h_1 + h_2} f' - \dfrac{2h_2}{h_1 + h_2}\right)}.$$

Für $f = 0$ erhält man

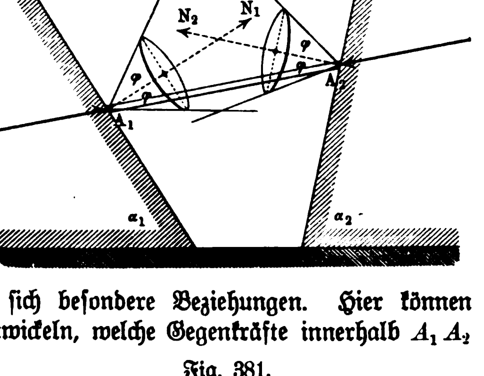
$$K = \frac{G}{1 - \dfrac{2e}{h_1 + h_2} f'}.$$

In diesem Sonderfalle ($f = 0$) ist der Wert K unabhängig von h_2, da $h_1 + h_2 = h$ gesetzt werden kann.

Führt man bei der Verwendung des Principes der virtuellen Verrückungen die Reibungen als angreifende Kräfte ein, so ist dasselbe allgemein verwendbar.

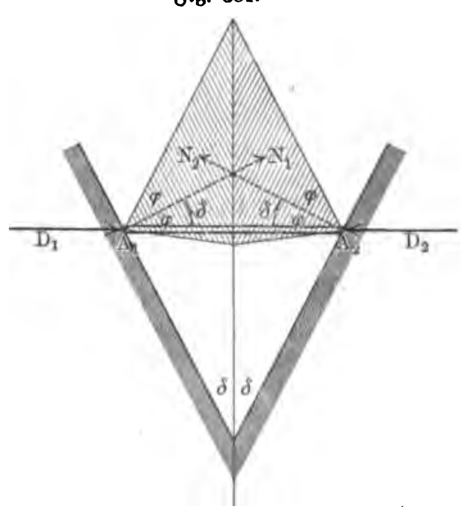
Man kann auch die virtuellen Verrückungen, senkrecht zur Richtung der Reibung oder zu der Richtung des aus Reibung und Normaldruck gebildeten Gesamtwiderstandes einführen, vorausgesetzt, daß diese Richtungen bekannt sind, und so, ohne den Wert der Reibung zu kennen, Schlüsse auf das Gleichgewicht gewinnen.

Fig. 380.



88. Bedingungen des Klemmens. Fällt die Verbindungsgerade der beiden Unterstützungspunkte A_1 und A_2 eines, durch zwei Flächen (Ebenen) gestützten Körpers ganz in die beiden Reibungskegel der Unterstützungspunkte hinein, so zeigen sich besondere Beziehungen. Hier können A_1 und A_2 Gesamtwiderstände entwickeln, welche Gegenkräfte innerhalb $A_1 A_2$ sind, so daß der Körper auch zwischen A_1 und A_2 fest liegen kann, wenn er kraftfrei ist, d. h. wenn sein Gewicht vernachlässigt werden kann, oder wenn die an ihm wirkenden Kräfte im Gleichgewichte stehen. Vergl. Fig. 380.

Fig. 381.



In diesem Falle erfordert die Entfernung des Körpers eine mehr oder minder große Kraft; man sagt, der Körper sei eingeklemmt zwischen den gegeneinander gepreßten Flächen (Ebenen).

Soll z. B. eine Stange zwischen zwei Ebenen (vgl. Fig. 381) symmetrisch eingeklemmt werden, so muß die Öffnung des Reibungskegels $\varphi > \delta$ sein d. h. $2\delta < 2\varphi$.

Relativ spitze Keile, die in irgend ein Material eingeführt sind, zeigen auch die Erscheinung des Klemmens.

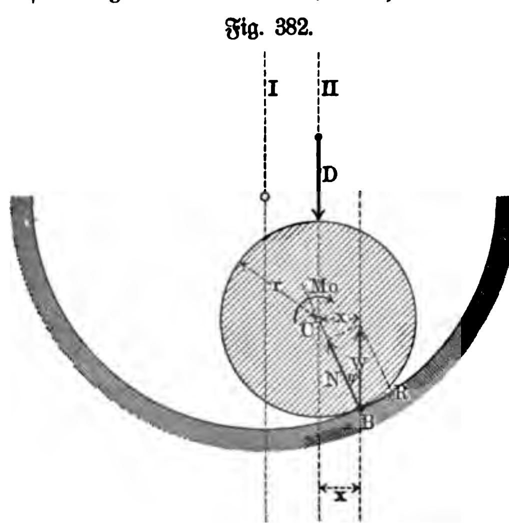
89. Die Lagerreibung für gleichförmige Drehung bei Drucken senkrecht zur Achse. Wenn sich ein belasteter Cylinder um seine horizontal ge-

lagerte Achse dreht und die Unterstützung auf beiden Seiten durch Lagerflächen geschieht, so ist die Reibung zwischen dem Cylinder und den Lagerflächen zu berücksichtigen.

Beispiele geben die Tragzapfen der Wellen in ihren Lagern.

Für eine gleichförmige Drehung um eine freie Achse des belasteten Cylinders sind bei Vernachlässigung der Reibung keine Kräfte zu berücksichtigen (vergl. S. 388), falls man die reibenden Körper als starr ansieht, also von den Spannungen des Materials, welche den Ausgleich der Centripetalkräfte vermitteln, absieht. Führt man unter dieser Voraussetzung die Reibung ein, so muß auch zugleich ein Paar angreifender Kräfte vom Momente Mo eingeführt werden, dessen Zweck es ist, die Drehung trotz der Reibung gleichförmig zu erhalten.

Fig. 382.



Wir betrachten zunächst einen Cylinder, der sich mit so großem Spielraum auf der cylindrischen Lagerfläche drehen kann, daß die Berührung angenähert in einer Geraden (Cylinderseite) erfolgt. Solche Verhältnisse zeigen sich bei stark gebrauchten Lagern aus relativ weichem Material (ausgelaufene Lager). Der Zapfen klettert infolge der Reibung $[R]$, seiner Bewegung entgegen, empor, so daß er nicht die Lage I der Fig. 382 einnimmt, sondern die Lage II. In der Berührungslinie, welche bei B die Ebene der Zeichnung durchschneidet, liefern Normaldruck $[N]$ und Reibung $[R]$ einen Widerstand $[W]$, welcher bei gleichförmiger Bewegung mit dem auf den Cylinder wirkenden Druck $[D]$ ein Kräftepaar bilden muß, dessen Moment dem Momente Mo der angreifenden Kräfte das Gleichgewicht hält. Deshalb muß $[W]$ parallel sein zu dem, auf den Cylinder übertragenen Druck $[D]$, d. h. im allgemeinen senkrecht nach oben wirken. In diesem Falle bildet $[W]$ mit dem Radius CB, der ja für B Normale ist, den Winkel φ, so daß der Arm x des Kräftepaares aus $[D]$ und $[W]$ den Wert $r \sin \varphi$ hat.

Für gleichförmige Drehung gilt also die Gleichung

$$Mo = D r \sin \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 144)$$

Die linke Seite der Gleichung stellt das Moment des, zur Überwindung der Reibung nötigen Paares der angreifenden Kräfte dar, die rechte Seite das entsprechende Moment, welches durch die Reibung bestimmt wird und darum Reibungsmoment heißt.

Bei Anwendung reichlichen Schmiermaterials ist φ so klein, daß $\sin \varphi$ durch $\tang \varphi = f$ ersetzt werden darf; man hat dann

$$Mo = Drf \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 145)$$

d. h. für einen Zapfen z. B. ist das Reibungsmoment das Produkt aus Zapfendruck, Zapfenhalbmesser und Reibungskoeffizient.

Denkt man sich eine, dem Drucke D entsprechende Reibung (Df) oder genauer $(D \sin \varphi)$ am Arme r wirken, so erhält man Mo, d. h. man darf sich die Bewegung reibungslos vorstellen, wenn man an dem Umfang des Cylinders eine Belastung Df bezw. $D \sin \varphi$ anbringt, die am Arme r das Gleichgewicht mit Mo herstellt.

Da die Arbeit von Mo für eine Umdrehung $Mo \,.\, 2\pi$, für u Umdrehungen also $Mo \,.\, 2\pi \,.\, u$ ist, so hat die Arbeitsstärke bei u Umdrehungen in der Minute (= 60″) den Wert $\frac{Mo \,.\, 2\pi \,.\, u}{60} = \frac{(Df) \,.\, r \,.\, 2\pi \,.\, u}{60}$. Ist c die Geschwindigkeit des Cylinderumfanges (Zapfenmantels), so ist $c = \frac{2 r\pi \,.\, u}{60}$, d. h. jene Arbeitsstärke ist darstellbar als $(Df) \,.\, c$, genauer als $(D \sin \varphi) \,.\, c$.

Denkt man sich also einen Körper vom Gewichte Df bezw. $D \sin \varphi$ an einem Seile so hängen, daß es der Cylinder bei seiner Drehung aufwickelt, so ist die Arbeit, welche dadurch veranschaulicht wird, zugleich die Arbeit, welche zur Überwindung der Reibung erforderlich ist bezw. die Arbeit der Reibung selbst.

Fig. 383.

Bei Umrechnung in Pferdestärken gilt natürlich

$$\frac{(Df) \,.\, c}{75} = N,$$

falls die Anzahl der Pferdestärken mit N bezeichnet wird.

Bei der in Fig. 383 angedeuteten Art der Auflagerung (Keillager) entspricht dem vorher betrachteten Klettern des Zapfens für den gezeichneten Bewegungspfeil ein stärkerer Druck nach rechts hin.

Bei einer genaueren Behandlung muß man demnach N_2 und N_1 voneinander verschieden annehmen $(N_2 > N_1)$, so daß auch $R_2 = fN_2$ und $R_1 = fN_1$ voneinander verschieden sind.

Für C als Drehpunkt hat man bei gleichförmiger Drehung

$$1) \quad Mo = (R_1 + R_2) r.$$

In horizontaler Richtung fordert das Gleichgewicht außerdem den Ansatz

$$2) \quad N_1 \cos \delta + R_1 \sin \delta + R_2 \sin \delta = N_2 \cos \delta$$

und in vertikaler Richtung ebenso

$$3) \quad N_1 \sin \delta + N_2 \sin \delta + R_2 \cos \delta = D + R_1 \cos \delta.$$

Für $R_1 = fN_1$ und $R_2 = fN_2$ erhält man aus Gleichung 2) und 3) zunächst $N_2 + N_1$ und $N_2 - N_1$, während Gleichung 1) die Form $Mo = fr(N_2 + N_1)$ annimmt.

So ergiebt sich

$$Mo = D \cdot r \cdot \frac{f}{(1 + f^2)\sin\delta} = D \cdot r \frac{\frac{1}{2}\sin 2\varphi}{\sin\delta} \quad . \quad . \quad . \quad 146)$$

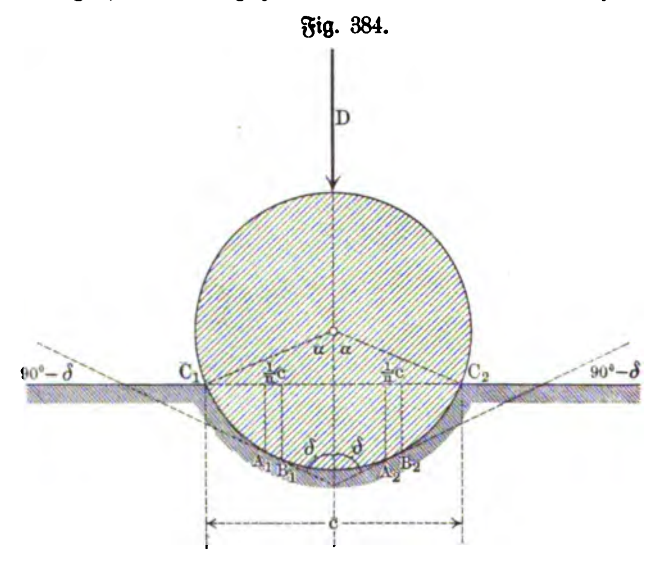
Für kleinere Werte von φ darf $\frac{1}{2}\sin 2\varphi = \sin\varphi \cdot \cos\varphi$ durch $tg\,\varphi = f$ ersetzt werden, so daß sich

$$Mo \sim D \cdot r \cdot \frac{f}{\sin\delta} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 147)$$

ergiebt. Diese Formel geht aus Nr. 145) hervor, wenn man $\bar{f} = \frac{f}{\sin\delta}$ statt f einführt. Man nennt δ den Winkel des Keiles oder der Keilnute und bezeichnet infolgedessen $\bar{f}$ auch hier (vergl. S. 541) als den Reibungskoeffizienten für die Keilnute vom Winkel (Öffnung) δ.

Da $\sin\delta$ ein echter Bruch ist, so ist $\bar{f} > f$, d. h. beim Keillager ist eine größere Reibung zu überwinden, als bei der vorher betrachteten einfachen Auflagerung. Dafür bietet das Keillager den Vorteil, auch bei Abnutzung eine sichere Achsenlage zu gewährleisten (Verwendung bei Meßinstrumenten).

Fig. 384.



Da die Auflagerstellen B_1 und B_2 des Keillagers thatsächlich sehr schmale Flächen sind, so kann man aus der vorigen Betrachtung auch die Formeln für ein Umschlußlager, wie es Fig. 384 darstellt, gewinnen, vorausgesetzt, daß man eine gleichmäßige Verteilung des Druckes D auf die Horizontale annehmen darf. Teilt man unter dieser Voraussetzung die Sehne $C_1C_2 = c$ in n gleiche Teile, so entspricht einem symmetrisch gelegenen Paar solcher Teilchen die vorige Betrachtung für A_1B_1 und A_2B_2 und für den entsprechenden Winkel δ. Da

$A_1B_1 \cdot \cos(90^0 - \delta) = \frac{1}{n}c$ ist, so ist $\sin\delta = \frac{\frac{1}{n}c}{A_1B_1}$ und man hat gemäß Formel 146)

$$\frac{2}{n} D \cdot r \cdot \frac{\frac{1}{2}\sin 2\varphi}{\sin\delta} = \frac{\frac{2}{n} D \cdot r \cdot \frac{1}{2}\sin 2\varphi}{\frac{1}{n}c} \cdot A_1B_1$$

$$= D \,.\, r \,.\, \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi \cdot \frac{2\, A_1 B_1}{c} = D \,.\, r \,.\, \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi \cdot \frac{A_1 B_1 + A_2 B_2}{c}$$

als Reibungsmoment für die Berührung in $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$.

Dehnt man die Betrachtung auf alle Paare, wie $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, aus, so setzen die Stücke, wie $A_1 B_1 + A_2 B_2$, den Bogen $C_1 C_2$ zusammen, d. h. man hat

$$Mo = D \,.\, r \,.\, \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi \cdot \frac{\widehat{C_1 C_2}}{C_1 C_2}$$

$$= D \,.\, r \,.\, \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi \, \frac{arc\, \alpha}{\sin \alpha}.$$

Für kleinere Werte von φ gilt hier

$$Mo = D \,.\, r \cdot \frac{f \,.\, arc\, \alpha}{\sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 148)$$

Für halben Umschluß ($\alpha = 90^0$) ist $arc\, \alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\sin \alpha = 1$, d. h. man hat hier

$$Mo = D \,.\, r \,.\, f \cdot \frac{\pi}{2} = D \,.\, r \,.\, (1{,}57\, f).$$

Bei den Lagern, welche in der Maschinentechnik im Gebrauche sind, findet eine Abnutzung statt, welche aber nicht dem großen Spielraum der Fig. 382 entspricht.

Für halben Umschluß ($\alpha = 90^0$) hat man hier also weder die Formel des neuen Lagers

$$Mo = 1{,}57 \,.\, D \,.\, r \,.\, f,$$

noch die Formel des völlig ausgelaufenen Lagers

$$Mo = 1 \,.\, D \,.\, r \,.\, f$$

anzusetzen, sondern die Formel

$$Mo = \varepsilon \,.\, D \,.\, r \,.\, f,$$

in welcher ε einen Zahlenwert bezeichnet, welcher im allgemeinen von Fall zu Fall durch Versuche festgestellt werden muß. Man setzt dann besser $\varepsilon \,.\, f = f_z$ und bestimmt f_z in der Gleichung $Mo = D r f_z$ durch Versuche; man kann dann f_z als Koeffizienten der Zapfenreibung bezeichnen.

Für neue Lager hat sich der Satz bewährt, daß der vertikale Zapfendruck sich gleichmäßig auf die Horizontalprojektion der Lagerfläche verteilt bezw. daß sich der Zapfendruck überhaupt auf die Projektion der Lagerfläche, senkrecht zu seiner Richtung, gleichmäßig verteilt.

Unter dieser Voraussetzung ist auch der, auf die Flächeneinheit bezogene Normaldruck (Spannung) für die Elemente der Lagerfläche konstant. Bezeichnet nämlich AB in Fig. 385 (a. f. S.) ein Element ε der Lagerfläche, dessen durch $A'B'$ bezeichnete Projektion ε' senkrecht zur Druckrichtung $[D]$ ist, so erhält das Element ε bei einer Normalspannung p den Normaldruck $p\varepsilon$, dessen Komponente in der Richtung $[D]$ den Wert $p\,\varepsilon \cos \delta$ hat. Da aber $\varepsilon \cos \delta = \varepsilon'$ ist, so ist diese Komponente auch darstellbar als $p\varepsilon'$. Erhält also jedes Element ε' bei der Verteilung von $[D]$ dieselbe Nor-

malspannung p, so ist diese Spannung zugleich die Normalspannung für die Elemente der Lagerfläche.

Für einen horizontal gelagerten Zapfen von der Länge l und dem Durchmesser $2r$ hat die Projektion der Lagerfläche, senkrecht zum Vertikaldruck, den Wert $l \, . \, 2r$, so daß hier $p = \frac{D}{l \, . \, 2r}$ ist.

Fig. 386 stellt diese Spannungsverteilung für den Zapfen dar. Bei der Abnutzung des Lagers ändert sich diese Spannungsverteilung; über die Art dieser Änderung kann nur die Erfahrung Auskunft geben.

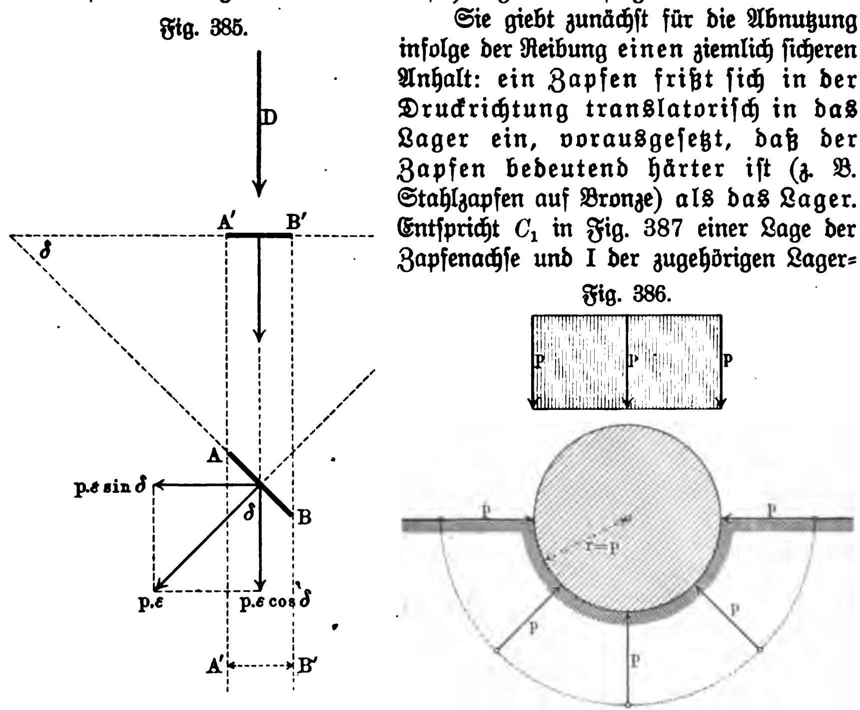


Fig. 385.

Fig. 386.

Sie giebt zunächst für die Abnutzung infolge der Reibung einen ziemlich sicheren Anhalt: ein Zapfen frißt sich in der Druckrichtung translatorisch in das Lager ein, vorausgesetzt, daß der Zapfen bedeutend härter ist (z. B. Stahlzapfen auf Bronze) als das Lager. Entspricht C_1 in Fig. 387 einer Lage der Zapfenachse und I der zugehörigen Lagerfläche, so ist für eine Abnutzung a in der durch C_1 gehenden Druckrichtung (D) die neue Lagerfläche durch II bestimmt, d. h. durch einen Kreis mit r aus C_2, und nicht durch III, d. h. durch einen Kreis mit $r + a$ aus C_1.

Nimmt man nun ferner an, daß die Abnutzung in Richtung des Radius an jeder Stelle der Arbeit für diese Stelle proportional ist, so erhält man eine Grundlage für die Darstellung der Drehung im ausgelaufenen Lager, welche mit der Erfahrung in befriedigender Übereinstimmung ist.

Hat der Normaldruck auf die Flächeneinheit an der Stelle Q_s den Wert p_s, so ist für einen senkrecht zur Ebene der Zeichnung stehenden unendlich-schmalen Flächenstreifen von der Zapfenlänge l und der Breite λ der Druck $p_s(l \, . \, \lambda)$ anzusetzen. Diesem entspricht die Reibung $f \, . \, p_s \, . \, (l \, . \, \lambda)$ und, für ein Fortschreiten um λ die Reibungsarbeit $f \, . \, p_s(l \, . \, \lambda) \, . \, \lambda$, während der in Richtung des Radius an der Stelle Q_s zur Zerstörung kommende Teil des

Lagers für den Übergang von I nach II das Volumen $l \,.\, \lambda \,.\, a_\varepsilon$ hat, falls a unendlich klein ist. Setzt man nun, unter Einführung der Konstante C

$$f \,.\, p_\varepsilon (l \,.\, \lambda) \,.\, \lambda = C \,.\, l \,.\, \lambda \,.\, a_\varepsilon,$$

so ist

$$p_\varepsilon \,.\, \lambda = \frac{C}{f} \cdot a_\varepsilon.$$

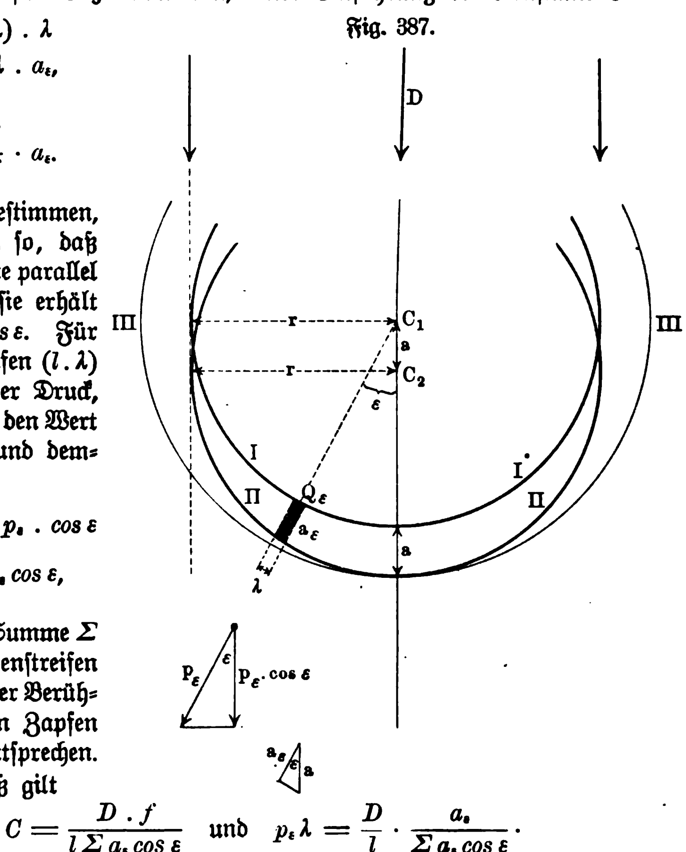


Fig. 387.

Um C zu bestimmen, zerlegen wir p_ε so, daß eine Komponente parallel zu $[D]$ wird, sie erhält den Wert $p_\varepsilon \cos \varepsilon$. Für den Flächenstreifen $(l \,.\, \lambda)$ hat demnach der Druck, parallel zu $[D]$, den Wert $(l \,.\, \lambda)\, p_\varepsilon \cos \varepsilon$ und demnach ist

$$D = \Sigma (l \,.\, \lambda)\, p_\varepsilon \,.\, \cos \varepsilon = \frac{C \,.\, l}{f} \Sigma\, a_\varepsilon \cos \varepsilon,$$

wobei sich die Summe Σ auf alle Flächenstreifen bezieht, welche der Berührungsfläche von Zapfen und Lager entsprechen.

Demgemäß gilt

$$C = \frac{D \,.\, f}{l\, \Sigma\, a_\varepsilon \cos \varepsilon} \quad \text{und} \quad p_\varepsilon \lambda = \frac{D}{l} \cdot \frac{a_\varepsilon}{\Sigma\, a_\varepsilon \cos \varepsilon}.$$

Das Moment der gesamten Reibung ist nun gegeben als

$$Mo = \Sigma\, r \,.\, f \,.\, p_\varepsilon (l \lambda) = D \,.\, r \,.\, f \cdot \frac{\Sigma\, a_\varepsilon}{\Sigma\, a_\varepsilon \cos \varepsilon}.$$

Da die ganze Betrachtung für eine unendlich-kleine Verrückung (a) von I gegen II gilt, so ist $a_\varepsilon = a \cos \varepsilon$, d. h. man hat schließlich

$$Mo = D \,.\, r \,.\, f \cdot \frac{\Sigma\, a \cos \varepsilon}{\Sigma\, a \cos^2 \varepsilon}.$$

Für eine gleichmäßige Einteilung (λ) von I ist $p_\varepsilon = C' . a_\varepsilon$

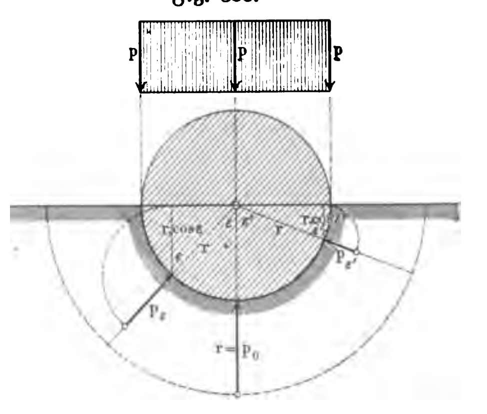
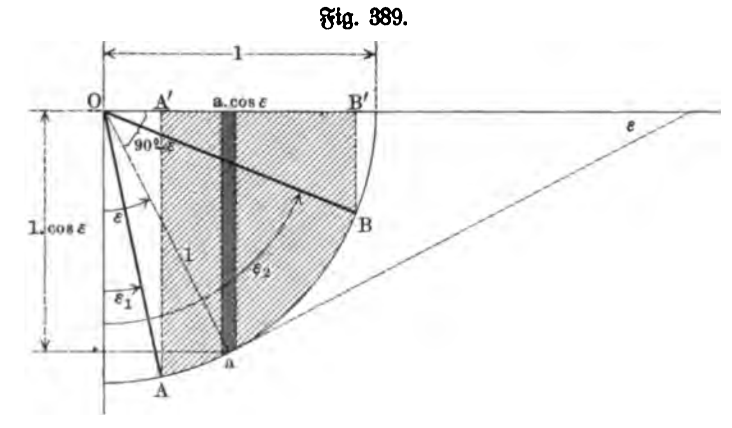


Fig. 388.

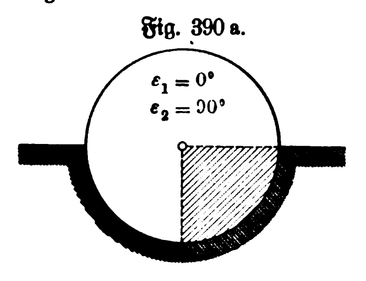
$= C'. a \cos \varepsilon$, falls C' eine Konstante bezeichnet. Bezeichnet man den Wert von p für $\varepsilon = 0$ durch p_0, so ist die Verteilung der Spannung also hier durch die Formel $p_\varepsilon = p_0 \,.\, \cos \varepsilon$ gegeben. Sie wird durch Fig. 388 (a. v. S.) dargestellt, in welcher $p_0 = r$ gezeichnet ist, damit die Lote $r \cos \varepsilon$ ohne weiteres zur Darstellung von p_ε dienen können.

Fig. 389.

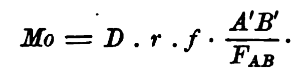


Um die Bestimmung von Mo für den cylindrischen Tragzapfen durchzuführen, betrachten wir Fig. 389, in welcher auf einem Einheitskreise der Bogen AB in n Teile von der Länge a zerlegt ist. Die doppelt schraffierte Fläche, welche über a steht, hat bei elementarer Teilung den Wert $a \cos^2 \varepsilon$, so daß die einfach schraffierte Fläche über AB den Wert $\Sigma\, a \cos^2 \varepsilon$ für das Gebiet von ε_1 bis ε_2 darstellt. Ebenso stellt die Strecke $A'B'$ den Wert $\Sigma\, a \cos \varepsilon$ für das Gebiet von ε_1 bis ε_2 dar.

Fig. 390 a.

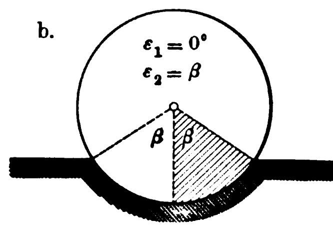


Bezeichnet man die schraffierte Fläche über AB durch F_{AB}, so ist also



$$Mo = D \,.\, r \,.\, f \cdot \frac{A'B'}{F_{AB}}.$$

b.



Für $\varepsilon_1 = 0^0$ und $\varepsilon_2 = 90^0$ erhalten wir halben Umschluß (vergl. Fig. 390 a).

Hier ist $A'B' = 1$ und $F_{AB} = \frac{1}{4}\pi$, d. h. also

$$Mo = \frac{4}{\pi} D.r.f = 1{,}27 \,.\, D.r.f \quad . \quad 149)$$

Für $\varepsilon_1 = 0^0$ und $\varepsilon_2 = \beta$ erhalten wir eine beliebige Umfassung (vergl. Fig. 390 b).

Hier ist $A'B' = \sin \beta$ und $F_{AB} = \frac{1}{2}(arc\, \beta + \sin \beta \cos \beta)$, d. h. also

$$Mo = D \,.\, r \,.\, f \cdot \frac{2 \sin \beta}{arc\, \beta + \sin \beta \cos \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 150)$$

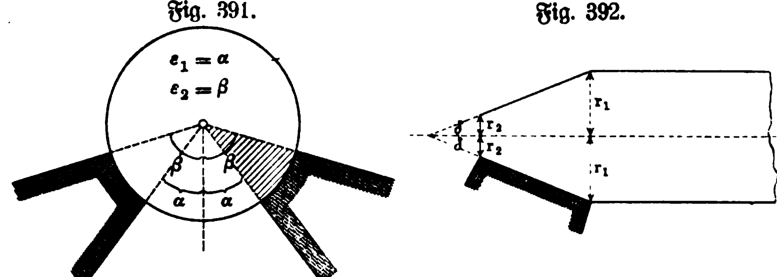
Für $\varepsilon_1 = \alpha$ und $\varepsilon_2 = \beta$ erhalten wir eine beliebige Umfassung mit beliebig offener Rinne im Schalengrunde (vergl. Fig. 391). Hier ist $A'B' = \sin\beta - \sin\alpha$ und

$$F_{AB} = \tfrac{1}{2}(arc\,\beta + \sin\beta\,\cos\beta) - \tfrac{1}{2}(arc\,\alpha + \sin\alpha\,\cos\alpha),$$

d. h. also

$$Mo = D\,.\,r\,.\,f \cdot \frac{2(\sin\beta - \sin\alpha)}{arc\,\beta - arc\,\alpha + \sin\beta\,\cos\beta - \sin\alpha\,\cos\alpha}$$

Fig. 391. Fig. 392.



Führt man eine entsprechende Betrachtung für den in Fig. 392 skizzierten Kegelzapfen durch, so erhält man

$$Mo = \frac{\pi}{3} \cdot D \cdot \frac{f}{\cos\delta} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 151)$$

für den neuen, und

$$Mo = \frac{2}{\pi} \cdot D \cdot \frac{f}{\cos\delta}\,(r_1 + r_2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 152)$$

für den eingelaufenen Zapfen.

Für $r_2 = 0$ erhält man die entsprechenden Formeln des Vollkegels.

Benutzt man Winkel $\delta' = 90^0 - \delta$, welcher der Keilnute im Materiale entspricht, so ist $\frac{f}{\cos\delta}$ durch $\frac{f}{\sin\delta'}$ zu ersetzen. Vergl. S. 541 und S. 546.

Giebt man dem Moment die Gestalt

$$Mo = D\,.\,\varrho,$$

so heißt der mit ϱ als Radius um die Zapfenachse als Achse beschriebene Cylinder der Reibungscylinder des Zapfens, jeder Schnitt desselben senkrecht zur Achse ein Reibungskreis des Zapfens.

Für statische Konstruktionen im engeren Sinne (Ruhe) ist dieser Kreis von Wichtigkeit. Schneidet die Gerade einer Kraft $[K]$, welche auf dem Zapfen, senkrecht zu seiner Achse wirkt, den Reibungskreis bezw. berührt sie ihn, so ist der Zapfen unter dem Einflusse dieser Kraft im Gleichgewicht, weil ihr Moment in Bezug auf die Zapfenachse dann $\leqq K\varrho$ ist, während das entsprechende Reibungsmoment $K\varrho$ ist (vergl. Fig. 393 a. f. S.). So sind z. B. Gelenkstangen auch noch im Gleichgewicht, wenn die übertragenen Kräfte nicht mehr in der Achse liegen, wenn sie nur den Reibungscylinder schneiden oder berühren. Für eine doppelt eingelenkte Stange geben die gemeinsamen Tangentialebenen der Reibungscylinder ihrer Zapfen die Grenzlagen für die Beweglichkeit der übertragenen Kräfte an.

Ist eine Rolle in Bewegung, wie es der Pfeil der Fig. 394 angiebt, so entspricht die Reibung dem Pfeile R, es muß also mit D ein Moment gebildet werden, welches dem Reibungsmomente $D \,.\, \varrho$ entspricht, d. h. D muß für

Fig. 393. Fig. 394.

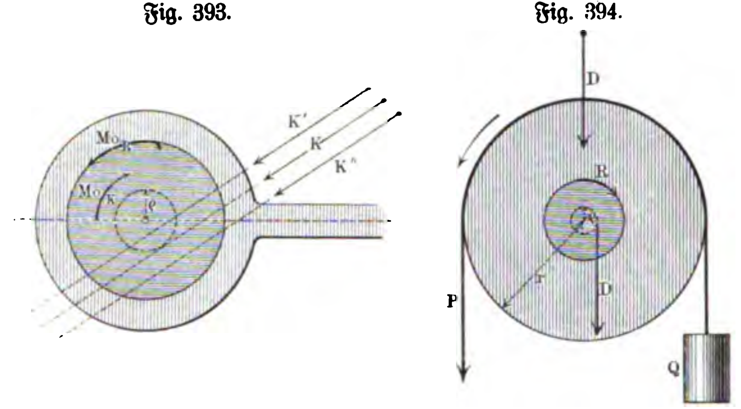
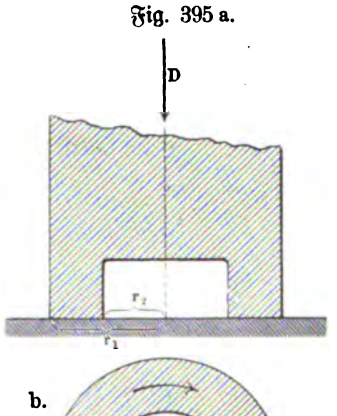


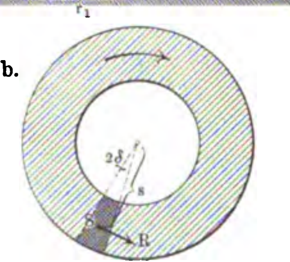
Fig. 394 rechts als Tangente an den Reibungskreis gezeichnet werden, um für den Mittelpunkt das Reibungsmoment zu liefern.

90. Die Lagerreibung für gleichförmige Drehung bei Drucken innerhalb der Achse. Wenn sich ein belasteter Cylinder um seine vertikal gelagerte Achse dreht und die Unterstützung durch eine Lagerfläche am unteren Ende des Cylinders geschieht, so ist die Reibung an dieser zu berücksichtigen. Beispiele geben die Stützzapfen der Wellen in ihren Lagern. Für eine gleichförmige Drehung um eine freie Achse des belasteten Cylinders gelten entsprechende Betrachtungen wie in § 89.

Fig. 395 a.



b.



Wirkt der Druck D in der Achse des in Fig. 395 a skizzierten Stützzapfens, so stimmt die Lagerfläche überein mit ihrer Projektion, senkrecht zur Druckrichtung, sie ist ein Kreisring mit den Radien r_1 und r_2. Bei gleichmäßiger Verteilung des Druckes auf die Projektion, senkrecht zur Druckrichtung, ist also die mittlere Spannung $p = \dfrac{D}{(r_1^2 - r_2^2)\pi}$ zugleich die Spannung für jedes Element der Lagerfläche.

Auf einen Ausschnitt aus der Lagerfläche (vergl. Fig. 395 b) vom Centriwinkel 2δ wirkt also der Druck

$$(r_1^2 - r_2^2)\, arc\,\delta \,.\, p = \frac{arc\,\delta}{\pi} \cdot D,$$

so daß die entsprechende Reibung bestimmt ist als

$$R = f \cdot \frac{arc\,\delta}{\pi} \cdot D.$$

Bei der gleichmäßigen Belastung der Elemente der Lagerfläche konzentriert sich der Druck auf den Ausschnitt bezw. die entsprechende Reibung in dem Schwerpunkte, für welchen gilt

$$s = \tfrac{2}{3}\frac{\sin\delta}{arc\,\delta} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Demgemäß ist das Reibungsmoment für den betrachteten Ausschnitt

$$\tfrac{2}{3} f \,.\, D \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \frac{\sin\delta}{\pi}.$$

Für die ganze Fläche ist demnach

$$Mo = \Sigma \tfrac{2}{3} f \,.\, D \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \frac{\sin\delta}{\pi}.$$

Bei Zerlegung in elementare Ausschnitte hat man von der Entwickelung $\sin\delta = arc\,\delta - \frac{1}{6}(arc\,\delta)^3 + \cdots$ nur das erste Glied zu berücksichtigen, so daß an der Grenze

$$Mo = \tfrac{2}{3} f \,.\, D \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \frac{1}{\pi}\,\Sigma\, arc\,\delta$$

wird.

Da $\Sigma\, arc\, 2\delta$ hier der ganzen Kreisfläche entspricht, so ist $\Sigma\, arc\,\delta = \pi$, d. h. man hat

$$Mo = \tfrac{2}{3} f \,.\, D \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}. \quad \cdots\cdots\cdots \quad 153)$$

Diese Betrachtung gilt für einen neuen Zapfen.

Für einen Zapfen im ausgelaufenen Lager betrachten wir die Zerstörung des Materiales in einer unendlich-schmalen kreisförmigen Rinne (Hohlcylinder) im mittleren Abstande r von der Achse. Hat die Oberfläche der Rinne die Größe ε, so ist bei einer Tiefe a das Volumen des zur Zerstörung kommenden Materials $a\varepsilon$.

Der Normaldruck auf die Oberfläche (Kreisring) der Rinne hat, falls die Spannung im Abstande r mit p_r bezeichnet wird, den Wert εp_r, die entsprechende Reibung also den Wert $f\varepsilon p_r$, so daß die entsprechende Reibungsarbeit für einen Umgang $f\varepsilon p_r \,.\, 2r\pi$ ist.

Setzt man, unter Einführung der Konstante C, wieder

$$f \,.\, \varepsilon \,.\, p_r \,.\, 2r\pi = C \,.\, \varepsilon \,.\, a,$$

so ergiebt sich für $r \,.\, p_r$ ein konstanter Wert.

Setzt man $p_r = \frac{C'}{r}$, so ist der Normaldruck für die Oberfläche ε der belasteten Fläche $\varepsilon p_r = \frac{\varepsilon C'}{r}$, so daß

$$D = \Sigma \frac{\varepsilon C'}{r}$$

folgt.

Wird die Oberfläche der Rinne von den Radien r' und r'' begrenzt, so ist $\varepsilon = (r')^2\pi - (r'')^2\pi$ und $r = \frac{r' + r''}{2}$, so daß $\frac{\varepsilon}{r} = 2\pi(r' - r'')$ ist.

Teilt man die ganze Stützfläche in n konzentrische Ringe von gleicher Breite, deren Radien $r_1, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, r_2$ sind, so ist

$$\Sigma \frac{\varepsilon}{r} = [(r_1 - a_1) + (a_1 - a_2) + \cdots (a_{n-1} - r_2)] \,.\, 2\pi = 2\pi(r_1 - r_2).$$

Demnach ist $D = C' \,.\, 2\pi(r_1 - r_2)$ und $C' = \frac{D}{2\pi(r_1 - r_2)}$.

Nun hat man für das Moment der Reibung

$$Mo = \Sigma(\varepsilon p_r) \,.\, f \,.\, r = \Sigma C' \,.\, f \,.\, \varepsilon = C' \,.\, f \,.\, \Sigma \varepsilon.$$

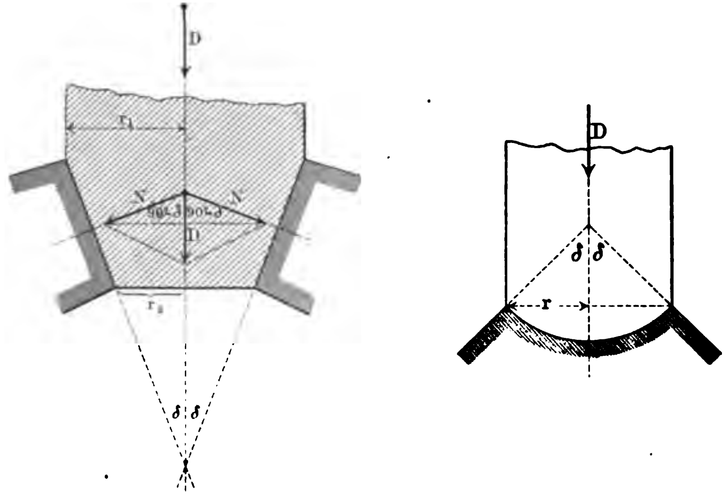


Fig. 396. Fig. 397.

Da $\Sigma\varepsilon$ die ganze Stützfläche $(r_1^2 - r_2^2)\pi$ darstellt, so ist

$$Mo = f \,.\, D \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \quad \ldots \ldots \quad 154)$$

Für $r_2 = 0$ erhält man den vollen Stützzapfen, für den also gilt, falls man $r_1 = r$ setzt

$$Mo = \tfrac{2}{3} f \,.\, D \,.\, r \quad \ldots \ldots \quad 155)$$

bei neuem Lager, und

$$Mo = \tfrac{1}{2} f \,.\, D \,.\, r \quad \ldots \ldots \quad 156)$$

bei ausgelaufenem Lager.

Entsprechende Betrachtungen geben für den in Fig. 396 skizzierten Kegelzapfen $(N \,.\, \sin\delta = \frac{1}{2} D)$

$$Mo = \frac{2}{3} \frac{f}{\sin\delta} \cdot D \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} \quad \ldots \ldots \quad 157)$$

bei neuem Lager, und

$$Mo = \frac{f}{\sin\delta} \cdot D \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \quad \ldots \ldots \quad 158)$$

bei ausgelaufenem Lager.

Für den Spitzzapfen ($r_2 = 0$ und $r_1 = r$) hat man bezw.

$$Mo = \tfrac{2}{3} \frac{f}{\sin \delta} \cdot D \cdot r \quad \text{und} \quad Mo = \tfrac{1}{2} \frac{f}{\sin \delta} \cdot r \quad . \quad . \quad . \quad 159)$$

Läßt man den Kegelzapfen der Fig. 396 auch noch am Grunde unter Reibung aufsitzen, so erhält man bei neuem Lager

$$Mo = \tfrac{2}{3} \cdot f \cdot D \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3 (1 - \sin \delta)}{r_1^2 \cdot \sin \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 160)$$

und

$$Mo = \tfrac{1}{2} \cdot f \cdot D \frac{r_1^2}{(r_1 - r_2) \sin \delta + r_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 161)$$

bei ausgelaufenem Lager.

Für die in Fig. 397 dargestellte Zapfenform (Kugelzapfen) ergiebt sich

$$Mo = f \cdot D \cdot r \frac{arc\, \delta - \frac{1}{2} \sin 2\delta}{\sin^2 \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 162)$$

bei neuem Lager, und

$$Mo = f \cdot D \cdot r \cdot \frac{\sin^2 \delta}{arc\, \delta + \frac{1}{2} \sin 2\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 163)$$

bei ausgelaufenem Lager.

91. Die Lagerreibung für gleichförmige Drehung bei Drucken, schief zur Achse. Wenn ein Druck [D] die Achse eines Zapfens schief schneidet, so hat man die Komponenten [D_1] und [D_2] von [D] bezw. senkrecht und parallel zur Achse zu bestimmen, und diese gemäß § 89 und 90 einzuführen. Man gelangt dabei, mit Rücksicht auf die Erfahrung, zu folgenden Regeln:

1. Wirkt auf einen Kegelzapfen ein Druck [D], so ist das Reibungsmoment so zu berechnen, als wenn lediglich [D_2] vorhanden wäre (Stützzapfenformel).
2. Wirkt auf einen cylindrischen Zapfen mit ebener Endfläche ein Druck [D], so ist das Reibungsmoment so zu berechnen, als wenn [D_1] den Zapfen als Tragzapfen und [D_2] den Zapfen als Stützzapfen in Anspruch nähmen.

Dazu führen wir noch an:

3. Für gleiche kegelförmige Tragzapfen einer Welle, von denen der eine den Druck D und der andere den Druck D', beide mal senkrecht zur Achse erleidet, ist das Moment so zu berechnen, als wenn ein Zapfen unter dem Drucke $2D$ stände, falls $D > D'$ ist.
4. Für gleiche cylindrische Tragzapfen ist entsprechend ein Zapfen mit dem Druck $D + D'$ einzuführen.

92. Seilreibung. Über einen befestigten cylindrischen Körper C (z. B. Baumstamm, durch Zimmermannshaken angeschlagen) sei, wie Fig. 398 (a. f. S.) zeigt, ein Seil gelegt, an welchem durch eine Kraft P eine Last Q gleichförmig bewegt werden soll. Dabei hat P die Last Q und die Reibung zwischen Seil und Führungskörper zu überwinden, so daß $P > Q$ ist. Um die Beziehungen zwischen P und Q festzustellen, schneiden wir (vergl. Fig. 399 a. f. S.) aus

dem Seile einen kleinen Teil $A'B'$ heraus und bringen an den Schnittstellen tangential die Kräfte S_1 und S_2 an, welche durch die Schnitte zerstört wurden. S_2 hat dann S_1 und der Reibung von $A'B'$ das Gleichgewicht zu halten. Zerlegt man $[S_1]$ und $[S_2]$ nach Richtung der Tangente und Normale für die Mitte von $A'B'$, so ist der Normaldruck $(S_1 + S_2) \sin \varepsilon$, also die Reibung $f(S_1 + S_2) \sin \varepsilon$. Zum Gleichgewichte erforderlich ist also

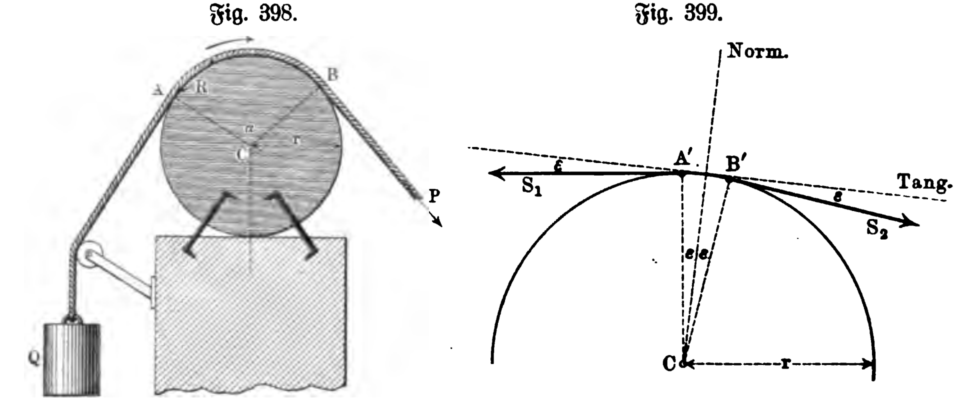
$$f \cdot (S_1 + S_2) \sin \varepsilon = (S_2 - S_1) \cos \varepsilon.$$

Daraus folgt

$$S_2 = \frac{1 + f \, tg \, \varepsilon}{1 - f \, tg \, \varepsilon} \cdot S_1 = \psi \cdot S_1.$$

Zerlegen wir nun AB in n gleiche Teile vom Centriwinkel 2ε, so entsprechen den Teilpunkten bestimmte Spannungen $Q, K_1, K_2 \ldots, K_{n-1}, P$,

Fig. 398. Fig. 399.



von denen je zwei bezw. den betrachteten Spannungen S_1 und S_2 entsprechen. Demnach gilt

$$K_1 = Q \cdot \psi, \quad K_2 = K_1 \cdot \psi \ldots, \quad P = K_{n-1} \cdot \psi,$$

d. h.

$$P = Q \cdot \psi^n = Q \frac{(1 + f \, tg \, \varepsilon)^n}{(1 - f \, tg \, \varepsilon)^n}.$$

Da $\varepsilon = \frac{\alpha}{2n}$ ist, so ist für $\lim \varepsilon = 0$

$$\lim \left[1 \pm f \cdot tg \frac{\alpha}{2n}\right]^n_{n=\infty}$$

zu bestimmen, was bekanntlich zu $e^{\pm 1/2 f \cdot arc \, \alpha}$ führt.

Demnach gelten für P und Q und für die Reibung R die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} P &= Q \frac{e^{+1/2 f \cdot arc \, \alpha}}{e^{-1/2 f \cdot arc \, \alpha}} = Q \cdot e^{f \cdot arc \, \alpha} \\ R &= P - Q = Q(e^{f \cdot arc \, \alpha} - 1) = P \cdot \frac{e^{f \cdot arc \, \alpha} - 1}{e^{f \cdot arc \, \alpha}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 164)$$

Aus der ersten Formel ersieht man, daß P rasch mit $arc \, \alpha$ wächst und zwar unabhängig vom Radius r des Körpers C, falls f nicht allzu klein ist.

Die Versuche ergaben für f im Mittel 0,5 bei Seilen oder Riemen auf Holz- und Eisenflächen.

Für eine Umschlingung von 115° ist $arc\,\alpha \sim 2$, so daß $f\,arc\,\alpha \sim 1$ und $P \sim Q\,.\,2{,}72$ ist. Für eine halbe Umschlingung ($\alpha = 180°$) ist $P \sim 5\,Q$, also für eine volle Umschlingung $P \sim 25\,Q$, für zwei volle Umschlingungen $P \sim 625\,Q$.

Dabei bedeutet f den Reibungskoeffizienten innerhalb der Bewegung.

Solange $P < Q\,.\,e^{f\,.\,arc\,\alpha}$ ist, bleibt das Seil in Ruhe, es bleibt aber auch noch in Ruhe, wenn für f der größere Koeffizient für die Bewegung aus der Ruhe gesetzt wird.

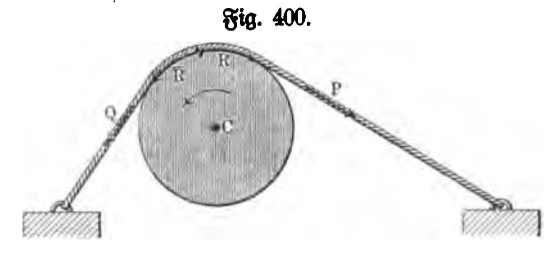
Kommen die Bewegungen im Sinne von Q und im Sinne von P in Frage, so muß für Ruhe zugleich $P < Q\,.\,e^{f\,.\,arc\,\alpha}$ und $Q < P e^{f\,.\,arc\,\alpha}$ sein, d. h. man hat

$$Q\,.\,e^{-f\,.\,arc\,\alpha} < P < Q\,.\,e^{+f\,.\,arc\,\alpha}$$

für f als Koeffizient der Bewegung aus der Ruhe.

Schlingt man ein Seil oft genug um einen befestigten Cylinder, so genügt schließlich das Gewicht des einen freien Seilendes, um eine erhebliche Belastung des anderen Seilendes zu halten. So wird z. B. ein landendes Schiff durch ein Seil befestigt, das mehrere Male um einen starken, senkrecht stehenden Pfahl geschlungen wird; so kann man sich an einem mehrfach umgeschlungenen Seile (z. B. bei Feuersgefahr) aus dem Fenster hinablassen.

Fig. 400.



Bei großen Geschwindigkeiten des Seiles wird ein Teil des Normaldruckes dazu verwendet, die nötige Centripetalkraft zu liefern. Für ein kleines Seilstück AB von der Länge $r\,.\,arc\,2\,\varepsilon$ ist bei einem Querschnitt q das Volumen $q\,.\,r\,.\,arc\,2\,\varepsilon$ und bei einem specifischen Gewichte δ die Masse $\frac{\delta.q.r.arc\,2\,\varepsilon}{g}$ anzusetzen, welcher die Centripetalkraft $\frac{\delta\,.\,q\,.\,r^2\,.\,arc\,2\,\varepsilon}{g}\gamma^2 = K.arc\,2\,\varepsilon$ bei einer Winkelgeschwindigkeit γ entspricht. Man hat dann anzusetzen

$$f\{(S_1 + S_2)\sin\varepsilon - K\,.\,arc\,2\,\varepsilon\} = (S_2 - S_1)\cos\varepsilon.$$

Ein Grenzübergang führt hier zu

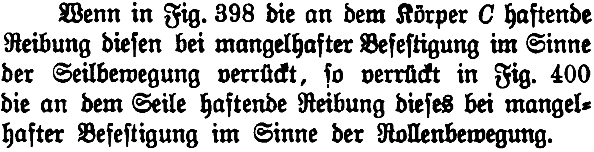
$$P - K = (Q - K)\,e^{f\,.\,arc\,\alpha}.$$

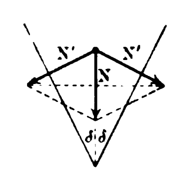
Für einen Riemen von 0,5 cm Dicke und 3 cm Breite ist $q = 1{,}5$ qcm $= 0{,}00015$ qm. Wiegt der Kubikmeter des Riemenstückes 800 kg, so ist im Meter-Sekundensystem $\frac{\delta\,.\,q}{g} \sim 0{,}012$ und $K = 0{,}012\,(r\gamma)^2$. Für eine Geschwindigkeit von $10\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ist also $K \sim 1{,}2$ kg.

Die ganze Betrachtung gilt auch für die Relativbewegung von Seil und

Cylinder, wie sie Fig. 400 (a. v. S.) darstellt. Hier dreht sich eine Rolle C im Sinne des Pfeiles, während die Reibung auf die Rolle dem Pfeile entgegen, auf das Seil dem Pfeilsinn entsprechend wirkt.

Fig. 401.





Wenn in Fig. 398 die an dem Körper C haftende Reibung diesen bei mangelhafter Befestigung im Sinne der Seilbewegung verrückt, so verrückt in Fig. 400 die an dem Seile haftende Reibung dieses bei mangelhafter Befestigung im Sinne der Rollenbewegung.

In beiden Fällen würde die Gleichung $P = Q$ nur einem völlig reibungslosen Zustande ($f = 0$) entsprechen.

Beim Einlegen eines Seiles in eine Keilnute wird die Reibung vergrößert (vergl. Fig. 401).

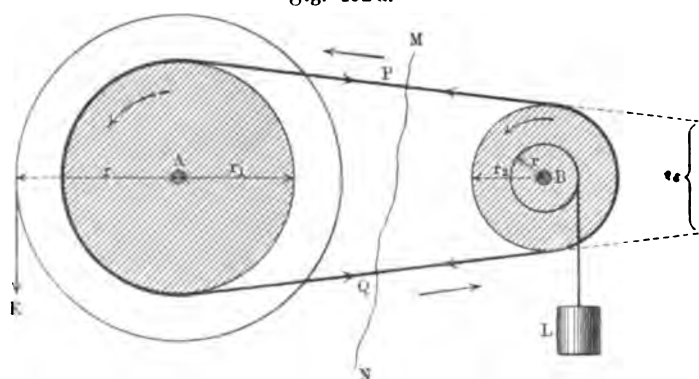
Für relative Ruhe beider Körper zerlegt sich N in zwei Komponenten $N' = \frac{N}{2 \sin \delta}$, von denen jede auf eine Seitenfläche drückt. Statt der Reibung fN an der Oberfläche müßte also an den Seitenflächen die Reibung $2 N' f = \frac{f}{\sin \delta} \cdot N$ auftreten, doch ist diese erfahrungsmäßig bei der relativen Bewegung von Seil und Körper etwas kleiner, z. B. für $2 \delta = 60^0$, nicht ganz das Doppelte von $f \,.\, N$.

Je kleiner δ ist, um so mehr verstärkt sich die Reibung, doch ist es zweckmäßig, $\delta > \varphi$ zu halten für $f = tg\, \varphi$, damit kein Klemmen des Seiles stattfindet.

Für $f = 0{,}3$ ist z. B. $2 \delta = 60^0$ günstig.

Endlich ist noch, auch im Hinblick auf die Verwendung des Principes der virtuellen Verrückungen, ein Fall hervorzuheben, in welchem die Elemente

Fig. 402 a.



vom Seil und Cylinder, welche sich berühren, stets in relativer Ruhe sind. Bei großer Entfernung von Wellen, die in Verbindung gebracht werden sollen, verwendet man sogenannte Riemscheiben, wie sie in Fig. 402 a dargestellt sind. Die Scheibe von A überträgt ihre Bewegung durch einen Riemen an B, wo

irgend eine Arbeit zu leisten ist, die wir uns wieder, einschließlich der Bewegung von B, durch ein am Radius r' aufzuwindendes Gewicht L vorstellen wollen. Hier soll der Riemen nicht auf den Scheiben gleiten, es soll wegen der Übertragung der Bewegung Element an Element durch Reibung haften, so daß die Umfangsgeschwindigkeiten von A und B dieselben sind. Man hat daher für die Seilspannungen P und Q

$$P > Q \quad \text{und} \quad P < Q \cdot e^{f \cdot \operatorname{arc} \alpha}$$

und also auch

$$P - Q < Q(e^{f \cdot \operatorname{arc} \alpha} - 1).$$

Bezeichnen wir den Unterschied der linken und rechten Seite obiger Ungleichung durch die positive Größe η, so gilt auch

$$P - Q + \eta = Q(e^{f \cdot \operatorname{arc} \alpha} - 1).$$

Dabei bezeichnet α, falls die Umspannungen von A und B verschieden sind, den kleineren Winkel, damit die Beziehung $P < Q \cdot e^{f \cdot \operatorname{arc} \alpha}$ für beide Riemscheiben die Sicherheit gegen Gleiten verbürgt. Setzt man $P - Q = D$, so ist

$$Q = \frac{D}{e^{f \cdot \operatorname{arc} \alpha} - 1} + \eta' \quad \text{und} \quad P = \frac{D \cdot e^{f \cdot \operatorname{arc} \alpha}}{e^{f \cdot \operatorname{arc} \alpha} - 1} + \eta',$$

wobei $\eta'(e^{f \cdot \operatorname{arc} \alpha} - 1) = \eta$ ist, so daß auch η' eine Korrektur bedeutet. Über die Werte η und η', welche die Sicherheit gegen Gleiten bedingen, kann nur von Fall zu Fall durch Erfahrung entschieden werden.

Den Wert von D bestimmt man entweder aus dem Kraftmoment der treibenden Scheibe A oder aus dem Lastmoment der getriebenen Scheibe B, wobei der Schnitt MN in Fig. 402a benutzt werden kann.

Für A hat man bei Vernachlässigung aller Widerstände

$$Kr = Pr_1 - Qr_1 = Dr_1, \quad \text{d. h.} \quad D = K\frac{r}{r_1}.$$

Für B hat man bei Vernachlässigung aller Widerstände

$$Pr_2 - Qr_2 = Dr_2 = Lr', \quad \text{d. h.} \quad D = L\frac{r'}{r_2}.$$

Demgemäß wäre in Geltung $K : L = \frac{r_1}{r_2} : \frac{r}{r'}$.

Von Widerständen ist neben der (im nächsten Paragraphen zu behandelnden) Riemensteifigkeit die Reibung an den Zapfen in A und B zu berücksichtigen.

Haben die beiden Zapfen die Halbmesser ϱ_1 und ϱ_2, so sind die Reibungsmomente für die Zapfendrucke Z_1 und Z_2 anzusetzen als

$$f_z \varrho_1 Z_1 \quad \text{und} \quad f_z \varrho_2 Z_2.$$

Für gleiche Scheiben ist $Z_1 = Z_2 = P + Q$ zu setzen, und dies gilt in Annäherung auch für ungleiche Scheiben. Man hat nun

$$Kr = P(r_1 + f_z\varrho_1) - Q(r_1 - f_z\varrho_1)$$
$$Lr' = P(r_2 - f_z\varrho_2) - Q(r_2 + f_z\varrho_2).$$

Für den Grenzzustand des Gleitens ist

$$P = Q \cdot e^{f \cdot arc\,\alpha},$$

so daß hier gilt

$$\frac{Kr}{Lr'} = \frac{e^{f \cdot arc\,\alpha}(r_1 + f_z \varrho_1) - (r_1 - f_z \varrho_1)}{e^{f \cdot arc\,\alpha}(r_2 - f_z \varrho_2) - (r_2 + f_z \varrho_2)}$$

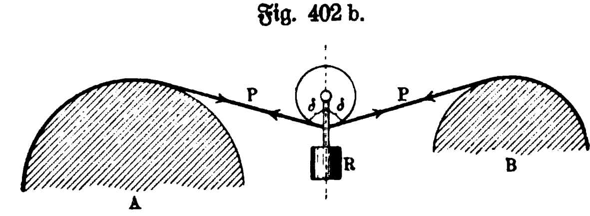
$$\sim 1 + \frac{e^{f \cdot arc\,\alpha} + 1}{e^{f \cdot arc\,\alpha} - 1}\left(\frac{\varrho_1}{r_1} + \frac{\varrho_2}{r_2}\right) \cdot f_z.$$

Ebenso läßt sich P und Q für die Grenzen des Gleitens aus Kr oder Lr' berechnen.

Der Einfluß der Zapfenreibung ist hier verhältnismäßig sehr gering und kann im Hinblick auf die an und für sich vorhandenen Unsicherheiten in der Bestimmung von P und Q vernachlässigt werden.

Spannt man den Riemen durch eine sogenannte Spannrolle (vergl. Fig. 402 b), so ist einerseits gemäß der Theorie der losen Rolle $P = \frac{R}{2 \cos \delta}$, während anderseits die Umspannung von α auf α' anwächst.

Fig. 402 b.



Bei großen Geschwindigkeiten muß die Korrektur K eingeführt werden (vergl. S. 557).

Entsprechende Betrachtungen gelten für die Fäden und Seile der Rollen und Rollenzüge u. s. w., z. B. auch für die Beziehungen, welche S. 350 u. f. dargestellt wurden.

Für Lederriemen auf Eisenscheiben ist im Mittel $f = 0{,}28$, so daß für Scheiben von gleichem Halbmesser ($\alpha = 180^0$, $arc\,\alpha = \pi$)

$$e^{f \cdot arc\,\alpha} = 2{,}4$$

zu setzen ist.

93. Seilsteifigkeit. Bei der Verwendung von Seilen ist auch noch deren innere Reibung von Bedeutung, d. h. die gegenseitige Reibung der Fasern, welche bei jeder Formänderung des Seiles auftritt.

Diese Formänderung besteht im allgemeinen darin, daß die Mittellinie des Seiles zunächst (beim Auflaufen) allmählich aus einer Geraden in einen Kreis übergeht, welcher dem Halbmesser des Cylinders oder der Rolle entspricht, an welchem das Seil wirken soll, und daß dann (beim Ablaufen) das Umgekehrte eintritt.

Wäre das Seil vollkommen biegsam, so würden solche Formänderungen keine weitere Beachtung fordern. Da ein Seil aber bis zu einem gewissen Grade elastisch ist, d. h. Formänderungen durch innere Kräfte, welche bei diesen aufgetreten sind, wieder auszugleichen sucht, und da ferner die gegenseitige Reibung der Seilfasern in Frage kommt, so ist bei der Biegung aus zweifachem Grunde ein gewisser Widerstand zu berücksichtigen, den man als Seilsteifigkeit bezeichnet.

Unterscheidet man, den beiden Ursachen gemäß, die Elasticitätssteifigkeit und die Reibungssteifigkeit, so ist letztere in theoretischer Hinsicht stets zu berücksichtigen, erstere nur, wenn das Seil nicht zugleich auf- und abgewickelt wird. Die Reibungssteifigkeit wird auch als Widerstand plastischer Art bezeichnet, weil ihr ein Verharren des Seiles in der einmal angenommenen Form entspricht, wie es plastische Massen, z. B. Formerthon oder Brotteig, zeigen. Infolge dieses Widerstandes behält das Seil, gegenüber dem als vollkommen biegsam vorgestellten Seile, beim Auflaufen eine geringere Krümmung bei, beim Ablaufen eine größere. Dadurch wird der Hebelarm der am Seile wirksamen Kräfte an der Auflaufstelle vergrößert, an der Ablaufstelle verkleinert. Die Elasticitätssteifigkeit wirkt an beiden Stellen in demselben Sinne, ihr entspricht stets eine Vergrößerung des Hebelarmes.

Während die für die Biegung aufgewandte Arbeit bei einem vollkommen elastischen Seile bei der Streckung ganz und gar wiedergewonnen würde, geht infolge der Reibungssteifigkeit die für die Biegung aufgewendete Arbeit ganz oder zum Teil als solche verloren, so daß für die Streckung wieder Arbeit aufgewendet werden muß, falls diese der Biegung genau entsprechen soll.

Infolge dieser Verhältnisse spreizt sich das Seil jedenfalls an der Auflaufstelle ab, so daß hier stets ein größerer Hebelarm anzusetzen ist, als wenn das Seil vollkommen biegsam wäre. An der Ablaufstelle, wo sich Elasticitätssteifigkeit und Reibungssteifigkeit entgegenwirken, kann eine Vergrößerung oder Verkleinerung des theoretischen Hebelarmes eintreten, es können sich auch beide Einwirkungen gelegentlich gerade ausgleichen.

Man bestimmt nun durch Versuche entweder die, der Seilsteifigkeit entsprechende Vergrößerung oder Verkleinerung des Hebelarmes oder die entsprechende Veränderung im Verhältnisse von Kraft und Last.

Sind für einen Cylinder (Rolle u. s. w.) vom Halbmesser r die Veränderungen des Hebelarmes beim Auflaufen und beim Ablaufen bezw. a_1 und a_2, und die entsprechenden Kräfte bezw. P_1 und P_2, so tritt statt der Gleichung

$$P_2 \,.\, r = P_1 r$$

im allgemeinen ein die Gleichung

$$P_2 (r - a_2) = P_1 (r + a_1).$$

Für $a_1 = a_2 = a$ hat man

$$P_2 = P_1 \frac{r + a}{r - a} \sim P_1 \left(1 + \frac{2a}{r}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 165)$$

Ist der Durchmesser δ des Seiles in Centimetern gegeben, so ist für Hanfseile $a = 0{,}03\,\delta^2$ bis $0{,}09\,\delta^2$ zu setzen.

Für Drahtseile sind zur Zeit noch keine maßgebenden Versuche bekannt; für mittlere Verhältnisse ist $P_2 = 1{,}04\,P_1$ zu setzen.

Bei Hanfseilen ist oft $a_2 \sim 0$, so daß dann gilt

$$P_2 = P_1 \left(1 + \frac{a_1}{r}\right).$$

Diese Formel gilt genau, wenn nur ein Aufwickeln stattfindet, soweit die Reibungssteifigkeit in Frage kommt, doch ist dann bei Drahtseilen auch die Arbeit für die Krümmung zu berücksichtigen.

Diese Betrachtungen gelten auch angenähert weiter, wenn statt der Seile **Ketten** benutzt werden; hier liegt der Widerstand in der gegenseitigen Reibung der Kettenglieder bezw. bei den Gelenkketten in der Reibung der Gelenkbolzen und ihrer Umfassung.

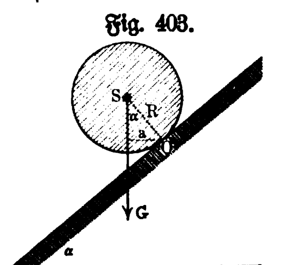
Bezeichnet man die Stärke des Ketteneisens bezw. den Durchmesser des Gelenkbolzens mit δ, so ist $a = \frac{1}{2} f \delta$ zu setzen, wobei $f = 0{,}2$ bis $0{,}3$ der Koefficient für die gegenseitige Reibung der Kettenglieder ist.

Die **Seilsteifigkeit** kann meist vernachlässigt werden, doch ist sie bei **Seilrollen** und bei **Kettenrollen** von Bedeutung.

Bei genaueren Betrachtungen ist auch noch die Dehnung der Seile, Riemen und Ketten und deren Gewicht zu berücksichtigen. Der Arbeitsverlust der Dehnung ist im Verhältnis zur Nutzarbeit bestimmt durch $\frac{P_2 - P_1}{F} \cdot \frac{1}{E}$, wenn F den Querschnitt des Riemens u. s. w. und E den Elasticitätsmodul bezeichnet.

94. Das Reibungsmoment bei Rollbewegungen. Wenn ein Körper auf einem anderen rollt (Abwickelung der Oberfläche), so treten Reibungen besonderer Art auf, welche darauf zurückzuführen sind, daß die Berührung beider Körper thatsächlich nicht in einzelnen Punkten oder Linien erfolgt, sondern in Flächen, welche den Formänderungen des rollenden Körpers und der Unterlage entsprechen.

Fig. 403.



Daß dem so ist, zeigt schon die Betrachtung der in der Fig. 403 dargestellten Rollbewegung eines Cylinders auf einer schiefen Ebene. Wären beide Körper starr, so könnte niemals Ruhe eintreten, da stets $[G]$ am Arme a um die durch O bezeichnete Kippachse dreht, ohne daß irgend ein Widerstand von O die entsprechende Bewegung verhindern könnte. Da nun die Erfahrung lehrt, daß für α innerhalb gewisser Grenzen $0 \ldots \bar{\alpha}$ thatsächlich Ruhe vorhanden ist, so muß infolge Formänderung der Körper ein Moment Mo auftreten, welches mit dem Momente $G \cdot a = G R \sin \alpha$ im Gleichgewichte steht, solange α die Grenze $\bar{\alpha}$ nicht überschreitet. Wir nennen dieses Moment für $\alpha = \bar{\alpha}$ das **Reibungsmoment** der (betrachteten) **Rollbewegung** (in Bezug auf O).

Um die Vergleichung mit der Reibung der gleitenden Bewegung durchführen zu können, ist es zweckmäßig,

$$Mo = G R \sin \bar{\alpha}$$

durch Einführung des Normaldruckes $N = G \cos \bar{\alpha}$ umzuformen, man erhält dann

$$Mo = N R \operatorname{tg} \bar{\alpha}.$$

Bestimmt man nun durch Versuche für Cylinder aus demselben Material für eine bestimmte Unterlage den Winkel $\bar{\alpha}$, bei welchem das Rollen gerade

beginnt, so findet man, daß α von dem Radius R des benutzten Cylinders abhängig ist. Für mittlere Größen von R deuten die Versuche auf eine Konstanz des Produktes $R \cdot tg\,\overline{\alpha}$ hin für ein bestimmtes Cylindermaterial und ein bestimmtes Material der Unterlage.

Man führt infolgedessen $f_r = R \cdot tg\,\overline{\alpha}$ als Hebelarm für das Reibungsmoment der rollenden Reibung ein und nennt diese Größe auch wohl kurz den Reibungskoefficienten der rollenden Reibung, worauf die Marke r an f_r hindeuten soll. Natürlich hängt der Zahlenwert von f_r ab von der Einheit, in der man R mißt, es ist üblich, dafür Centimeter zu nehmen.

Für Walzen aus Eisen (Stahl) auf eiserner (stählerner) Unterlage und ebenso für Walzen und Unterlagen aus sehr hartem Holze findet man $f_r = 0{,}05$ cm, d. h. für Walzen vom Radius 1 cm ist $tg\,\overline{\alpha} = 0{,}05$; für Walzen vom Radius 10 cm wäre $tg\,\overline{\alpha} = 0{,}005$, für Walzen vom Radius 100 cm wäre ferner $tg\,\overline{\alpha} = 0{,}0005$ u. s. w.

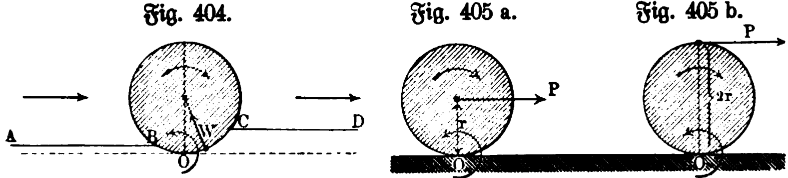
Die Versuche zeigen ferner, daß die Formel

$$Mo = N \cdot f_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 166)$$

auch noch für Rollbewegungen auf ebener Bahn das zu überwindende Reibungsmoment der Rollbewegung (in Bezug auf O) darstellt, falls die Bewegung gleichförmig sein soll. Hier sind natürlich für diese Überwindung besondere Kräfte nötig.

Über die Art der Formänderung, welche zu einer theoretischen Begründung der Formel $Mo = N \cdot f_r$ führen könnte, sind vielfach Annahmen gemacht, man ist aber dabei bisher zu keinem befriedigenden Ergebnisse gelangt. Nur soviel scheint festzustehen, daß der Cylinder das Material hinter sich niederwalzt, wie es Fig. 404 in starker Verzerrung darstellt, und daß infolgedessen, da AB dabei mehr oder minder einer dauernden Formänderung

Fig. 404. Fig. 405 a. Fig. 405 b.



unterliegt, der Angriffspunkt des Widerstandes, welchen die BC entsprechende Fläche ausübt, gegen die Vertikale von O nach C zu verschoben erscheint.

Wie unsicher auf diesem Gebiete selbst die Beurteilung der Versuche noch ist, zeigt z. B. der Umstand, daß Reuleaux[1]) nach dem Vorgange von Poirée und Sauvage unter Verwendung einer Konstante k

$$Mo = k \cdot N \cdot \sqrt{R}$$

setzt, während die oben gegebene Formel

$$Mo = tg\,\overline{\alpha} \cdot N \cdot R$$

lautet.

Jedenfalls hat sich die Formel $Mo = N \cdot f_r$ für die Darstellung der Verhältnisse, welche in der Technik vorkommen, bewährt. Daß sie für sehr

[1]) Vergl. Weisbachs Ingenieur, 1896, S. 424.

dünne Walzen, wie z. B. Nadeln, schon wegen der Adhäsionserscheinungen 2c. nicht mehr gilt, ist selbstverständlich.

Die Anwendung der Formel mag gemäß Fig. 405 a und b (a. v. S.) gezeigt werden. Soll P in Fig. 405 a ein gleichförmiges Rollen hervorbringen, so muß für den Drehpunkt O gelten $P.r = N.f_r$, soll P in Fig. 405 b diesem Zwecke dienen, so muß für den Drehpunkt O gelten $P.2r = N.f_r$.

Um f_r für die Bewegung auf einer wagerechten Ebene zu bestimmen, legt man den Cylinder vom Radius r, dessen Gewicht G heißen mag, auf zwei parallele wagerechte Schienen und zwar so, daß die Achse des Cylinders zu deren Richtung senkrecht ist. Schlingt man nun senkrecht zur Achse des Cylinders um dessen Mitte einen Faden mehreremale um den Cylinder und belastet das eine Ende des Fadens mit $P + Q$, das andere Ende mit Q, so ist $P + 2Q + G$ der Normaldruck, während das Übergewicht P am Arme r wirkt. Man hat also hier:

$$(P + 2Q + G)f_r = Pr,$$

d. h.

$$f_r = \frac{P}{P + 2Q + G} \cdot r.$$

Für Eisen auf Eisen liefert z. B. bei $G = 20$ kg, $Q = 5$ kg, $r = 0{,}366$ m der Versuch $P = 0{,}041$ kg, so daß $f_r = 0{,}05$ cm ist.

Ein Cylinder kann auf einer Ebene auch gleiten, so daß Verbindungen rollender und gleitender Bewegungen eintreten.

Im vorstehenden handelt es sich nur um das gleichförmige Rollen, bei dem ein gleichzeitiges Gleiten ausgeschlossen ist. Bedingung dabei ist, daß jedes Fortschreiten der Achse der Walze um $2r\pi$ auch wirklich einer vollen Umdrehung (T) entspricht und daß diese beiden Bewegungen gleichförmig sind. Bezeichnet man die Geschwindigkeit der Verschiebung mit c und die Winkelgeschwindigkeit der Drehung mit γ, so ist hier

$$c = \frac{2r\pi}{T} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{2\pi}{T},$$

d. h. man hat

$$c = r\gamma$$

als phoronomische Bedingung des gleichförmigen Rollens.

Die entsprechenden dynamischen Bedingungen werden später in der Kinetik betrachtet werden.

95. **Der Wirkungsgrad (Güteverhältnis).** Wenn irgend eine Aufgabe auf die einfachen Beziehungen von Kraft (P) und Last (Q) zurückgeführt werden kann, wie es z. B. bei der schiefen Ebene der Fall ist, so pflegt man die Behandlung der entsprechenden maschinellen Einrichtung (Getriebe) bei Berücksichtigung der Reibung zu vergleichen mit der Behandlung bei Vernachlässigung der Reibung.

Bei der aufwärts gerichteten Bewegung auf der schiefen Ebene vermindert die Reibung die Wirkung der Kraft P, sie tritt als Widerstand auf,

bei der abwärts gerichteten Bewegung auf der schiefen Ebene vermehrt die Reibung die Wirkung der Kraft P, sie tritt als fördernde Kraft auf.

Leistet $[P]$ die Arbeit Pp, während von $[Q]$ die Arbeit Qq vollzogen wird, so ist, falls die Reibung als Widerstand wirkt,

$$Pp = Qq + \mathfrak{A}_{\mathfrak{R}},$$

wobei $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$ die Arbeit der Reibung bezeichnet.

Man nennt in diesem Falle (Reibung als Widerstand)

$$\eta = \frac{Qq}{Pp} = \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{Gesamtarbeit}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 167)$$

den Wirkungsgrad (Güteverhältnis) des betreffenden Getriebes.

Bezeichnet man für ein gegebenes Q durch P_0 die Kraft, welche bei Vernachlässigung der Reibung für das Gleichgewicht erforderlich wäre, so hätte man

$$P_0 p = Qq \quad \text{und} \quad (P - P_0)p = \mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}.$$

Demnach gilt auch

$$\eta = \frac{Qq}{Pp} = \frac{P_0 p}{Pp} = \frac{P_0}{P} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 168)$$

Bezeichnet man für ein gegebenes P durch Q_0 die Last, welche bei Vernachlässigung der Reibung für das Gleichgewicht erforderlich wäre, so hätte man

$$Pp = Q_0 q \quad \text{und} \quad (Q_0 - Q)q = \mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}.$$

Demnach gilt auch

$$\eta = \frac{Qq}{Pp} = \frac{Qq}{Q_0 q} = \frac{Q}{Q_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 169)$$

Das Verhältnis von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$ und Qq bezeichnet man als „verhältnismäßigen Arbeitsverlust“ $\mathfrak{B}$, so daß

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}}{Qq} = \frac{Pp - Qq}{Qq} = \frac{Pp}{Qq} - 1 = \frac{1}{\eta} - 1$$

und

$$\eta = \frac{1}{1 + \mathfrak{B}}$$

gilt.

Geht das Getriebe rückwärts, so daß die Reibung in Bezug auf die bisher betrachtete Kraft $[P]$ fördernd wirkt, so gelten für η dieselben Bestimmungen, falls man jetzt $[P]$ als Last und $[Q]$ als Kraft auffaßt.

Ist η für den Rückwärtsgang negativ (oder Null), so heißt das Getriebe selbsthemmend oder selbstsperrend, weil dann die Rückwärtsbewegung nicht von selbst eintreten kann, sondern noch eine Kraft erfordert, welche der bisher betrachteten $[P]$ entgegenwirkt.

Kann man ein Getriebe in einzelne Getriebe zerlegen, für welche der Wirkungsgrad bezw. $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ ist, so gilt für das ganze Getriebe

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \ldots \eta_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad 170$$

Als Beispiel für diese Erklärungen betrachten wir die schiefe Ebene für eine Last $[Q]$, welche durch $[P]$ parallel zur Ebene bewegt werden soll. Für die Bewegung aufwärts (vergl. S. 541) ist

$$P = \frac{Q \sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} \quad \text{und} \quad P_0 = Q \sin \alpha,$$

also

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{1}{1 + \cot \alpha \, . \, tg \, \varphi}.$$

Für die Bewegung abwärts (vergl. S. 541) ist

$$P = \frac{Q \sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \quad \text{und} \quad P_0 = Q \sin \alpha,$$

also für $[P]$ als Last und $[Q]$ als Kraft

$$\eta' = \frac{P}{P_0} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha \cos \varphi} = 1 - \cot \alpha \, . \, tg \, \varphi.$$

Das Getriebe ist selbsthemmend für $\eta' \leqq 0$, d. h. für $\alpha \leqq \varphi$. Ist der Winkel α der schiefen Ebene kleiner als der Reibungswinkel φ, so muß die nach oben wirkende Kraft $[P]$ nicht nur verschwinden, sondern sogar durch eine, nach unten wirkende Kraft von entgegengesetzter Richtung ersetzt werden, falls Rückwärtsbewegung eintreten soll.

Ebenso stellt der Vorgang des Nageleinschlagens ein selbsthemmendes Getriebe dar, da eine dem Einschlagen entgegengesetzte Kraft zum Ausziehen des Nagels verwendet werden muß.

Anwendungen der Lehre von den Reibungen.

1. Reibungshülsen und Reibungsringe. Soll an einer Säule AB eine Last Q durch Reibung befestigt werden, so schiebt man über die Säule eine Reibungshülse $C_1 D C_2$, welche aus zwei miteinander verbundenen Ringen C_1 und C_2 und einem Hebelarm D besteht.

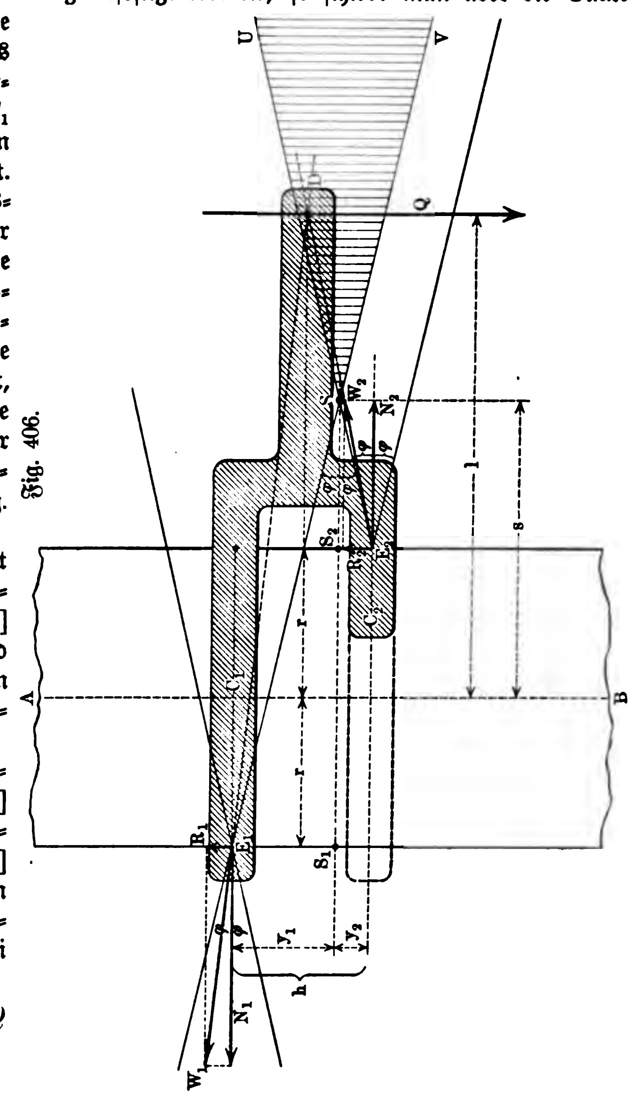


Fig. 406.

Die Berührungspunkte E_1 und E_2 der beiden Ringe, welche nur soweit voll ausgeführt zu sein brauchen, als es diese Berührung erfordert, liegen mit der Achse des Hebels D in einer Vertikalebene der Säulenachse (vergl. Fig. 406).

Bei Gleichgewicht müssen die Widerstände $[W_1]$ und $[W_2]$ von E_1 und E_2 und $[Q]$ dem Satze von den drei Kräften entsprechen.

Da die Widerstände $[W_1]$ und $[W_2]$ aus den Normalreaktionen $[N_1]$ und $[N_2]$ und den Reibungen $[R_1]$ und $[R_2]$ erwachsen, so gilt bei Gleichgewicht

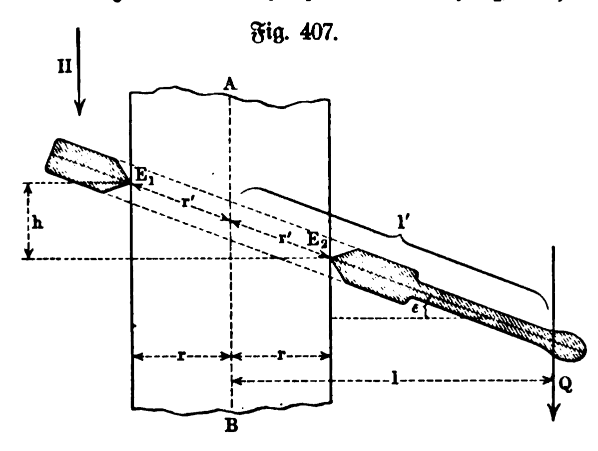
1) $R_1 + R_2 = Q$ in der Vertikalen,

2) $N_1 = N_2$ in der Horizontalen,

3) $+ Q(l - r) + R_1 2r - N_1 h = 0$ für E_2 als Drehpunkt.

Dabei haben R_1 und R_2 je nach der Entwickelung der Reibung bezw. die Grenzwerte 0 und fN_1 und 0 und fN_2, während die Gesamtwiderstände $[W_1]$ und $[W_2]$ jedenfalls innerhalb der Reibungskegel von E_1 und E_2 liegen.

Fig. 407.



In Fig. 406 ist D als Schnittpunkt von W_1, W_2 und Q angenommen.

Das gemeinsame Gebiet beider Reibungskegel ist durch USV bezeichnet, und demnach muß der Arm l für Q so gewählt werden, daß Q innerhalb dieses Gebietes liegt.

Hat S den Abstand s von der Säulenachse, so ist

$$E_2 S_2 = S_2 S \cdot tg\,\varphi \quad \text{oder} \quad y_2 = (s - r)\,tg\,\varphi$$

und

$$E_1 S_1 = S_1 S \cdot tg\,\varphi \quad \text{oder} \quad y_1 = (s + r)\,tg\,\varphi,$$

d. h. man hat

$$h = y_1 + y_2 = 2s\,tg\,\varphi \quad \text{und} \quad s = \tfrac{1}{2} h \cot\varphi = \frac{h}{2f}.$$

Die Bedingung des Gleichgewichtes ist also hier

$$l \geqq \frac{h}{2f},$$

wobei zu bemerken ist, daß diese Bedingung von Q und r unabhängig ist.

Bei voller Entwickelung der Reibung ist $R_1 = fN_1$ und $R_2 = fN_2$, so daß dann also gilt

$$N_1 = N_2 = \frac{Q}{2f} \quad \text{und} \quad R_1 = R_2 = \frac{Q}{2}.$$

In diesem Falle liefert Gleichung 3)

$$l - \frac{h}{2f} = 0,$$

d. h. für gegebene Werte von r und h muß $l = \frac{h}{2f}$ sein. Führt man $tg\,\varepsilon = \frac{h}{2r}$ ein, so ist $tg\,\varepsilon = \frac{l}{r} \cdot f$.

Dieselben Beziehungen gelten auch für den einfachen Reibungsring (Salabinsche Einklinkung), gemäß Fig. 407.

Bei voller Entwickelung der Reibung ist hier, da $\frac{l'}{r'} = \frac{l}{r}$ ist,

$$tg\,\varepsilon = \frac{l'}{r'} \cdot f = \frac{h}{2\,r}.$$

Man hat also z. B. für gegebene Werte von r und r', aus denen der Wert von h folgt, $l' = \frac{h}{2f} \cdot \frac{r'}{r}$.

2. **Keile.** Bei einem symmetrischen Keile, wie er z. B. zum Spalten von Holzblöcken benutzt wird, tritt Gleichgewicht ein, wenn die Kraft P, welche auf den Rücken AB des Keiles wirkt, die Widerstände des Körpers K, mit dem der Keil in Berührung ist, aufhebt.

Fig. 408 a. Fig. 408 b.

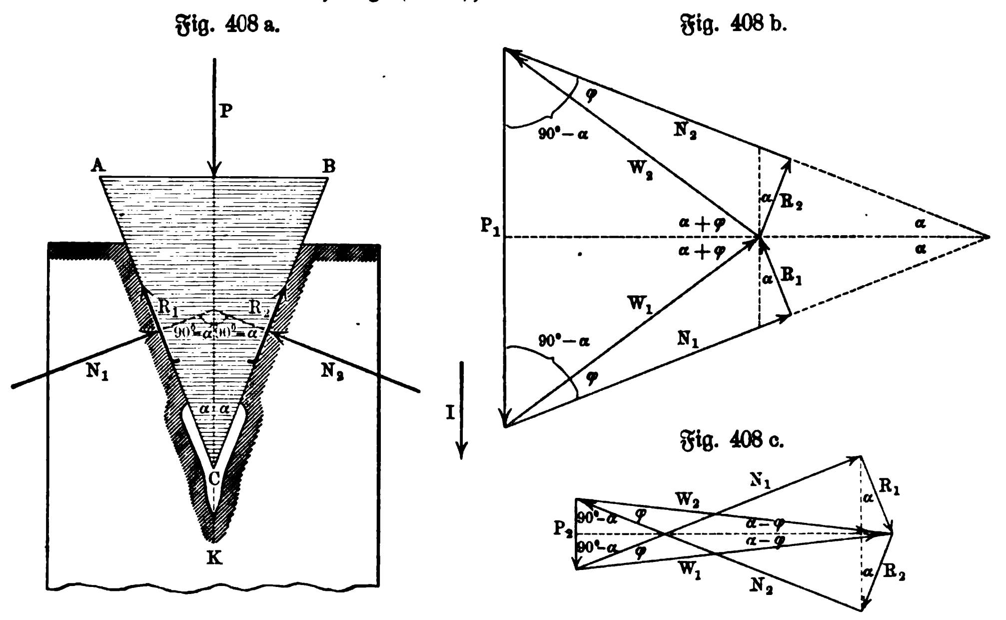


Fig. 408 c.

In Fig. 408 a sind die Reibungen $[R_1]$ und $[R_2]$ so eingezeichnet, wie sie einer Bewegung des Keiles im Sinne von Pfeil I entsprechen. Ist in diesem Falle $N_1 = N_2 = N$ und auch $R_1 = R_2 = R = fN$, so stellt Fig. 408 b die entsprechenden Beziehungen dar für das Gleichgewicht der Kräfte. Gemäß diesen ist

$$P_1 = 2\,N\cos(90^0 - \alpha) + 2\,f\,N\cos\alpha.$$

Für $f = tg\,\varphi$ hat man also

$$P_1 = \frac{2\,N\sin(\alpha + \varphi)}{\cos\varphi},$$

d. h.

$$N = \frac{P_1\cos\varphi}{2\sin(\alpha + \varphi)} \quad \text{und} \quad R = fN = \frac{P_1\sin\varphi}{2\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Für die Gesamtwiderstände vom Werte W gilt noch

$$P_1 = 2\,W \,.\, sin(\alpha + \varphi),$$

d. h.

$$W = \frac{P_1}{2\,sin(\alpha + \varphi)}.$$

Für die Bewegung des Keiles, welche dem Gegensinne von Pfeil I entspricht, sind die Pfeile von $[R_1]$ und $[R_2]$ in Fig. 408 a umzukehren. Unter den oben angegebenen Bedingungen gilt dann, gemäß Fig. 408 c (a. v. S.)

$$P_2 = \frac{2\,N \,.\, sin(\alpha - \varphi)}{cos\,\varphi} \quad \text{und} \quad N = \frac{P_2\,cos\,\varphi}{2\,sin(\alpha - \varphi)}$$

und

$$R = fN = \frac{P_2\,sin\,\varphi}{2\,sin(\alpha - \varphi)} \quad \text{und} \quad W = \frac{P_2}{2\,sin(\alpha - \varphi)}.$$

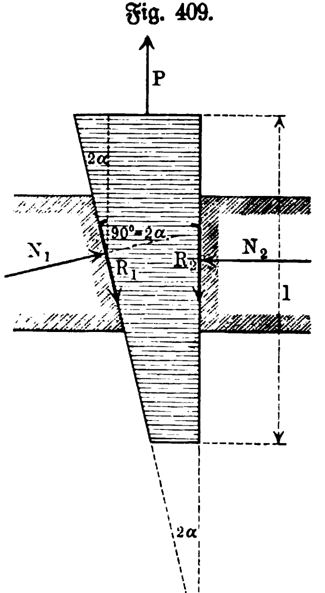
P_1 entspricht einer gleichförmigen Bewegung des Keils im Sinne von Pfeil I, P_2 entspricht einer gleichförmigen Bewegung des Keils im umgekehrten Sinne (II), so daß für die Ruhe des Keils eine Kraft P erforderlich ist, für welche

$$P_1 > P > P_2$$

gilt. Dabei darf φ als Reibungswinkel der Ruhe eingeführt werden.

Faßt man $[N_1]$ und $[N_2]$ als die Last auf, welche der Kraft P entspricht, so ist in dem Falle I der Wirkungsgrad $\eta = \frac{sin\,\alpha \,.\, cos\,\varphi}{sin(\alpha + \varphi)}$, während er im Falle II ist $\eta' = \frac{sin(\alpha - \varphi)}{sin\,\alpha \,.\, cos\,\varphi}$.

Fig. 409.



Für $\eta' \leqq 0$ tritt Selbsthemmung ein, d. h. die Bedingung ist $\alpha < \varphi$.

Wir betrachten den Fall II noch etwas genauer.

Für $\alpha = \varphi$ ist $P_2 = 0$, d. h. in diesem Falle bewegen die Widerstände allein den Keil gleichförmig nach oben, falls eine solche Bewegung einmal eingeleitet ist. Für $\alpha > \varphi$ ist für eine solche gleichförmige Bewegung der Gegendruck $[P_2]$ erforderlich; andernfalls springt der Keil in beschleunigter Bewegung aus dem Spalte heraus. Für $\alpha < \varphi$ wird P_2 negativ, d. h. es wirkt nach oben, so daß in diesem Falle eine gleichförmige Bewegung nur zu stande kommt, wenn eine Kraft vom Werte P_2 nach oben wirkt; andernfalls bleibt der Keil im Spalte sitzen.

Treibt man den Keil durch Schläge ein, so soll er im allgemeinen zwischen je zwei Schlägen von selbst sitzen bleiben, d. h. selbstsperrend sein; die Bedingung dafür ist $\alpha < \varphi$, d. h. der halbe Keilwinkel muß kleiner gehalten werden

als der Reibungswinkel. Dieselbe Bedingung gilt für Befestigungskeile. Soll der Keil zurückspringen, wie es bei gewissen Keilpressen der Fall ist, so muß $\alpha > \varphi$ sein.

Man unterscheidet die Keile in stumpfe und in spitze Keile, je nachdem $\alpha > \varphi$ oder $\alpha < \varphi$ ist; diese Unterscheidung hat nur Sinn in Bezug auf einen bestimmten Wert von f bezw. φ.

Befestigungskeile werden meist unsymmetrisch konstruiert, als Prismen mit einem (abgestumpften) rechtwinkeligen Dreiecke als Grundfläche, wie es Fig. 409 zeigt. Hier ist

1) $R_1 \cos 2\alpha + R_2 = P + N_1 \cos(90^0 - 2\alpha)$,
2) $N_1 \sin(90^0 - 2\alpha) + R_1 \sin 2\alpha = N_2$.

Für $R_1 = fN_1$ und $R_2 = fN_2$ folgt aus 2)

$$N_1 \cos(\varphi - 2\alpha) = N_2 \cos\varphi.$$

Des weiteren folgt aus 1)

$$P = N_2 [tg(\varphi - 2\alpha) + tg\,\varphi].$$

Für $\varphi = -(\varphi - 2\alpha)$, d. h. für $\varphi = \alpha$ hat man $P = 0$, so daß die Bedingung für ein positives P ist

$$\alpha < \varphi.$$

Führt man $tg\,2\alpha = \frac{m}{l}$ ein, so ist 2α durch das Verhältnis $m:l$ bestimmt. Für $m:l = 1:10$ ist $tg\,2\alpha = 0{,}1$ und $2\alpha = 5^0 42' 38''$, für $m:l = 1:20$ ist $tg\,2\alpha = 0{,}05$ und $2\alpha = 2^0 51' 45''$. Für $f = 0{,}16$ bezw. $\varphi = 9^0 5' 25''$ ist P in diesen Fällen $0{,}22 N_2$ bezw. $0{,}27 N_2$, d. h. bei einem Drucke N_2 bedarf man der Kraft $0{,}22 N_2$ bezw. $0{,}27 N_2$ zum Herausziehen des Keiles.

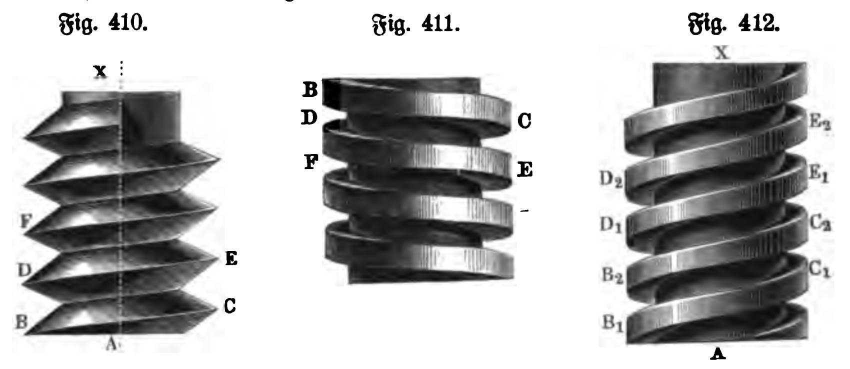
3. **Die Schrauben.** Wenn ein bestimmter Punkt einer ebenen Figur auf einer gemeinen Schraubenlinie (vergl. S. 119) so geführt wird, daß die Ebene der Figur stets durch die Achse des, zur Schraubenlinie gehörigen Cylinders geht und daß sich die Figur selbst in der damit bestimmten (sich drehenden) Ebene nur verschiebt, so entsteht ein Schraubengewinde, welches im Verein mit dem Cylinder (Kern) eine Schraubenspindel genannt wird. Der zugehörige Hohlkörper heißt Schraubenmutter. Als erzeugende Figuren werden in der Technik hauptsächlich Rechtecke (Quadrate) und gleichschenkelige Dreiecke benutzt, von denen stets eine Seite bezw. die Basis im Cylindermantel liegt; erstere geben die flachgängigen, letztere die scharfgängigen Schrauben. Außerdem sind auch noch Trapezgewinde und Rundgewinde im Gebrauche.

Steigt das Gewinde von links nach rechts auf, so heißt die Schraube rechtsgängig, anderenfalls linksgängig; zur Verwendung gelangen meist rechtsgängige Schrauben. Fig. 410 (a. f. S.) stellt eine scharfgängige Schraube dar, welche überdies rechtsgängig ist, Fig. 411 (a. f. S.) eine flachgängige Schraube, welche linksgängig ist. Bei verhältnismäßig großer Ganghöhe legt man mehrere Gewinde um denselben Kern, wobei n-fache Schrauben

entstehen; Fig. 412 stellt eine zweifache Schraube dar. Solche Schrauben werden nicht als Befestigungsschrauben verwandt, wohl aber bei bestimmten Getrieben.

Hat der Cylinder (Kern) der Spindel den Radius r_2, während der größte Achsenabstand von Punkten des Gewindes r_1 beträgt, so wird $r_1 - r_2$ die Tiefe des Gewindes genannt.

Fig. 410. Fig. 411. Fig. 412.



Bei der Schraubung beschreiben (vergl. S. 119 u. S. 120) alle Punkte P des beweglichen Körpers Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe (h), deren Neigungswinkel (α) von den Achsenabständen (r) der Punkte P abhängen und zwar ist $tg\,\alpha = \frac{h}{2\,r\pi}$.

Die Schraubenlinie, welche zu dem mittleren Radius $r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$ gehört, wird besonders hervorgehoben als „Mittlere Schraubenlinie"; ihre Neigung mag α_m heißen.

Solange man von der Reibung absieht, ist die Theorie der Schraube leicht zu geben. Soll eine an der vertikal gestellten Schraube hängende Last, welche einschließlich des Schraubengewichtes den Wert Q hat, durch ein Kraftmoment Mo bei feststehender Mutter gleichförmig emporgeschraubt werden, so folgt (vergl. S. 491) nach dem Principe der virtuellen Verrückungen

$$Qh = 2\pi \,.\, Mo.$$

Dieser Gleichung läßt sich noch eine besondere Deutung geben, wenn man sie auf eine bestimmte Schraubenlinie vom Radius r und der Neigung α bezieht. Setzt man $h = 2\,r\pi \,.\, tg\,\alpha$ und stellt man Mo durch eine Kraft P dar, welche am Arme r wirkt, so geht obige Gleichung über in

$$P = Q \,.\, tg\,\alpha.$$

Diese Gleichung entspricht einer schiefen Ebene von der Neigung α, auf welcher eine Last Q durch eine wagerechte Kraft P im Gleichgewichte gehalten wird. Es ist also erlaubt, sich bei der Schraube die wirkenden Kräfte in irgend einer Schraubenlinie vereinigt zu denken, und diese gemäß Fig. 413 in eine Ebene abzurollen, solange die Reibung nicht in Frage kommt ($K = P$ und $G = Q$).

Wäre diese Veranschaulichung auch bei Berücksichtigung der Reibung erlaubt, so ergäben sich dafür ohne weiteres für $f = tg\,\varphi$ die Gleichungen

$$P = Q \,.\, tg(\alpha \pm \varphi),$$

je nachdem die Last gleichförmig emporgezogen (+) oder gleichförmig abgelassen (—) werden soll.

Multipliziert man diese Gleichungen mit r, so entsteht

$$P \,.\, r = Mo = Q \,.\, r \,.\, tg(\alpha \pm \varphi).$$

Da in dieser Gleichung r und α nicht wieder durch h ersetzt werden können, wie in der Gleichung $P = Q \,.\, tg\,\alpha$ bezw. $Pr = Mo = Q \,.\, r \,.\, tg\,\alpha$, so muß jetzt eine bestimmte Schraubenlinie für die Veranschaulichung gewählt werden, falls diese überhaupt zulässig ist.

Für die flachgängige Schraube ist nun diese Veranschaulichung thatsächlich erlaubt, wie die folgende Betrachtung zeigt. Wegen der Gleichmäßigkeit der ganzen Konstruktion in Bezug auf die Achse ist es zunächst zulässig, sich die wirkenden Kräfte in irgend einer Schraubenlinie vereinigt zu denken. Denkt man diese auf der unteren Fläche der Spindel und zugleich auf der oberen Fläche der Mutter verzeichnet, weil in dieser Fläche bei senkrechter Stellung der Achse die Angriffspunkte von Normaldruck und Reibung liegen, so gilt für zwei sich berührende Elemente E_1 und E_2 von Spindel und Mutter die Darstellung der Fig. 414, falls es sich um eine aufwärts gerichtete Bewegung der Spindel gegen die feste Mutter handelt.

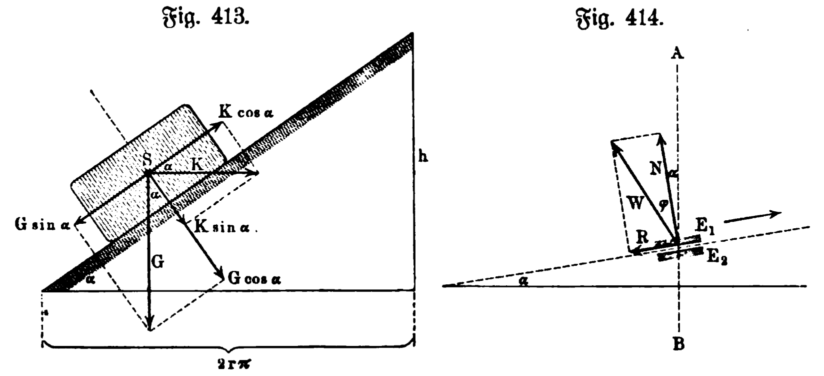


Fig. 413. Fig. 414.

Der Gesamtwiderstand W liefert eine Komponente vom Werte $W cos(\alpha + \varphi)$ in Richtung der vertikalen Achse BA und eine Komponente senkrecht dazu vom Werte $W sin(\alpha + \varphi)$. Da die Gesamtheit der vertikalen Komponenten das Gewicht Q aufhebt, so gilt für die Kraft in der Richtung der Schraubenachse

$$Q = \Sigma\, W cos(\alpha + \varphi) = cos(\alpha + \varphi)\, \Sigma W.$$

Da die Gesamtheit der horizontalen Komponenten die Momente liefert, welche mit Mo im Gleichgewichte stehen, so gilt ferner für die Drehung um die Schraubenachse

$$Mo = \Sigma r \,.\, W sin(\alpha + \varphi) = r \,.\, sin(\alpha + \varphi)\, \Sigma W.$$

Durch Division beider Gleichungen ergiebt sich

$$Mo = Q\,r\,tg(\alpha + \varphi).$$

Für die abwärts gerichtete Bewegung folgt ebenso

$$Mo = Q\,r\,tg(\alpha - \varphi).$$

Die Erfahrung lehrt, daß man sich die Widerstände auf der mittleren Schraubenlinie vereinigt denken darf, so daß in der entwickelten Formel $r = r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$ zu setzen ist.

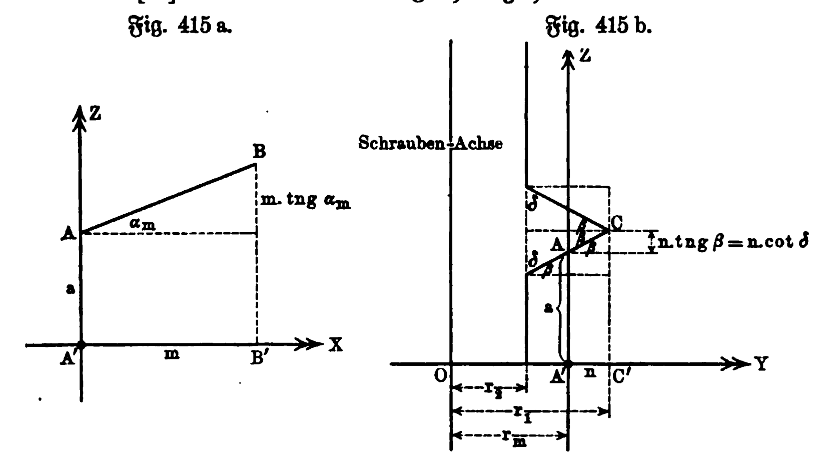
Man hat also für die flachgängige Schraube die Formel

$$Mo = Q\,r_m\,tg(\alpha_m \pm \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 171)$$

für $tg\,\varphi = f$.

Für die scharfgängige Schraube ist eine ähnliche Veranschaulichung zunächst nicht erlaubt, da hier wegen der schiefen Neigung der E_1 und E_2 entsprechenden Tangentialebene der Schraubenfläche gegen die Achse der Normaldruck $[N]$ aus der Ebene der Zeichnung heraustritt.

Fig. 415 a. Fig. 415 b.

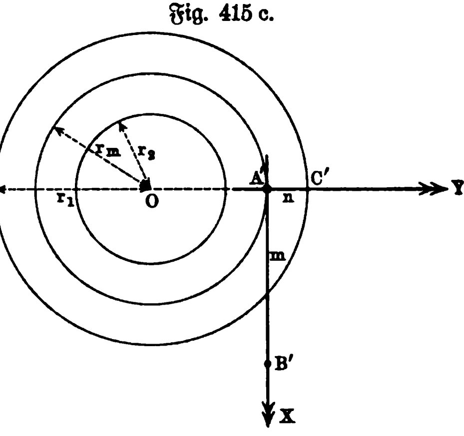


Um eine entsprechende Gleichung für die scharfgängige Schraube abzuleiten, denken wir wieder die Mutter mit vertikaler Achse befestigt, während die Spindel, die einschließlich ihres Gewichtes die Belastung Q tragen mag, hinaufgeschraubt werden soll. Außerdem nehmen wir erfahrungsgemäß an, daß sich die Widerstände auch hier in der mittleren Schraubenlinie $\left(r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}\right)$ vereinigt denken lassen.

In einem Punkte A der mittleren Schraubenlinie legen wir an diese eine Tangente AB, und außerdem durch A einen Achsenschnitt, der das Gewinde in der Geraden AC schneidet. Die Tangentialebene der Schraubenfläche in A geht dann durch die drei Punkte A, B, C. Nehmen wir die Projektion A' von A zum Anfangspunkte eines rechtwinkeligen Kreuzes und zwar die X-Achse als Tangente an dem Cylinder der mittleren Schraubenlinie im Sinne von deren Steigung, die Y-Achse senkrecht dazu nach außen

gerichtet, und die Z-Achse nach oben verlaufend, so stellen die Fig. 415 a, b, c die damit gewonnenen Beziehungen in den drei Achsenebenen dar. Die Normale der Schraubenfläche in A, welche in A auf der Ebene ABC senkrecht steht, soll in ihrer Richtung dem Normaldrucke entsprechen, welchen die Mutter auf die Spindel ausübt. Bildet diese Normale mit den Achsen die Winkel λ, μ, ν, so lassen sich die entsprechenden Cosinus durch eine stereometrische Betrachtung oder durch Verwendung sphärischer Trigonometrie leicht bestimmen. Statt dessen kann man auch folgendermaßen schließen. Da die Normale auf AB senkrecht steht und da AB mit den Achsen bezw. die Winkel α_m, 90^0, $90^0 - \alpha_m$ bildet, so gilt nach Formel 11

Fig. 415 c.



$$0 = \cos\lambda \,.\, \cos\alpha_m + \cos\nu \,.\, \sin\alpha_m \quad \text{oder} \quad \cos\lambda = - tg\,\alpha_m \,.\, \cos\nu.$$

Da die Normale auch auf AC senkrecht steht und da AC mit den Achsen bezw. die Winkel 90^0, β, $90^0 - \beta$ bildet, so gilt nach derselben Formel

$$0 = \cos\mu \,.\, \cos\beta + \cos\nu \,.\, \sin\beta \quad \text{oder} \quad \cos\mu = - tg\,\beta \,.\, \cos\nu.$$

Da endlich nach Formel 7 auch

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

ist, so ist

$$\cos^2\nu\,(tg^2\alpha_m + tg^2\beta + 1) = 1,$$

d. h. man hat für $W = \sqrt{tg^2\alpha_m + tg^2\beta + 1}$ die Beziehung $\cos\nu = \pm\frac{1}{W}$.

Da nach unseren Festsetzungen der Winkel zwischen der Normalen und der Z-Achse spitz ist, so gilt

$$\cos\nu = + \frac{1}{W}$$

und demnach

$$\cos\lambda = - \frac{tg\,\alpha_m}{W} \quad \text{und} \quad \cos\mu = - \frac{tg\,\beta}{W}.$$

Dieselben Beziehungen gewinnt man endlich auch, wenn man die Gleichung für die Ebene aufstellt, welche durch die drei Punkte $A = (0;\, 0;\, a)$, $B = (m;\, 0;\, a + m \,.\, tg\,\alpha_m)$, $C = (0;\, n;\, a + n\,tg\,\beta)$ geht. Man erhält zunächst als Gleichung

$$- tg\,\alpha_m \,.\, x - tg\,\beta \,.\, y + z - a = 0$$

und für deren Normalform, falls man wieder W einführt,

$$- \frac{tg\,\alpha_m}{W} \cdot x - \frac{tg\,\beta}{W} \cdot y + \frac{1}{W} \cdot z - \frac{a}{W} = 0.$$

Demnach sind $-\frac{tg\,\alpha_m}{W}, -\frac{tg\,\beta}{W}, +\frac{1}{W}$ die Cosinus der Winkel, welche die Normale aus A' auf diese Ebene mit den Achsen bildet. Da diese Ebene die betrachtete Tangentialebene ist und da die Normale aus A' in ihrer Richtung mit der vorher betrachteten Normalen übereinstimmt, so sind die gefundenen Größen wieder bezw. $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$.

Zerlegt man nun den Normaldruck $[N]$, welches von der Mutter auf die Spindel ausgeht, nach den Achsen, so haben dessen Komponenten folgende Werte

$$-\frac{tg\,\alpha_m}{W}\cdot N, \quad -\frac{tg\,\beta}{W}\cdot N, \quad +\frac{1}{W}\cdot N.$$

Die Reibung hat bei voller Entwickelung den Wert fN und fällt beim Aufwärtsschrauben der Spindel in die Richtung BA, so daß ihre Komponenten nach den Achsen sind

$$-\cos\alpha_m \,.\, fN, \quad 0, \quad -\sin\alpha_m \,.\, f \,.\, N.$$

Dehnt man die Betrachtung, welche hier für einen Punkt A der mittleren Schraubenlinie durchgeführt wurde, auf alle Punkte dieser Linie aus, wobei ΣN statt N und $f\Sigma N$ statt fN auftritt, so gilt für das Gleichgewicht der aufwärts gerichteten Bewegung, welche durch ein Moment Mo hervorgebracht wird:

a) für die Richtung der Schraubenachse

$$-Q+\frac{1}{W}\cdot\Sigma N-\sin\alpha_m \,.\, f \,.\, \Sigma N = 0,$$

d. h.

$$\Sigma N = Q\cdot\frac{W}{1-f\sin\alpha_m \,.\, W},$$

b) für die Drehung um die Schraubenachse

$$Mo - r_m\cdot\frac{tg\,\alpha_m}{W}\Sigma N - r_m \,.\, \cos\alpha_m \,.\, f \,.\, \Sigma N = 0,$$

d. h.

$$Mo = r_m \Sigma N\cdot\frac{tg\,\alpha_m + f\cos\alpha_m \,.\, W}{W}.$$

Aus a) und b) folgt

$$Mo = r_m Q\cdot\frac{tg\,\alpha_m + f\cos\alpha_m \,.\, W}{1-f\sin\alpha_m \,.\, W} \quad \text{für} \quad W=\sqrt{tg^2\alpha_m + tg^2\beta + 1}.$$

Setzt man $f\cos\alpha_m \,.\, W = tg\,\psi$, so erhält man

$$Mo = r_m Q\cdot\frac{tg\,\alpha_m + tg\,\psi}{1-tg\,\alpha_m \,.\, tg\,\psi} = r_m Q \,.\, tg\,(\alpha_m+\psi).$$

Da α_m meist ein kleiner Winkel ist, so kann man in W meist $tg^2\alpha_m$ gegen $1+tg^2\beta$ vernachlässigen, so daß $W\sim\sqrt{tg^2\beta+1}$ oder $W\sim\frac{1}{\cos\beta}$ ist. Man hat dann $tg\,\psi=\frac{f\cos\alpha_m}{\cos\beta}$ oder, wenn man β durch δ (vergl.

Fig. 415 b) ersetzt, $tg\,\psi = \frac{f\cos\alpha_m}{\sin\delta}$. Da $\cos\alpha_m \sim 1$ für sehr kleine Winkel, so ist in diesem Falle $tg\,\psi = \frac{f}{\sin\delta}$ der Reibungskoefficient für eine Keilnute (vergl. S. 541), d. h. man kann die scharfgängige Schraube angenähert behandeln als eine flachgängige Schraube, in welche eine Keilnute von der Öffnung 2δ eingestemmt ist.

Die Veranschaulichung durch die schiefe Ebene ist also auch hier erlaubt, falls man ψ je nach dem Grade der Genauigkeit, welchen man erreichen will, durch eine der obigen Formeln bestimmt.

Für die abwärts gerichtete Bewegung gilt ebenso

$$Mo = Q\,r_m\,tg\,(\alpha_m - \psi).$$

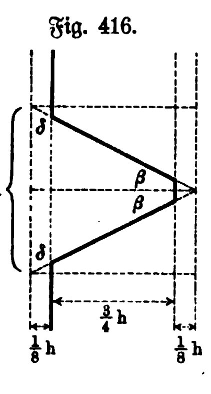
Für die scharfgängige Schraube gilt demnach die Formel

$$\left.\begin{array}{ll} & Mo = Q\,r_m\,tg\,(\alpha_m \pm \psi) \\ \text{für} & \\ & tg\,\psi = f\cos\alpha_m\,.\,\sqrt{tg^2\alpha_m + tg^2\beta + 1} \\ \text{bezw. für} & \\ & tg\,\psi \sim \frac{f\cos\alpha_m}{\cos\beta} \quad \text{oder} \quad tg\,\psi \sim \frac{f\cos\alpha_m}{\sin\delta} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 172)$$

Das gleichschenkelige Dreieck, welches dem Gewinde der scharfgängigen Schraube zu Grunde liegt, wird in Deutschland (metrisches Gewinde) gemäß Fig. 416 einem Quadrate eingezeichnet, so daß $2\beta = 53^0\,8'$ ist.

Für das Withworth-Gewinde (England) ist $2\beta = 55^0$, für das Sellers-Gewinde (Amerika) ist $2\beta = 60^0$. Die scharfe Kante wird sowohl an der Spitze als im Grunde abgeflacht, beim metrischen Gewinde je um $\frac{1}{8}h$.

Fig. 416.



Giebt man dem Momente Mo den Radius der mittleren Schraubenlinie r_m als Arm, so daß eine Kraft P am Arme r_m der Gleichung $Pr_m = Mo$ entspricht, so erhält man für die gleichförmigen Bewegungen der flachgängigen Schraube

$$P = Q\,.\,tg\,(\alpha_m \pm \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 173)$$

und für die gleichförmigen Bewegungen der scharfgängigen Schraube

$$P = Q\,.\,tg\,(\alpha_m \pm \psi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 174)$$

Der Wirkungsgrad ist für die Bewegung aufwärts

$$\eta = \frac{tg\,\alpha_m}{tg\,(\alpha_m + \varphi)} \quad \text{bezw.} \quad \frac{tg\,\alpha_m}{tg\,(\alpha_m + \psi)}$$

und für die Bewegung abwärts

$$\eta' = \frac{tg\,(\alpha_m - \varphi)}{tg\,\alpha_m} \quad \text{bezw.} \quad \frac{tg\,(\alpha_m - \psi)}{tg\,\alpha_m}.$$

Die Ruhe der Schraube ist bedingt durch die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{l} Q\,tg(\alpha_m - \varphi) < P < Q\,tg(\alpha_m + \varphi) \\ \text{bezw.} \\ Q \,.\, tg(\alpha_m - \psi) < P < Q\,tg(\alpha_m + \psi) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 175)$$

Selbsthemmung tritt ein für $\alpha_m < \varphi$ bezw. $\alpha_m < \psi$.

Die Reibungen an der flachgängigen und an der scharfgängigen Schraube werden bezw. bestimmt durch $tg\,\varphi = f$ und $tg\,\psi = f\cos\alpha_m \sqrt{tg^2\alpha_m + tg^2\beta + 1}$. Für $\varphi = \psi$ hätte man die Gleichung

$$\cos\alpha_m \sqrt{tg^2\alpha_m + tg^2\beta + 1} = 1 \quad \text{oder} \quad \cos^2\alpha_m (tg^2\alpha_m + tg^2\beta + 1) = 1,$$

d. h.

$$\sin^2\alpha_m + tg^2\beta \,.\, \cos^2\alpha_m + \cos^2\alpha_m = 1 \quad \text{oder} \quad tg^2\beta \,.\, \cos^2\alpha_m = 0.$$

Diese Gleichung ist nur für $\beta = 0$ erfüllt, d. h. die Reibung an der scharfgängigen Schraube ist niemals gleich der Reibung an der flachgängigen Schraube.

Für $tg\,\psi > tg\,\varphi$ ergiebt sich $tg^2\beta\cos^2\alpha_m > 0$, für $tg\,\psi < tg\,\varphi$ ergiebt sich $tg^2\beta\cos^2\alpha_m < 0$, d. h. die Reibung an der scharfgängigen Schraube ist stets größer als die Reibung an der flachgängigen Schraube.

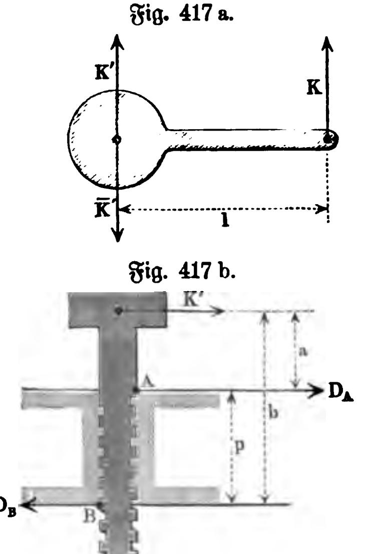


Fig. 417 a.

Fig. 417 b.

Darum werden Befestigungsschrauben stets als scharfgängige Schrauben (und zwar mit kleinem Wert von α) bestimmt, ganz abgesehen davon, daß auch die Form dieser Schraube für die Inanspruchnahme des zu ihr verwendeten Materiales günstiger ist. Dagegen dient die flachgängige Schraube im Getriebe für Übertragung von Bewegungen, wobei die Reibung möglichst gering sein soll.

Bei der flachgängigen Schraube ist außerdem allerdings noch die Reibung an der Mantelfläche zu berücksichtigen, falls die Schraube durch eine Kraft K am Arme l bewegt wird. Hier ist, wie Fig. 417 zeigt, neben $Mo = Kl$ noch der seitliche Horizontaldruck von $[K']$ zu berücksichtigen, den man sich an den Stellen A und B, d. h. oben und unten an der Mutter in die Horizontaldrucke $[D_A]$ und $[D_B]$ zerlegt denken kann (vergl. Fig. 417 b). Faßt man die Schraube für diese Betrachtung als einen Cylinder vom Radius $r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$ auf, so treten noch die Reibungsmomente $D_A f r_m$ und $D_B f r_m$ auf, deren Summe

$$(D_A + D_B) f r_m = \frac{b + a}{b - a} \cdot K \,.\, f \,.\, r_m$$

ist, da $D_A = \frac{b}{p} K'$ und $D_B = a \frac{K'}{p}$ ist.

Unter Berücksichtigung dieses Widerstandes ist für Gleichgewicht

$$Kl = Mo = Q r_m tg(\alpha_m \pm \varphi) + \frac{b+a}{b-a} K \, . \, f \, . \, r_m$$

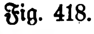
und man hat also

$$K = \frac{Q r_m tg(\alpha_m \pm \varphi)}{l - \frac{b+a}{b-a} \cdot f \, . \, r_m}.$$

Für $l \leqq \frac{b+a}{b-a} \cdot f \, . \, r_m$ wird der Nenner negativ bezw. 0, d. h. es tritt Klemmung ein, so daß $l > \frac{b+a}{b-a} \cdot f \, . \, r_m$ die Bedingung für die Bewegung ist.

Man überträgt diese Formel gelegentlich auch auf die scharfgängige Schraube, indem man φ durch ψ und f durch $\frac{f}{\sin\delta}$ ersetzt.

Endlich ist noch zu bemerken, daß bei dem Anbringen oder Lösen einer Befestigunsschraube noch ein Reibungsmoment in einer Ebene, senkrecht zur Schraubenachse, zu berücksichtigen ist, z. B. für Fig. 418 zwischen der Mutter $M_1 M_2$ und der Platte AB. Dieses hat bei einer Pressung Q in der Richtung der Schraubenachse den Wert Qfr',


Fig. 418.

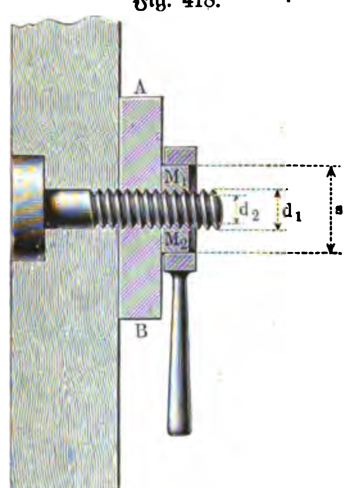
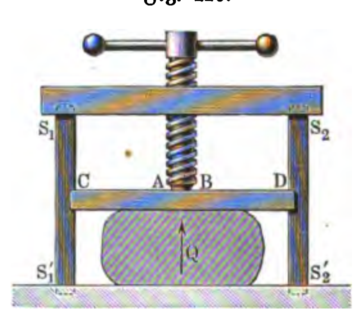


Fig. 419.



wobei $r' = \frac{s + d_1}{4}$ gesetzt wird, falls s die Schlüsselweite und $d_1 = 2 r_1$ der Durchmesser in den Spitzen ist.

Entsprechende Reibungswerte treten auch in Getrieben auf für die Berührungsfläche des Endes einer Schraubenspindel und einer Preßplatte.

Bei der einfachen Schraubenpresse, die Fig. 419 darstellt, ist z. B. an der Stelle AB noch die Reibung der Spindel zu berücksichtigen, welche man als Reibung eines ausgelaufenen Stützzapfens auffassen kann, so daß ihr Moment

$$\tfrac{1}{2} Q \, . \, f \, . \, \varrho$$

ist, falls der Zapfenabschluß des Schraubenendes bei AB den Radius ϱ hat. Da durch dieses Moment die Platte CD für $CD = 2a$ mit der Kraft

$$\frac{1}{2} Qf \cdot \frac{\varrho}{a}$$

gegen die Säulen $S_1 S_1'$ und $S_2 S_2'$ gedrückt wird, so entsteht an diesen die Reibung

$$2 \cdot \frac{1}{2} Qf \cdot \frac{\varrho}{a} \cdot f',$$

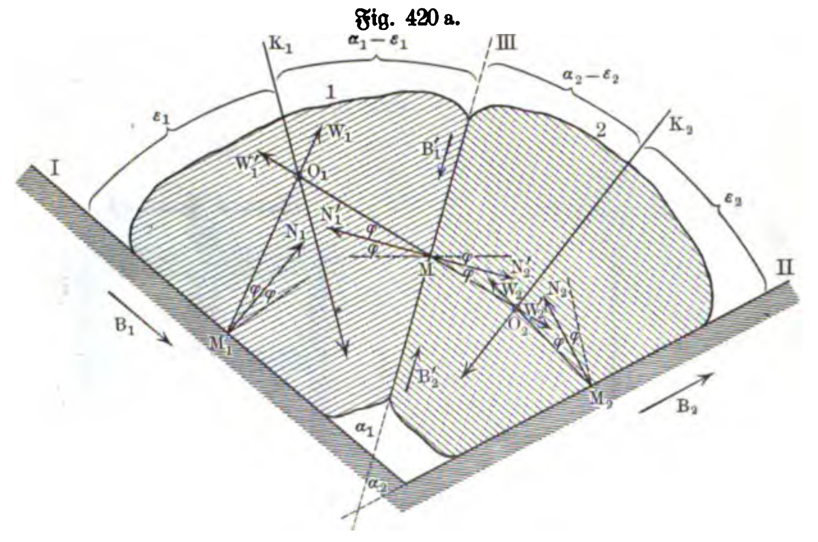
falls der Reibungskoefficient für die Berührung in C und D mit f' bezeichnet wird. Man hat also hier statt Q einzuführen $Q\left(1 - ff' \frac{\varrho}{a}\right)$, d. h. es gilt

$$Mo = Q\left(1 - ff' \frac{\varrho}{a}\right) [r_m tg(\alpha_m + \varphi) + \tfrac{1}{2} f \varrho].$$

Die Korrektur $ff' \frac{\varrho}{a}$ ist bei Anwendungen zu vernachlässigen, falls nicht auch noch das Gewicht der Schraube und der Preßplatte berücksichtigt wird.

4. Keilketten und Stützlinien von Gewölben. Wir betrachten jetzt zwei Keile, die sich einerseits gegeneinander stützen, wie es Fig. 420 a zeigt,

Fig. 420 a.



und anderseits durch zwei feste Ebenen I und II gehalten werden. Wenn der erste Keil eine Bewegung ausführt, die dem Pfeile B_1 bezw. B_1' entspricht, so ist die Bewegung des zweiten Keiles durch den Pfeil B_2 bezw. B_2' bestimmt, d. h. der erste Keil treibt den zweiten vor sich her und an sich herauf.

Dieser Bewegung entsprechen die in Fig. 420 a bei den Normalreaktionen $[N_1]$, $[N_2]$, $[N_1']$, $[N_2']$ eingezeichneten Reibungswinkel φ, durch welche die Richtungen der Widerstände $[W_1]$, $[W_2]$, $[W_1']$, $[W_2']$ bestimmt werden. Gleichgewicht tritt ein, wenn äußere Kräfte $[K_1]$ und $[K_2]$ bezw. durch die Schnittpunkte O_1 und O_2 von $[W_1]$ und $[W_1']$ und von $[W_2]$ und $[W_2']$ gehen und

zwar so, daß die drei Kräfte in O_1 und die drei Kräfte in O_2 einander unter sich aufheben. Fig. 420 b und Fig. 420 c stellen die betreffenden Beziehungen für O_1 und O_2 dar. Man gewinnt diese am einfachsten, wenn man sich $[K_1]$ erst parallel zu I und dann parallel zu III gerichtet denkt und es beide Male aus diesen Lagen in seine wirkliche Lage dreht; entsprechendes gilt für $[K_2]$.

Nach dem Satze der drei Kräfte gilt dann für Fig. 420 b

$$K_1 : W_1' : W_1 = \sin(2\varphi + \alpha_1) : \cos(\varphi + \varepsilon_1) : \cos(\varphi + \alpha_1 - \varepsilon_1),$$

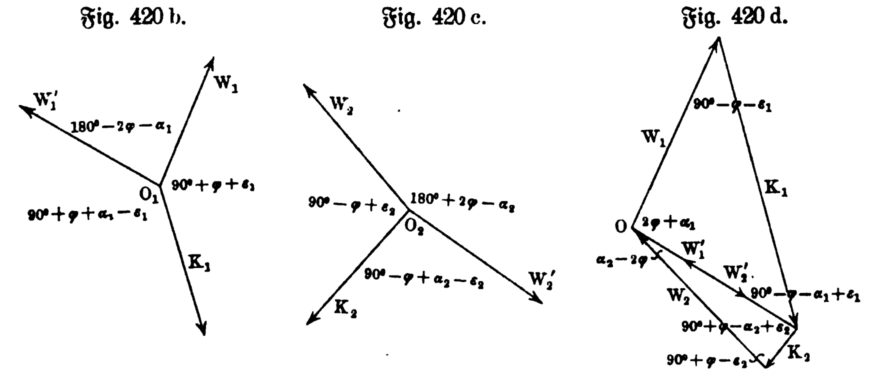
und für Fig. 420 c

$$K_2 : W_2' : W_2 = \sin(\alpha_2 - 2\varphi) : \cos(\varphi - \varepsilon_2) : \cos(\varphi - \alpha_2 + \varepsilon_2).$$

Da W_1' und W_2' nach dem Principe der Paarwirkung einander gleich sind, so ist unter anderem

$$1)\quad \frac{K_1}{K_2} = \frac{\sin(\alpha_1 + 2\varphi) \,.\, \cos(\varepsilon_2 - \varphi)}{\cos(\varepsilon_1 + \varphi) \,.\, \sin(\alpha_2 - 2\varphi)} = m \quad . \quad . \quad . \quad 176)$$

Hier ist $[K_1]$ die treibende Kraft und $[K_2]$ der Widerstand für eine gleichförmige Bewegung der Keilkette.



Kehrt man die Bewegungspfeile B_1 u. s. w. um, so sind die Winkel φ auf der anderen Seite von $[N_1]$ u. s. w. zu zeichnen und man erhält ebenso

$$2)\quad \frac{K_2}{K_1} = \frac{\cos(\varepsilon_1 - \varphi)\sin(\alpha_2 + 2\varphi)}{\sin(\alpha_1 - 2\varphi) \,.\, \cos(\varepsilon_2 + \varphi)} = \overline{m} \quad . \quad . \quad . \quad 177)$$

Hier ist $[K_2]$ die treibende Kraft und $[K_1]$ der Widerstand für eine gleichförmige Bewegung der Keilkette.

Im ersten Falle würde $K_1 = \infty$ für $\alpha_2 = 2\varphi$ und für $\varepsilon_1 = 90^\circ - \varphi$, weil der Nenner von $\frac{K_1}{K_2}$ den Wert 0 erhielte. Für $\alpha_2 = 2\varphi$ ist $\measuredangle\, MOM_2 = 360^\circ - 2\varphi - (90^\circ - \varphi) - (90^\circ - \varphi) = 180^\circ$, d. h. MO und MO_2 fallen in eine Gerade, so daß sich Keil 2 festklemmt. Für $\varepsilon_1 = 90^\circ - \varphi$ fiele $[K_1]$ in die Richtung von W_1, so daß $[W_1']$ überhaupt nicht auftreten könnte und also eine Druckübertragung auf Keil 2 überhaupt nicht stattfindet. Im zweiten Falle gilt für $\alpha_1 = 2\varphi$ und $\varepsilon_2 = 90^\circ - \varphi$ Entsprechendes.

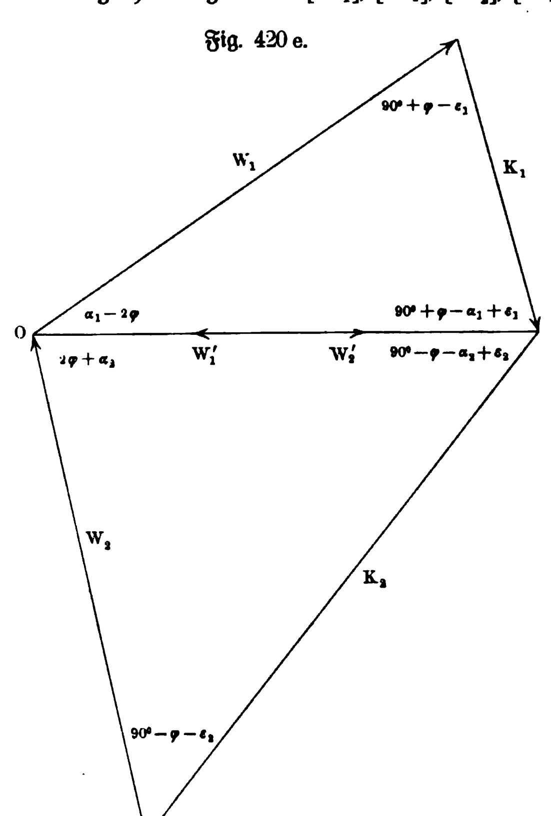
Schiebt man Fig. 420 b zum Kraftdreieck zusammen und ebenso Fig. 420 c, so lassen sich beide Dreiecke, da ja $W_1' = W_2'$ ist, vereinigen, wie es Fig. 420 d (a. v. S.) zeigt. Dabei wird O der Pol für die Darstellung des Seilecks $M_1 O_1 M O_2 M_2$ der Hauptfigur.

Sollen die Keile 1 und 2 in Ruhe verharren, so darf weder die erste noch die zweite Bewegung möglich sein. Aus Gleichung 1) folgt $K_1 < m K_2$ und aus Gleichung 2) folgt $K_2 < \overline{m} K_1$ als Bedingung, d. h. man hat

$$m > \frac{K_1}{K_2} > \frac{1}{\overline{m}}.$$

Die Reibungskegel von M_1, M und M_2 bestimmen dabei das Gebiet für alle möglichen Lagen von $[W_1']$, $[W_1'']$, $[W_2]$, $[W_2'']$, welche der Ruhe der Keile entsprechen; innerhalb dieses Gebietes giebt es natürlich unendlich-viele Seilpolygone $M_1 O_1 M O_2 M_2$, deren Grenzlagen durch Fig. 420 d, welche der Bewegung B_1 2c. entspricht, und durch Fig. 420 e, welche der entgegengesetzten Bewegung entspricht, bestimmt sind. Außerdem ist auch für die Lage M_1, M, M_2 ein großer Spielraum vorhanden. Selbstverständlich muß dabei eine Druckübertragung möglich bleiben, d. h. die Seiten des Seilecks müssen durch die Berührungsfläche selbst gehen und nicht etwa durch deren Erweiterungen.

Fig. 420 e.



Die Betrachtung läßt sich ohne weiteres auf beliebig-viele Keile übertragen, indem man z. B. zunächst die Stützfläche I durch einen dritten Keil ersetzt, der auf einer Stützfläche I ruht u. s. f.

Ein Beispiel für eine derartige Keilkette bietet der Bogen eines gewöhnlichen Gewölbes, wobei man von der gegenseitigen Befestigung der Steine durch den Mörtel absieht.

Öffnet sich die Scheitelfuge bei A nach außen, wobei sich zugleich an irgend einer Stelle P eine Fuge nach innen öffnet (vergl. Fig. 421), so ist H zu groß. Um die Fuge bei P zu schließen, müßte, wenn $[G]$ das Gewicht

des Gewölbestückes zwischen A und P bezeichnet, für P als Drehpunkt sein

$$Gx > Hy, \quad \text{d. h. } H < G\frac{x}{y}.$$

Für $Gx = Hy$ geht die Resultante von $[H]$ und $[G]$ gerade durch P, d. h. die Richtungslinie des Druckes trifft die äußere Wölbungslinie, sie überschreitet diese für $H > G\frac{x}{y}$. Liegt A unter P, so wirken $[H]$ und $[G]$ in demselben Sinne, d. h. die Konstruktion ist in Bezug auf P sicher.

Fig. 421.

Öffnet sich die Scheitelfuge bei B nach innen, wobei sich zugleich an irgend einer Stelle Q eine Fuge nach außen öffnet (vergl. Fig. 422), so ist H zu klein. Um die Fuge bei Q zu schließen, müßte, wenn $[G']$ das Gewicht des Gewölbestückes zwischen B und Q bezeichnet, für Q als Drehpunkt sein

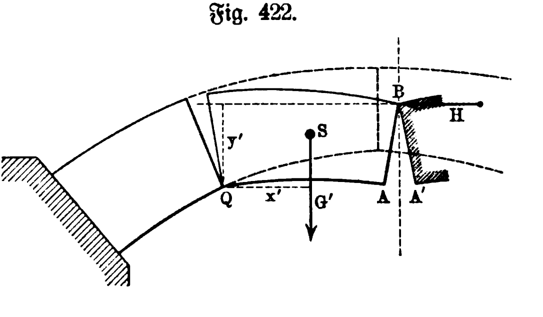
$$Hy' > G'x',$$

d. h.

$$H > G'\frac{x'}{y'}.$$

Für $Hy' = Gx'$ geht die Resultante von $[H]$ und $[G']$ gerade durch Q, d. h. die Richtungslinie des Druckes trifft die innere Wölbungslinie, sie überschreitet diese für $H < G'\frac{x'}{y'}$.

Fig. 422.



Bestimmt man also $G\frac{x}{y}$ für jede Fuge des Gewölbes und bezeichnet man den dabei auftretenden Minimalwert $\left(G\frac{x}{y}\right)_{Min.}$ durch H_1, so muß $H < H_1$ sein; ebenso muß $H > H_2$ sein, falls man $\left(G'\frac{x'}{y'}\right)_{Max.}$ durch H_2 bezeichnet. Für den Wert des thatsächlich vorhandenen $[H]$ gilt also

$$H_1 > H > H_2 \quad \text{. . . . . 178)}$$

als Bedingung dafür, daß kein Kippen der Gewölbesteine eintritt bezw. dafür, daß die Richtungslinie des Druckes nicht aus der Wölbung heraustritt.

Handelt es sich z. B. um ein scheitrechtes Gewölbe, so ist für irgend eine Fuge QP für Q als Drehpunkt $[H_Q]$ und für P als Drehpunkt $[H_P]$ zu benutzen. Vergl. Fig. 423 (a. f. S.).

Für P als Drehpunkt wird, da A unterhalb von P liegt, das Moment Gx durch $H_P \,.\, y$ stets unterstützt, so daß für H hier überhaupt keine obere Grenze H_1 existiert.

Für die untere Grenze H_2 ist Q als Drehpunkt zu nehmen, und man hat

$$G' \frac{x'}{y'} = G' \cdot \frac{AQ - m}{d}.$$

Für $AQ = z$ und $\measuredangle\, PQA' = \varepsilon$ ist $BP = z + d \cot \varepsilon$, so daß

$$m = \tfrac{1}{3} \frac{3z^2 + 3dz \cot \varepsilon + d^2 \cot^2 \varepsilon}{2z + d \cot \varepsilon}$$

ist (vergl. S. 459).

Für eine Ausdehnung l des Gewölbes, senkrecht zur Ebene der Zeichnung, ist

$$G' = \tfrac{1}{2} \delta \,.\, l \,.\, d(2z + d \cot \varepsilon),$$

falls das specifische Gewicht des Materials mit δ bezeichnet wird. Man hat also

$$\frac{G'x'}{y'} = \tfrac{1}{6} \delta \,.\, l \,.\, (3z^2 - d^2 \cot^2 \varepsilon).$$

Fig. 423 a.

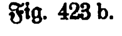
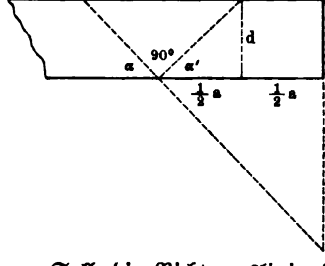


Fig. 423 b.



Soll die Richtungslinie des Druckes senkrecht zu den Fugen verlaufen, so müssen diese alle durch eine Gerade gehen, senkrecht zur Ebene der Zeichnung in M.

In diesem Falle ist $AM = a \, tg\, \alpha = z \, tg\, \varepsilon$ und man hat

$$\frac{G'x'}{y'} = \tfrac{1}{6} \delta \,.\, l \,.\, z^2 \left(3 - \frac{d^2}{a^2} \cot^2 \alpha\right)$$

oder

$$\frac{G'x'}{y'} = \tfrac{1}{6} \delta \,.\, l \,.\, a^2 \cot^2 \varepsilon \left(3 \, tg^2 \alpha - \frac{d^2}{a^2}\right).$$

Für das Maximum H_2 von $\frac{G'x'}{y'}$ gilt dann $H > H_2$. Dieses Maximum tritt ein für den größten Wert von $\cot \varepsilon$ bezw. für den kleinsten Wert von ε, d. h. für α.

Man hat also

$$H_2 = \tfrac{1}{6}\delta \,.\, l \,.\, a^2\left(3 - \frac{d^2}{a^2} cot^2 \alpha\right).$$

Da die Richtungslinie des Druckes senkrecht zu den Fugen stehen soll, so heben sich die Komponenten von $[H]$ und $[G']$, welche der Fuge PQ parallel sind, auf, d. h. es ist $H \cos \varepsilon = G' \sin \varepsilon$ oder $H = G' tg\, \varepsilon$.

Für $\varepsilon = \alpha$ gilt also

$$G' tg\, \alpha > \tfrac{1}{6}\delta \,.\, l \,.\, a^2\left(3 - \frac{d^2}{a^2} cot^2 \alpha\right)$$

und es ist dabei

$$G' = \tfrac{1}{2}\delta \,.\, l \,.\, d(2a + d \cot \alpha).$$

Daraus folgt

$$\cot \alpha^3 - 3\left[\left(\frac{a}{d}\right)^2 - 1\right]\cot \alpha + 6\frac{a}{d} > 0.$$

Bei gegebenen Werten von a und d ist also α gemäß dieser Ungleichung zu bestimmen. Man genügt ihr z. B. durch $\cot \alpha = \frac{2d}{a}$ gemäß Fig. 423 b, in welcher $\cot \alpha = tg\, \alpha' = \frac{2d}{a}$ ist. Durch α gewinnt man Punkt M und damit die Richtung jeder beliebigen Fuge PQ.

Da die Richtungslinie des Druckes auf den Fugen senkrecht steht, so könnte der Reibungskegel in jedem Stützpunkt die Öffnung 0 haben, d. h. die Steine könnten hier absolut glatt sein. Dies folgt auch aus den im Eingange dieser Nummer entwickelten Formeln $\frac{K_1}{K_2}$ und $\frac{K_2}{K_1}$ für $\varphi = 0$, da K_1 und K_2 hier die Gewichte der Gewölbesteine sind, für welche $G = H \cot \varepsilon$ gilt.

Handelt es sich ferner um einen Gewölbebogen, dessen Vertikalschnitt durch zwei konzentrische Halbkreise begrenzt ist, so ist für irgend eine radiale Fuge OQP, gemäß Fig. 424 (a. f. S.)

$$G\frac{x}{y} = G \cdot \frac{OP' - OS'}{OA - OP''} = G\frac{r_1 \sin \varepsilon - OS \,.\, \sin\frac{\varepsilon}{2}}{r_2 - r_1 \cos \varepsilon}$$

und

$$G'\frac{x'}{y'} = G' \cdot \frac{OQ' - OS'}{OB - OQ''} = G'\frac{r_2 \sin \varepsilon - OS \,.\, \sin\frac{\varepsilon}{2}}{r_1 - r_2 \cos \varepsilon}.$$

Dabei ist $G = G' = \frac{1}{2}\delta \,.\, l \,.\, (r_1^2 - r_2^2)\, arc\, \varepsilon$, falls die Ausdehnung des Gewölbes, senkrecht zur Zeichnungsebene, mit l und das specifische Gewicht mit δ bezeichnet wird.

Außerdem ist

$$OS = \tfrac{2}{3}\,\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{arc\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Demnach ist

$$\frac{Gx}{y} = \tfrac{1}{6}\,\delta\,.\,l\cdot\frac{3\,(r_1^2 - r_2^2)\,r_1 \sin\varepsilon \; arc\,\varepsilon - 4\,(r_1^3 - r_2^3)\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{r_2 - r_1\cos\varepsilon}$$

$$\frac{G'x'}{y'} = \tfrac{1}{6}\,\delta\,.\,l\cdot\frac{3\,(r_1^2 - r_2^2)\,r_2 \sin\varepsilon \; arc\,\varepsilon - 4\,(r_1^3 - r_2^3)\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{r_1 - r_2\cos\varepsilon}.$$

Für den ersten Ausdruck ist ε so zu bestimmen, daß er ein Minimum (H_1) wird; für den zweiten Ausdruck ist ε so zu bestimmen, daß er ein Maximum (H_2) wird. Es gilt dann für das thatsächlich vorhandene [H] die Beziehung

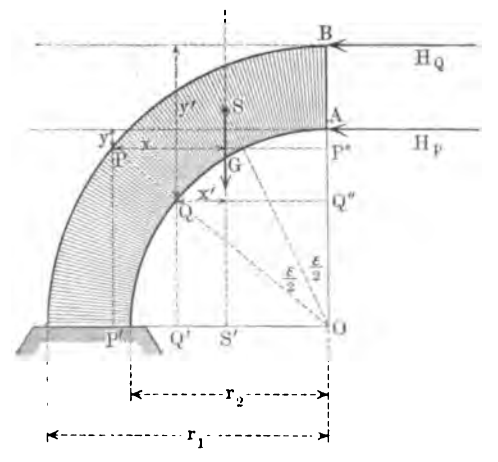
$$H_1 > H > H_2.$$

Um H_1 und H_2 zu bestimmen für ein gegebenes Verhältnis $\frac{r_1}{r_2} = n$, entwirft man eine Tabelle von $\frac{Gx}{y}$ bezw. $\frac{G'x'}{y'}$ für $\varepsilon^0 = 0^0 \ldots 90^0$.

Man findet z. B. für $n = 1{,}25$ als größten Wert von $\frac{G'x'}{y'}$ den Wert $H_2 = 0{,}1285\,.\,\delta\,.\,l\,.\,r_2^2$ und zwar für $\varepsilon = 61^0\,15'$, d. h. es ist zu nehmen $H > 0{,}1285\,.\,\delta\,.\,l\,.\,r_2^2$.

Anstatt nun auch noch H_1 zu bestimmen, geht man mit dem Werte H_2 an den Entwurf und vergrößert H nach Bedürfnis, aber so, daß die entsprechende Richtungslinie des Druckes (vergl. S. 583) nicht aus dem Gewölbequerschnitte heraustritt.

Fig. 424.



Mit Hülfe dieser Linie kann man nun überhaupt für die Sicherheit der Gewölbekonstruktion die folgenden Regeln aufstellen.

Sollen die Gewölbesteine nicht gegeneinander gleiten, so muß die Richtungslinie des Druckes, gemäß der eben durchgeführten Untersuchung, an jedem Stützpunkte innerhalb des zugehörigen Reibungskegels bleiben.

Man pflegt diese Forderung als die eine Bedingung der Stabilität des Gewölbes zu bezeichnen.

Als zweite Bedingung kommt dazu, daß die Richtungslinie des Druckes ganz innerhalb des Gewölbes verläuft, d. h. stets auf wirklich materielle Teile trifft und nicht etwa die geometrische Erweiterung einer Gewölbefuge.

Während die erste Bedingung Sicherheit gegen Einsturz durch Gleiten der Gewölbesteine gewährt, giebt die zweite Sicherheit gegen Einsturz durch Kippen der Gewölbesteine.

Außerdem muß noch drittens das Material die Drucke, die ihm zugemutet werden, auch wirklich aushalten können, d. h. die verwendeten Drucke müssen zulässig sein in Bezug auf die Festigkeit des Materiales.

Wir betrachten die zweite Bedingung noch etwas genauer. Bezeichnet $[H]$ wieder den Horizontalschub in der Scheitelfuge, so ist $[H]$ zugleich der horizontale Druck für jeden Teil der Konstruktion, weil die Gewölbesteine als Belastungen nur vertikale Kräfte hinzufügen.

Für $H < 0{,}1285\,\delta\,.\,l\,.\,r_2^2$ würde sich das Gewölbe in der Fuge, die $\varepsilon = 61^0\,15'$ entspricht, nach außen öffnen (Bruchfuge). Die Richtungslinie des Druckes würde für $H = 0{,}1283\,\delta\,.\,l\,.\,r_2^2$ die innere Wölbungslinie in jener Fuge berühren, für kleinere Werte von H würde sie dort aus dem Gewölbequerschnitt heraustreten, für größere Werte von H dort in dem Gewölbequerschnitte bleiben.

Entsprechendes gilt für das Minimum von $\dfrac{Gx}{y}$ in Bezug auf die Öffnung nach innen in einer bestimmten Bruchfuge.

Hat man für ein Gewölbe, wie es an dem Beispiele gezeigt worden ist, die Grenzen H_1 und H_2 für H bestimmt, so läßt sich in jedem Punkte der Scheitelfuge AB zu jedem Werte von $[H]$ in den Grenzen H_1 und H_2 eine Richtungslinie des Druckes zeichnen, welche innerhalb des Gewölbequerschnittes bleibt.

Fig. 425.

Schneidet sie die Fugen innerhalb der Reibungskegel der Stützpunkte, so ist bei zulässiger Belastung des Materiales Stabilität vorhanden, andernfalls muß der Angriffspunkt von $[H]$ oder dessen Wert innerhalb der Grenzen H_1 und H_2 oder die Fugenstellung geändert werden.

Die Änderung der Richtungslinie des Druckes bei Verwendung von H in den Grenzen H_1 und H_2 ist aus Fig. 425 ersichtlich, wo G_1, G_2, G_3, ... die Gewichte der Gewölbesteine sind, vom Scheitel aus geordnet.

Über die wirkliche Lage der Richtungslinie des Druckes in einem ausgeführten Gewölbe läßt sich erst auf Grund des elastischen Verhaltens des Materiales Gewißheit erhalten.

5. **Seil- und Kettenrollen und entsprechende Verbindungen.** Die Kraft P, welche eine Last Q über eine feste Rolle führt, hat dabei den Widerstand der Zapfenreibung zu überwinden, so daß $P > Q$ ist. Der Überschuß $P - Q$, der bei einem Rollenhalbmesser r das Moment $(P - Q)r$ liefert, überträgt die Bewegung des Seiles durch die Seilreibung auf die Rolle. Da das Moment der Zapfenreibung $D\,.\,f\,.\,\varrho$ ist (vergl. S. 545), falls D der Zapfendruck, ϱ der Zapfenhalbmesser und f der entsprechende Reibungskoefficient ist, so gilt

$$(P - Q) r = D \cdot f \cdot \varrho.$$

Bei einer gleichförmigen Bewegung der Rolle ist für parallele Seile $D = P + Q$, so daß

$$\frac{P + Q}{P - Q} = \frac{r}{f \varrho}$$

und

$$\frac{P}{Q} = \frac{r + f\varrho}{r - f\varrho} = \frac{1 + \frac{f\varrho}{r}}{1 - \frac{f\varrho}{r}} = \frac{\left(1 + \frac{f\varrho}{r}\right)^2}{1 - \frac{f^2\varrho^2}{r^2}} = \frac{1 + \frac{2f\varrho}{r} + \frac{f^2\varrho^2}{r^2}}{1 - \frac{f^2\varrho^2}{r^2}}$$

ist.

Da $\frac{\varrho}{r}$ ein echter Bruch ist, so läßt sich $\frac{f^2\varrho^2}{r^2}$ im Zähler und im Nenner gegen die anderen Größen vernachlässigen und man erhält in gewisser Annäherung, falls man noch $2\varrho = d$ setzt,

$$\frac{P}{Q} = 1 + \frac{2f\varrho}{r} = 1 + \frac{f \cdot d}{r}$$

oder

$$P = Q + Q \cdot \frac{f \cdot d}{r} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 179)$$

Der Vorgang ist demnach so, als wenn Q wegen der Zapfenreibung um $Z = Q \cdot \frac{f \cdot d}{r}$ vermehrt werden müßte, so daß die Kraft P eine größere Last $Q + Z$ bewegt, statt der Last Q.

Sind die Seile nicht parallel, so ist für 2α als Centriwinkel des umspannten Bogens angenähert $D = 2 P \sin\alpha$ und demnach

$$(P - Q) r = 2 P \sin\alpha \cdot f \cdot \varrho,$$

d. h.

$$P = Q \frac{1}{1 - \frac{2f\varrho}{r}\sin\alpha} = \frac{Q\left(1 + \frac{2f\varrho}{r}\sin\alpha\right)}{1 - \frac{4f^2\varrho^2}{r^2}\sin^2\alpha}.$$

Man hat also in gleicher Annäherung wie oben

$$P = Q\left(1 + \frac{f d \sin\alpha}{r}\right) \quad \text{und} \quad Z = \frac{Q f d \sin\alpha}{r} \quad \cdots \quad 180)$$

Derselbe Ausdruck ergiebt sich unmittelbar für $D = 2 Q \sin\alpha$.

Für $\alpha = 90^0$ erhält man wieder die Formel für parallele Seile.

Berücksichtigt man noch die Steifigkeit beim Aufwickeln und beim Abwickeln (vergl. § 93), so ist P noch weiter zu vermehren

für Hanfseile um $S = \frac{2a}{r} \cdot Q$, wobei $a = 0{,}03\,\delta^2$ bis $0{,}09\,\delta^2$ zu setzen ist, falls δ den Seildurchmesser in Centimetern bezeichnet, und

für Ketten um $S = \frac{0{,}2\,\delta}{r}$ bis $\frac{0{,}3\,\delta}{r}$, falls δ die Stärke des Ketteneisens bezw. den Gelenkbolzendurchmesser bezeichnet.

Für Seilrollen erhält man also für P als Minimum

$$P = Q\left(1 + \frac{f d \sin\alpha}{r} + \frac{0{,}06}{r} \cdot \delta^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 181)$$

Für $r = 4\delta$, $d = 0{,}8\delta$, $f = 0{,}08$ ergiebt sich z. B. $P = 1{,}04\,Q$ bis $1{,}09\,Q$ bei $\delta = 1{,}6$ cm und $P = 1{,}09\,Q$ bis $1{,}25\,Q$ bei $\delta = 5{,}2$ cm für $\alpha = 90^0$.

Für Kettenrollen ergiebt sich ebenso für P als Minimum

$$P = Q\left(1 + \frac{f d \sin\alpha}{r} + \frac{0{,}2\delta}{r}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 182)$$

Für $r = 10\delta$, $d = 3\delta$, $f = 0{,}08$ ergiebt sich z. B. $P = 1{,}044\,Q$ bis $1{,}06\,Q$ für $\alpha = 90^0$, wobei für verzahnte Kettenrollen der obere Grenzwert (1,06) zu nehmen ist.

Fig. 426.

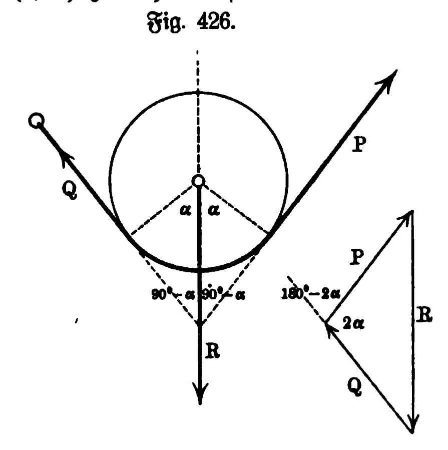
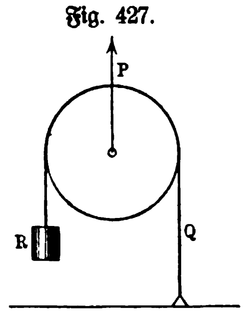


Fig. 427.



Dabei ist r zu messen in Centimetern von der Mitte der Rolle bis zur Mitte des Seiles oder der Kette.

Bezeichnen P und Q Seilspannungen, so ist P die Spannung im ablaufenden Seilstück (Trum) und Q die Spannung im auflaufenden Seilstück (Trum).

Bezeichnet man die Klammer bei Q durch μ, so ist

$$P = \mu Q \quad \text{und} \quad \mu > 1.$$

Der Wirkungsgrad ist

$$\eta = \frac{1}{\mu}.$$

Für Drahtseilrollen hat man im Mittel $\eta = \frac{1}{1{,}04}$ zu setzen.

Für die lose Rolle (vergl. Fig. 426) ist

$$P = \mu Q \quad \text{und} \quad R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos 2\alpha,$$

d. h.

$$P = R \cdot \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2 - 2\mu\cos 2\alpha}} \quad \text{und} \quad Q = R \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2 - 2\mu\cos 2\alpha}}.$$

Für parallele Seile ($2\alpha = 180^0$) ist hier

$$P = R\frac{\mu}{1 + \mu} \quad \text{und} \quad Q = R \cdot \frac{1}{1 + \mu}.$$

Für die sogenannte „umgekehrte lose Rolle“, die Fig. 427 (a. v. S.) darstellt, ist für $2\alpha = 180^0$

$$Q = \mu R \quad \text{und} \quad P = R + Q,$$

d. h. man hat hier

$$P = R(1 + \mu) \quad \text{und} \quad Q = \mu R.$$

Für den Rollenzug (vergl. Fig. 198) ergiebt sich unter Berücksichtigung der Reibung folgendes:

Man hat für das Emporziehen von [R]

a) $K = \mu S_6$, $S_6 = \mu S_5$, $S_4 = \mu S_3$, $S_2 = \mu S_1$,
b) $R + G_1 = S_1 + S_2$, $S_2 + G_2 = S_3 + S_4$, $S_4 + G_3 = S_5 + S_6$.

Bestimmt man von K aus oder von R aus die Seilspannungen durch einander, so erhält man

$$\mu\left[\frac{\mu^3}{(1+\mu)^3}(R + G_1) + \frac{\mu^2}{(1+\mu)^2}\cdot G_2 + \frac{\mu}{1+\mu}\cdot G_3\right] = K.$$

Für $\mu = 1$, d. h. bei Vernachlässigung der Reibung ergiebt sich wieder

$$R + G_1 + 2\,G_2 + 4\,G_3 = 8\,K.$$

Für das Ablassen von R gilt

a) $S_6 = \mu K$, $S_5 = \mu S_6$, $S_3 = \mu S_4$, $S_1 = \mu S_2$.
Die Gruppe b) bleibt unverändert.

Gegen a) im vorigen Falle erscheint μ ersetzt durch $\frac{1}{\mu}$, d. h. es gilt jetzt

$$\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{1}{1+\mu}\right)^3(R + G_1) + \left(\frac{1}{1+\mu}\right)^2 G_2 + \frac{1}{1+\mu}\cdot G_3\right] = K.$$

Für den Flaschenzug der Fig. 222 ergiebt sich ebenso für das Emporziehen, falls die Seile von links nach rechts durch 1, 2, 3, 4, 5, 6 und das Gewicht der unteren Flasche durch G bezeichnet wird

a) $P = \mu S_1$, $S_1 = \mu S_2$, $S_2 = \mu S_3$, $S_3 = \mu S_4$, $S_4 = \mu S_5$, $S_5 = \mu S_6$,
b) $R + G = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$.

Man hat also

$$\frac{(R + G)\mu^6}{1 + \mu + \cdots \mu^5} = P.$$

Ist n wieder die Gesamtzahl der Rollen und G das Gewicht der unteren Flasche, so gilt allgemein

$$P = \frac{(R + G)\mu^n}{1 + \mu + \cdots \mu^{n-1}} = \frac{(R + G)\mu^n(\mu - 1)}{\mu^n - 1}.$$

Der Wirkungsgrad ist

$$\eta = \frac{\mu^n - 1}{(\mu - 1)\mu^n}\cdot\frac{1}{n}.$$

Beim Differentialflaschenzug, den Fig. 428 darstellt, bilden die beiden oberen Rollen einen einzigen Körper, der sich um die gemeinschaftliche feste Drehachse A zu drehen vermag. Die Rollen sind hier als Kettenscheiben kon-

struiert, d. h. an ihrem Umfange mit Zähnen versehen, die in die Schaken der Kette greifen und auf diese Weise ein Gleiten derselben auf den Umfängen verhindern. Die untere lose Kettenscheibe trägt die zu hebende Last Q. Die Halbmesser der beiden oberen Kettenscheiben seien R und r, der Halbmesser der unteren Scheibe sei r_1 und die Zapfen mögen den Halbmesser r_2 haben. Bei der um das System der drei Kettenscheiben gelegten Kette ohne Ende sei in dem schlaff herunterhängenden Teile der oberen größeren Scheibe die Kraft P wirksam, und die von der unteren losen Scheibe nach oben führenden Teile der Kette mögen die Spannungen S_1 und S_2 erfahren.

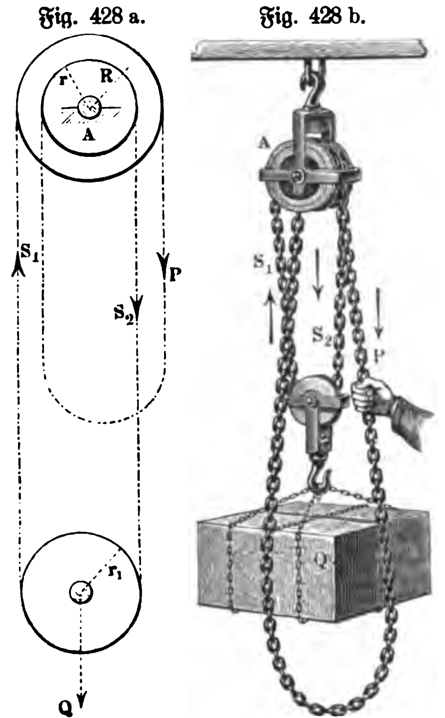


Fig. 428 a. Fig. 428 b.

Man hat hier, falls μ' den Koefficienten für die untere Rolle bezeichnet, $S_1 = \mu' S_2$ und $S_1 + S_2 = Q$, d. h.

$$S_1 = Q \cdot \frac{\mu'}{1 + \mu'}$$

und

$$S_2 = Q \cdot \frac{1}{1 + \mu'}.$$

Denkt man für die obere Rolle die Kraft S_2 am Arme r ersetzt durch eine Kraft am Arme R, so hat diese den Wert $\frac{S_2 r}{R}$, und es wirkt nun an der Außenscheibe (R) der oberen Rolle die Kraft $P + \frac{S_2 r}{R}$. Ist μ der Koefficient für die obere Rolle, so gilt also für das Heben der Last

$$P + \frac{S_2 r}{R} = \mu S_1.$$

Trägt man die oben bestimmten Werte von S_1 und S_2 in diese Formel ein, so ergiebt sich

$$P = \frac{Q}{1 + \mu'}\left(\mu'\mu - \frac{r}{R}\right).$$

Bei dem geringen Unterschiede der Halbmesser der oberen und unteren Rolle kann man $\mu = \mu'$ setzen, d. h. man erhält

$$P = \frac{Q}{1 + \mu}\left(\mu^2 - \frac{r}{R}\right).$$

Für das Ablassen der Last ist wieder μ durch $\frac{1}{\mu}$ zu ersetzen, so daß jetzt

$$P = \frac{Q\mu}{1+\mu}\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{r}{R}\right)$$

ist.

Selbsthemmung tritt ein für $\frac{1}{\mu^2} < \frac{r}{R}$, d. h. für $\frac{R}{r} < \mu^2$.

Für $\mu = 1{,}05$ und $R:r = 12:11$ ist $\frac{R}{r} = 1{,}091$ und $\mu^2 = 1{,}1025$.

Bei Vernachlässigung der Reibung ($\mu = 1$) ist $P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{R-r}{R}$.

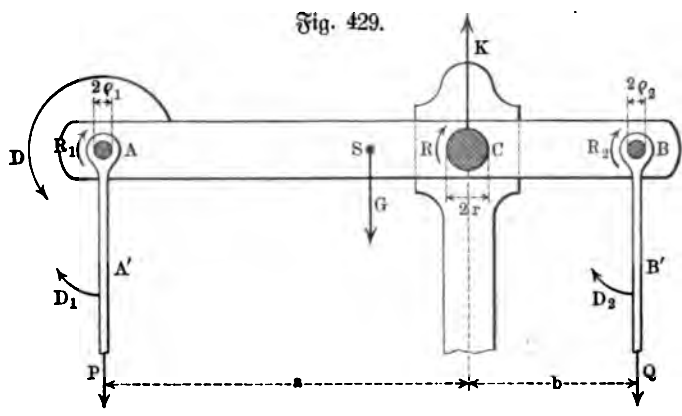
Man hat also für das Emporziehen den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{R-r}{\mu^2 R - r}.$$

Für $\mu = 1{,}05$ und $R:r = 12:11$ ist $\eta \sim 0{,}4$.

6. **Der Hebel.** Wenn die Stangen AA' und BB' bezw. in A und B (vergl. Fig. 429) mit Bolzen von den Radien ϱ_1 und ϱ_2 eingelenkt sind und wenn der Drehpunkt C durch einen Zapfen vom Radius r gebildet wird,

Fig. 429.



so hat für eine gleichförmige Bewegung im Sinne des Drehungspfeiles D, dem die Drehungspfeile D_1 und D_2 der Stangen entsprechen, für $SC = c$ das Moment $aP + Gc$ neben dem Momente Qb überdies die Reibungsmomente (vergl. die Pfeile R_1, R, R_2) in A, B und C zu überwinden, für welche bezw. P, Q und $P + Q + G$ die Zapfendrucke sind. Bezeichnet man den Reibungskoefficienten für die Zapfenreibung durch f_z, wobei f_z in stark ausgelaufenen Lagern den Wert f, im allgemeinen aber den Wert $\frac{4}{\pi} f$ (vergl. S. 550) bezeichnet, so ist

$$aP + cG = bQ + f_z \varrho_1 P + f_z \varrho_2 Q + f_z r(P + Q + G)$$

oder

$$P[a - f_z(\varrho_1 + r)] = Q[b + f_z(\varrho_2 + r)] - G(c - f_z r).$$

Giebt man dem Faktor von Q, der bei der Entwickelung von P auftritt, die Form

$$\frac{b}{a}\,\frac{1 + f_z\dfrac{\varrho_2 + r}{b}}{1 - f_z\dfrac{\varrho_1 + r}{a}},$$

so erhält, abgesehen von $\frac{b}{a}$, der Nenner bei Multiplikation mit $1 + f_z\frac{\varrho_1 + r}{a}$ angenähert den Wert 1, während der Zähler ebenso den Wert $1 + f_z\frac{\varrho_2 + r}{b} + f_z\frac{\varrho_1 + r}{a}$ erhält. Ebenso erhält der Faktor von $-G$, der bei der Entwickelung von P auftritt, im Nenner angenähert den Wert 1 und im Zähler den Wert $1 - f_z\frac{r}{c} + f_z\frac{\varrho_1 + r}{a}$.

Man hat also

$$P \sim Q\cdot\frac{b}{a} + Q\,.\,f_z\left[\frac{\varrho_2 + r}{a} + \frac{(\varrho_1 + r)b}{a^2}\right] - G\cdot\frac{c}{a} + G\,.\,f_z\left[\frac{r}{a} - \frac{(\varrho_1 + r)c}{a^2}\right].$$

Für $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ ist

$$P \sim Q\,\frac{b}{a} + Q\,.\,f_z\,\frac{(\varrho + r)\,.\,(a + b)}{a^2} - G\cdot\frac{c}{a} + Gf_z\cdot\frac{r(a - c) - \varrho c}{a^2}.$$

Für den gleicharmigen Hebel ($a = b$), dessen Schwerpunkt S im Drehpunkte C liegt ($c = 0$), ist

$$P \sim Q\left(1 + 2f_z\cdot\frac{\varrho + r}{a}\right) + G\,.\,f_z\frac{r}{a} = Q + \overline{Q}.$$

Bei Vernachlässigung der Reibungen wäre in diesem Falle eine Kraft P_0 nötig, so daß $P_0 = Q$ ist; es muß also P_0 um $\overline{Q}$ vermehrt werden, wenn Bewegung im Sinne des Pfeiles D eintreten soll.

Ersetzt man $+f_z$ durch $-f_z$, so erhält man $P = Q - \overline{Q}$, d. h. P_0 muß um $\overline{Q}$ vermindert werden, wenn Bewegung im entgegengesetzten Sinne eintreten soll.

Da in diesem Falle Q als Kraft und P als Last anzusehen ist, so gilt auch

$$Q \sim P\left(1 + 2f_z\frac{\varrho + r}{a}\right) + G\,.\,f_z\frac{r}{a}$$

oder

$$P \sim \frac{Q}{1 + 2f_z\dfrac{\varrho + r}{a}} - \frac{G\,.\,f_z\dfrac{r}{a}}{1 + 2f_z\dfrac{\varrho + r}{a}}.$$

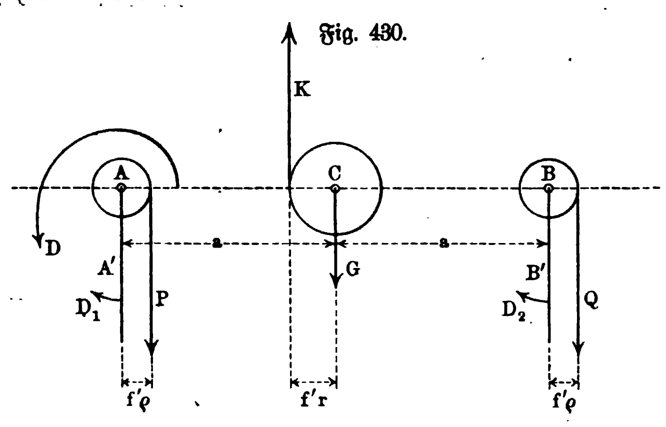
Multipliziert man die Faktoren von Q und G im Zähler und im Nenner mit $1 - 2f_z\frac{\varrho + r}{a}$, so erhalten die Nenner bei der vorausgesetzten An-

näherung den Wert 1, während der Zähler bei Q den Wert $1 - 2 f_z \frac{\varrho + r}{a}$ und der Zähler bei $-G$ den Wert $f_z \frac{r}{a}$ erhält.

Man sieht also, daß beide Entwickelungen übereinstimmen.

Dieselbe Betrachtung läßt sich auch mit Hülfe des Reibungskreises (vergl. S. 551) durchführen. An der Grenze der Bewegung im Sinne des Pfeiles D bezw. der Pfeile D_1 und D_2 der Fig. 429 berühren die Kräfte $[P]$, $[Q]$ und die Reaktion in C bezw. die Reibungskreise von A, B und C, und zwar berühren $[P]$ und $[Q]$ ihre Kreise rechts, während die Reaktion in C ihren

Fig. 430.



Kreis links berührt. Senkt sich nämlich A, so muß sich AA' nach außen und BB' nach innen drehen, um vertikal zu bleiben, d. h. beide Bewegungen folgen dem Uhrzeiger; die Reibungsmomente für den Balken des Hebels entsprechen infolgedessen (vergl. die Pfeile R_1 und R_2) bei A und bei B gleichfalls der Uhrzeigerbewegung, so daß für ihre Darstellung $[P]$ bezw. $[Q]$ von A bezw. B aus nach rechts gerückt werden muß. Da sich der Hebel selbst gegen die Uhr bewegt, so muß das Reibungsmoment (vergl. den Pfeil R), welches die Reaktion $P + Q + G$ hervorruft, auch mit der Uhr drehen, d. h. die Reaktion muß nach links verschoben werden, um es graphisch darzustellen. Diese Beziehungen sind für $a = b$ und $c = 0$ in Fig. 430 dargestellt.

Man hat nun ohne weiteres für einen Punkt der Vertikalen der verschobenen Reaktion $[K]$ als Drehpunkt

$$P[a - f'(\varrho + r)] = Q[a + f'(\varrho + r)] + G(f'r).$$

Dieses ist die oben, an erster Stelle entwickelte Gleichung für $\varrho_1 = \varrho_2$, $c = 0$ und $a = b$, falls f' durch f_z ersetzt wird.

Da das System $[P]$, $[G]$, $[Q]$ und $[K]$ ein System im Gleichgewichte bildet, so ist auch P leicht graphostatisch zu bestimmen, falls $[G]$ und $[Q]$ gegeben sind. Für das Kraftеck, welches obiger Folge entspricht, ist 0 bezw. 4 nicht gegeben, so daß noch der Polstrahl I bezw. V fehlt; er ergiebt sich aus der Hauptfigur, weil sich das Seileck schließt, und kann in die Nebenfigur

übertragen werden, so daß man dort P und damit auch K findet. Diese Bestimmung ist innerhalb der Grenzen der zeichnerischen Darstellung genau.

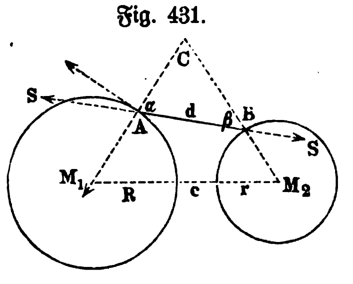
Für die Gegenbewegung, bei der sich B senkt, rücken $[P]$ und $[Q]$ auf die linke Seite ihrer Kreise, $[K]$ auf die rechte Seite seines Kreises.

Man erhält jetzt den anderen (kleineren) Wert von P, der denselben Werten von $[G]$ und $[Q]$ entspricht.

Der Hebel bleibt in Ruhe, solange das thatsächlich verwendete P in den Grenzen bleibt, welche die beiden oben bestimmten Werte von P anzeigen.

7. **Quetschwalzen.** Es stellen die beide Kreise M_1 und M_2 (Fig. 431) von den Halbmessern R und r den normalen Querschnitt zweier Quetschwalzen vor, deren geringste Entfernung gleich e sein mag. Zwischen beide Walzen werde ein Körper gesteckt, dessen Dimensionen größer als der Abstand der beiden Walzen sein mögen, und welcher dieselben in den Punkten A und B berührt. Wird der Körper durch irgend eine Kraft zwischen die Walzen gedrängt und dann sich selbst überlassen, so soll derselbe von den Walzen erfaßt und durchgezogen werden. Für diese Bedingung sind die Radien der Walzen zu bestimmen.

Fig. 431.



Bei dem Eindrücken des Körpers zwischen die Walzen entsteht in AB eine Spannung S, die im Punkte A von B nach A und im Punkte B von A nach B wirksam gedacht werden muß. Zerlegen wir dieselbe nach tangentialer und normaler Richtung in die Komponenten $S \sin\alpha$, $S \cos\alpha$ bezw. $S \sin\beta$, $S \cos\beta$, so sind die Normalkomponenten als die Ursache der bei A und B entstehenden Reibungen anzusehen, und es muß, damit der Körper von den Walzen gefaßt werde, die Reibung an beiden Punkten gleichzeitig größer, als das Streben zurückgestoßen zu werden, d. h. als die betreffende Tangentialkomponente sein, d. h. man hat

$$f S \cos\alpha > S \sin\alpha,$$

und

$$f_1 S \cos\beta > S \sin\beta,$$

wenn f und f_1 die Reibungskoefficienten für die beiden Walzen bezeichnen.

Ist nur eine dieser Bedingungen erfüllt, so wird der Körper vor den Walzen eine Drehung erfahren, und findet keine derselben statt, so bleibt der Körper in Ruhe. Aus den obigen Ungleichheiten ergiebt sich hiernach, als Bedingung des Einziehens

$$\operatorname{tang}\alpha < f$$

gleichzeitig mit

$$\operatorname{tang}\beta < f_1.$$

Nehmen wir $\alpha = \beta$ und ist f der kleinere der beiden Reibungskoefficienten, so reduzieren sich die beiden Ungleichheiten auf die eine

$$\operatorname{tang}\alpha < f \quad \text{oder} \quad \alpha < \varphi.$$

Es sei $AB = d$ die Dicke des durch die Walzen zu ziehenden Körpers, so ergiebt sich aus der Figur für $\gamma = 180^0 - \alpha - \beta$

$$M_1 M_2^2 = (M_1 C - M_2 C)^2 + 4 M_1 C \,.\, M_2 C \sin \frac{\gamma^2}{2},$$

d. h. für $\alpha = \beta$ ist

$$2R = \frac{d^2 - e^2 + 2r(d \cos \alpha - e)}{2r \sin \alpha^2 - (d \cos \alpha - e)}.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich R berechnen, wenn r gegeben und die obige Bedingung dabei berücksichtigt wird. Für den Gleichgewichtszustand ist $\alpha = \varphi$ zu setzen, wodurch der Quotient rechts einen kleineren Wert erhält, so daß die Bedingung des Einziehens der Walzen durch die Ungleichheit ausgesprochen ist:

$$2R > \frac{d^2 - e^2 + 2r(d \cos \varphi - e)}{2r \sin \varphi^2 - (d \cos \varphi - e)}.$$

Haben die beiden Walzen gleichen Durchmesser, dann ist

$$2R = 2r > \frac{d - e}{1 - \cos \varphi}$$

oder

$$2R = 2r > \frac{(d - e)\sqrt{1 + f^2}}{\sqrt{1 + f^2} - 1}.$$

Wird die Walze vom Halbmesser R zu einer ebenen Platte, wie die Anordnung bei den Kollersteinen gegeben, so ist $R = \infty$ zu setzen, und wir erhalten

$$2r > \frac{d \cos \varphi - e}{\sin \varphi^2}$$

oder

$$2r > \frac{d\sqrt{1 + f^2} - e(1 + f^2)}{f^2}.$$

Ist die Walze vom Halbmesser R hohl, also eine Trommel, welche die andere Walze umschließt, so ist R negativ zu nehmen, und es findet sich in ähnlicher Weise wie oben die notwendige Bedingung, daß der absolute Wert von

$$2R < \frac{d^2 - e^2 + 2r(d \cos \varphi - e)}{-2r \sin \varphi^2 + (d \cos \varphi - e)}$$

sein muß.

Beim Walzprozesse ist z. B. für glühendes Eisen ($f = tg\,\varphi = 0{,}1$)

$$d - e < 0{,}01\,R \text{ für } R = r$$

zu setzen.

8. **Das Wellrad.** 1. Bei wagerechter Lage der Achse (vergl. S. 360) gilt, wie Fig. 432 zeigt, bei Vernachlässigung der Reibung als Bedingung des Gleichgewichtes, daß die Momente von [P] und [Q] einander aufheben. An Reibungen sind zu berücksichtigen die Reibungen in den Lagern und die Seilsteifigkeit. Für erstere muß man die Zapfendrucke kennen. Um diese zu bestimmen, zerlegen wir die Kräfte senkrecht und parallel zur Achse der Welle und zwar hier in vertikaler und horizontaler Richtung.

$[P]$ und $[Q]$, welche in Normalschnitten der Welle liegen, mögen mit der Vertikalen bezw. die Winkel α und β bilden und von dem Ende[1]) des Zapfens D bezw. die Abstände a und b haben, während das Gewicht der Welle $[G]$ von D den Abstand c habe und $DE = l$ ist. Es seien ferner die Halbmesser des Rades, der Welle und der Zapfen bezw. R, r, ϱ.

Man hat dann für die Drucke in D und E bezw. deren Horizontal- und Vertikalkomponenten

$$V_D = \frac{1}{l}\,[P(l - a)\cos\alpha + Q(l - b)\cos\beta + G(l - c)]$$

$$H_D = \frac{1}{l}\,[- P(l - a)\sin\alpha + Q(l - b)\sin\beta]$$

$$V_E = \frac{1}{l}\,[Pa\cos\alpha + Qb\cos\beta + Gc]$$

$$H_E = \frac{1}{l}\,[- Pa\sin\alpha + Qb\sin\beta].$$

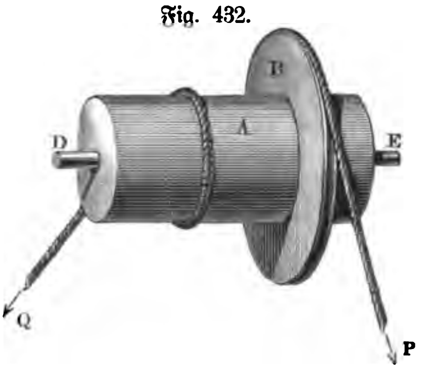
Die Drucke selbst sind $K_D = \sqrt{V_D^2 \text{ und } H_D^2}$ und $K_E = \sqrt{V_E^2 + H_E^2}$.

Man hat dann als Bedingung des Gleichgewichtes für P als Kraft und Q als Last, falls man den Koefficienten der Zapfenreibung mit f_z bezeichnet

$$1)\quad PR = Qr + f_z K_D \varrho + f_z K_E \varrho.$$

Werden die Kräfte $[P]$ und $[Q]$, wie Fig. 432 zeigt, durch Seile übertragen, so muß für $[P]$ das Ablaufen und für $[Q]$ das Auflaufen noch durch Einführung von $\mu' R$ und $\mu'' r$ bezw. statt R und r berücksichtigt werden.

Fig. 432.



Die Gleichung 1) für PR ist im allgemeinen, da P auch in $[K_D]$ und $[K_E]$ steckt, sehr verwickelt, man hilft sich dann in der Praxis dadurch, daß man P zunächst aus der Gleichung $PR = Qr$ berechnet, welche der Vernachlässigung der Reibung entspricht, mit diesem Werte von P die Rechnung für K_D und K_E durchführt und nun P gemäß der Gleichung 1) berechnet. Gelegentlich muß man dann mit diesem Werte von P nochmals K_D und K_E berechnen und damit wieder P verbessern u. s. f.

Sind $[P]$ und $[Q]$ vertikal ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), so ist

$$K_D = V_D = \frac{1}{l}\,[P(l - a) + Q(l - b) + G(l - c)] \text{ und } H_D = 0$$

$$K_E = V_E = \frac{1}{l}\,[Pa + Qb + Gc] \text{ und } H_E = 0.$$

[1]) Die Reaktionen treten im ungünstigsten Falle an den Enden auf, während sie im allgemeinen in der Zapfenmitte angenommen werden dürfen.

Man hat in diesem Falle ($\alpha = 0$, $\beta = 0$)

$$2)\quad PR = Qr + f_1\varrho(P + Q + G).$$

Bei Seilübertragung ist wieder für R und r bezw. $\mu' R$ und $\mu'' r$ einzusetzen.

Ist z. B. $[P]$ der Zahndruck eines Rades, das mit dem als Zahnrad konstruierten Rade B im Eingriff steht, und ist $[Q]$ an einem Seile befestigt, so wird Gleichung 2) für eine Seildicke δ in Centimetern bei mittlerer Steifigkeit

$$PR = Q(r + 0{,}06\,\delta^2) + f_1\varrho(P + Q + G)$$

und man hat

$$P = \frac{Q(r + 0{,}06\,\delta^2 + f_1\varrho) + Gf_1\varrho}{R - f_1\varrho}$$

und

$$P \sim Q\left(\frac{r + 0{,}06\,\delta^2 + f_1\varrho}{R} + f_1\frac{\varrho r}{R^2}\right) + G\cdot f_1\cdot\frac{\varrho}{R}.$$

Kommt auch für die Übertragung von Q keine Seilsteifigkeit in Frage, und ist auch noch G zu vernachlässigen gegenüber P und Q, so gilt

$$P \sim \frac{Q}{R}\left[r + f_1\varrho\frac{(R + r)}{R}\right].$$

2. Bei vertikaler Stellung der Achse (Erdwinde, Göpel 2c.), wobei D in Fig. 432 zum unteren Stützpunkte werden mag, ist auch noch die Reibung an der Stützfläche $\frac{1}{2}Gf\varrho$ zu berücksichtigen, welche durch das Gewicht G hervorgerufen wird (vergl. S. 554).

Die Werte K_D und K_E, welche der Mantelreibung der Zapfen entsprechen, sind je nach den Richtungen von $[P]$ und $[Q]$ zu berechnen, während $[G]$ keinen Beitrag dazu liefert.

Ist der Antrieb der Maschine z. B. durch die beiden Kräfte eines Paares gebildet, so sind K_D und K_E nur von Q abhängig, dessen Komponenten für D und E die Werte $Q\frac{l-b}{l}$ und $\frac{Qb}{l}$ haben. Man hat dann für gleiche Zapfen

$$\begin{aligned} Mo &= Qr + Q\frac{l-b}{l}\cdot f_1\varrho + \frac{Qb}{l}f_1\varrho + \tfrac{1}{2}Gf\varrho \\ &= Q(r + f_1\varrho) + \tfrac{1}{2}Gf\varrho. \end{aligned}$$

Ist bei Q die Seilsteifigkeit zu berücksichtigen, so ist r wieder zu ersetzen durch $r + 0{,}03\,\delta^2$ bis $r + \cdots 0{,}09\,\delta^2$ für δ als Seildicke in Centimetern.

3. Bei geneigter Achse müssen die Kräfte nach Richtung der Achse und senkrecht dazu zerlegt werden. Dies trifft stets zu für das Gewicht, welches dann bei einer Neigung α gegen den Horizont in der Richtung der Achse den Druck $G\sin\alpha$ und senkrecht dazu den Druck $G\cos\alpha$ ausübt; ersterer giebt die Reibung an der Stützfläche, letzterer verteilt sich auf die Stützpunkte D und E und trägt dort zur Mantelreibung bei.

Vergl. dazu S. 555.

9. Die Hirnsche Reibungswage und der Pronysche Bremszaum. Legt man auf eine Welle W vom Radius r ein Lager $L_1 L_2$ lose auf, welches an seiner unteren Schale einen Wagebalken trägt, so sucht die Welle infolge der Reibung Lager und Wagebalken mitzunehmen. Belastet man die linke Seite der Wage (vergl. Fig. 433) mit $P + Q$, während die rechte mit Q belastet ist, so wirkt P am Arme l der infolge der Reibung eintretenden Drehung der Wage entgegen. Giebt nun P durch Versuche die Größe, bei welcher der Balken der Wage horizontal steht, so ist Pl dem Moment der Reibung gleich. Bezeichnet man das Gewicht der Wage mit G, so ist der Druck, welcher das Reibungsmoment hervorruft, $G + 2Q + P$ und dieses selbst also $(G + 2Q + P)fr$, so daß also

$$Pl = (G + 2Q + P)fr$$

und

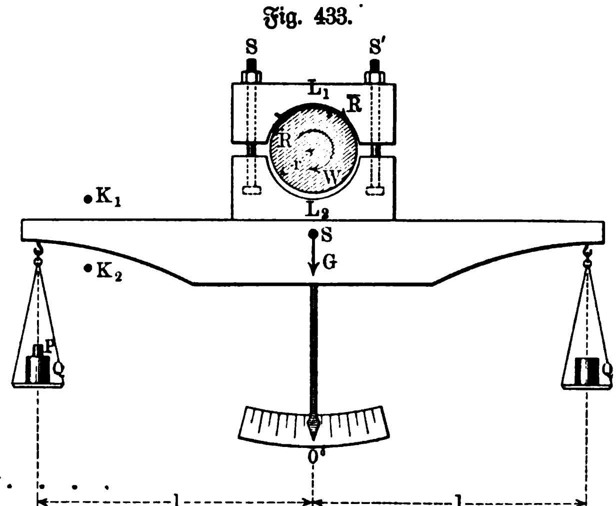
$$f = \frac{Pl}{(G + 2Q + P)r}$$

ist.

Mit dieser von Hirn eingeführten Vorrichtung läßt sich also der Reibungskoefficient f für Zapfenreibung bestimmen, wobei die Pflöcke K_1 und K_2 in der Wand dazu dienen, das Mitnehmen des Balkens zu verhindern.

Zeigt z. B. der Versuch für eine Welle aus Gußeisen und ein Bronzelager bei $l = 1$ m, $r = 10$ cm, $G = 100$ kg, $Q = 1000$ kg die horizontale Stellung des Balkens für $P = 16{,}8$ kg, so ist für diese Verhältnisse $f \sim 0{,}08$.

Fig. 433.

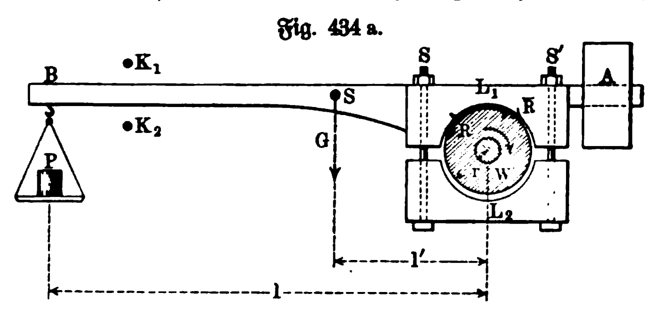


Ist f bestimmt, so kann dieselbe Vorrichtung dazu dienen, die Arbeitsleistung einer Maschine zu bestimmen. Wenn die Welle W etwa durch ein Zahnrad mit einer zweiten Welle W' in Verbindung ist und durch diese eine bestimmte Arbeit leistet, so macht sie dabei eine bestimmte Anzahl von Umdrehungen in der Minute. Wird die Verbindung von W und W' gelöst, so läuft W rascher. Legt man nun die Reibungswage auf die Welle W und belastet dieselbe mit Q bezw. $Q + P$, bis W wieder die frühere Anzahl n Umdrehungen in der Minute macht, so mißt Pl bei horizontaler Stellung des Wagebalkens das entstandene Reibungsmoment, dessen Arbeit genau so groß ist wie die Arbeit, welche W beim Eingriff mit W' im Betriebe leistet.

Es ist zweckmäßiger, die Belastungen Q durch Anziehen der Lagerschrauben S und S' zu ersetzen, so daß man mit einer Schale für P aus-

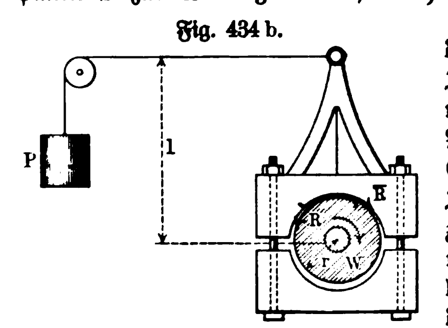
kommt, und demnach auch nur die linke Hälfte des Wagebalkens gebraucht. Man gelangt dann zu einer Vorrichtung, die bereits vor der Hirnschen Reibungswage von Prony eingeführt worden ist, zu dem Pronyschen Zaum. Man pflegt dabei den halben Wagebalken an der oberen Lagerhälfte anzubringen, wie Fig. 434 a zeigt. Statt der anderen Hälfte des Wagebalkens muß dann bei A ein- für allemal ein Gewicht angebracht werden, so daß der

Fig. 434 a.



unbelastete Zaum bei ruhender Welle W horizontal steht, falls man nicht das Gewicht G der linken Hälfte des Wagebalkens, welches in dem Schwerpunkte S zur Wirkung kommt, durch sein Moment $l'G$ berücksichtigen will.

Fig. 434 b.



Bei Versuchen legt man zunächst die obere und die untere Backe des Zaumes locker auf, verschraubt sie leicht und belastet bei B; dabei dienen die Pflöcke K_1 und K_2 in der Wand zur Sicherheit gegen das Schleudern des Zaumes. Man zählt nun die Tourenzahl für W, entweder unmittelbar oder mit Hülfe eines Velocimeters, und bringt sie durch abwechselndes Anziehen der Schrauben S und S' und durch Vermehrung der Belastung bei B auf den Wert n, den die Welle W beim Eingriff mit W' hatte. Ist dieser Zustand erreicht, so ist die Arbeitsleistung im Betriebe für W dieselbe wie jetzt, wo ihre Arbeitsleistung in der Überwindung der Reibung besteht. Bezeichnet Mo das Moment der Reibung, welches überwunden wird, so ist, falls das Gegengewicht A angebracht ist,

$$Mo = P \cdot l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 183)$$

Die Arbeit für eine Umdrehung ist $Mo \cdot 2\pi$, für n Umdrehungen also $Mo \cdot 2\pi \cdot n$, so daß in der Sekunde

$$\frac{Mo \cdot 2\pi \cdot n}{60}$$

Meterkilogramm Arbeit geleistet werden, oder in Pferdestärken

$$\frac{Mo \cdot 2\pi \cdot n}{60 \cdot 75} = 0{,}001\,396\,n \cdot Mo \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 184)$$

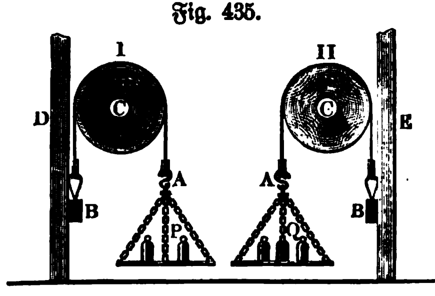
Würde der Balken von der Welle mitgenommen, so hätte B die Geschwindigkeit $c = \frac{2\pi l \,.\, n}{60}$, so daß die Arbeitsleistung in der Sekunde für $Mo = Pl$ auch durch $P \,.\, c$ dargestellt werden kann.

Giebt z. B. der Versuch $P \sim 50$ kg für $l = 2$ m und für $n = 100$, so ist die Arbeitsleistung von W bestimmt als 13,96 $P \,.\, S$.

In Bezug auf die Versuche mag noch bemerkt werden, daß man den Zaum nicht unmittelbar mit der Welle in Berührung bringt, sondern auf dieser (um sie zu schonen) eine Bremsscheibe befestigt.

In Fig. 434 b ist noch eine Vorrichtung dargestellt, bei welcher das Gewicht des Balkens unter allen Umständen außer Betracht bleibt, weil hier eine senkrechte Achsenstellung des Balkens eingeführt ist.

Fig. 435.



Derartige Vorrichtungen wie der Pronysche Zaum heißen Bremsdynamometer. Ihre einfachste Form ist in Fig. 435 dargestellt, wo die Reibung durch einen belasteten Gurt ausgeführt wird. Werden für die Anordnungen I und II die Belastungen P und Q so bestimmt, daß die Welle C dieselbe Tourenzahl n erhält, welche sie im Betriebe hat, so ist für I die Spannung von B durch Q und für II die Spannung von B durch P gegeben. Bezeichnet man die Reibung durch R, so ist also in beiden Fällen

$$Q = P + R,$$

d. h. man hat $R = Q - P$, so daß für einen Wellenradius r das Moment der Reibung $r(Q - P)$ und ihre Arbeitsleistung

$$\frac{r(Q - P) \,.\, 2\pi \,.\, n}{60 \,.\, 75} P \,.\, S \quad \ldots \ldots \quad 185)$$

ist.

10. Reibungsrollen und Reibungsräder. Um die Reibung eines Zapfens vom Halbmesser r zu vermindern, legt man ihn, wie Fig. 436 (a. f. S.) zeigt, auf zwei Reibungsrollen I und II vom Halbmesser r', die selbst mit Zapfen vom Halbmesser ϱ in Lagern ruhen. Der Druck $[D]$ auf den Zapfen Z zerlegt sich in die Drucke $[N_1]$ und $[N_2]$, welche für die Zapfen von I und II die betreffenden Reibungsmomente liefern.

Statt des Reibungsmomentes Dfr, welches der unmittelbaren Auflagerung von Z entsprechen würde, sind also hier die Reibungsmomente $N_1 f \varrho$ und $N_2 f \varrho$ anzusetzen. Dabei ist der Vorgang des näheren so, daß in A_1 und A_2 bezw. für Z die Reibungen $[\overline{R}_1]$ und $[\overline{R}_2]$ entstehen, welchen für I und II bezw. die Reibungen $[R_1]$ und $[R_2]$ entsprechen.

Das Moment der äußeren Kräfte, welches für Z thatsächlich die Reibungen überwindet, ist

$$Mo = (\overline{R}_1 + \overline{R}_2) r.$$

Für I und II wirken $[R_1]$ und $[R_2]$ am Arme r', so daß

$$R_1 \,.\, r' = N_1 f \varrho \quad \text{und} \quad R_2 \,.\, r' = N_2 \,.\, f \,.\, \varrho$$

ist.

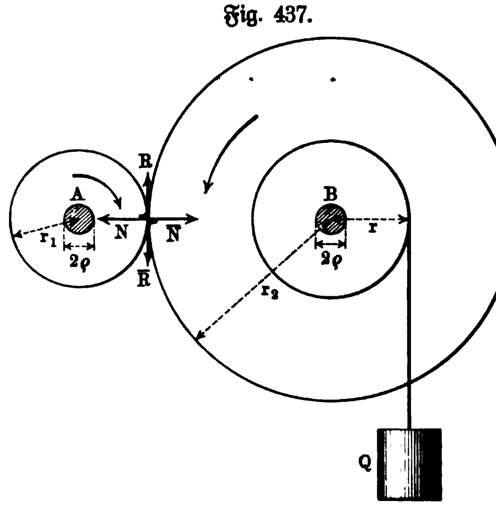
Man hat also

$$Mo = \frac{f \varrho r}{r'} (N_1 + N_2).$$

Fig. 436.

Sieht man von der geringen, gelegentlich des Kletterns des Zapfens besprochenen Ungleichheit von N_1 und N_2 ab, so ist für $2\,\varepsilon$ als Centriwinkel

Fig. 437.



$$N_1 = N_2 = \frac{D}{2 \cos \varepsilon},$$

d. h. man hat

$$Mo = \frac{\varrho}{r' \cos \varepsilon} (D f r).$$

Soll also gegenüber $D f r$ eine Ersparnis eintreten, so muß

$$\varrho < r' \cos \varepsilon$$

sein.

Für $\varepsilon = 60^\circ$ muß z. B. $2\,\varrho < r'$ sein.

Die Werte der Reibungen $[R_1]$ und $[R_2]$, welche nicht bestimmt zu werden brauchen, sind hier nicht etwa als $f N_1$ und $f N_2$ anzusehen, da die Flächen in A_1 und A_2 nicht aufeinander gleiten sollen, sie sind viel geringer.

Wir betrachten diesen Vorgang noch etwas genauer, wollen aber dabei den Zapfen Z durch ein Rad ersetzt denken, wie es Fig. 437 zeigt, bei der es sich um zwei Reibungsräder A und B handelt. Werden die Umfänge der Räder A und B durch die Kräfte $[N]$ und $[\overline{N}]$ gegeneinander gepreßt, so entstehen zugleich die tangentialen Widerstände $[R]$ und $[\overline{R}]$. Soll B, einschließlich der Überwindung der Zapfenreibung, eine bestimmte Arbeit leisten, so kann man sich diese durch das Aufwickeln eines Gewichtes Q am Arme r veranschaulichen, so daß

$$\overline{R} \, . \, r_2 = Q \, . \, r$$

ist.

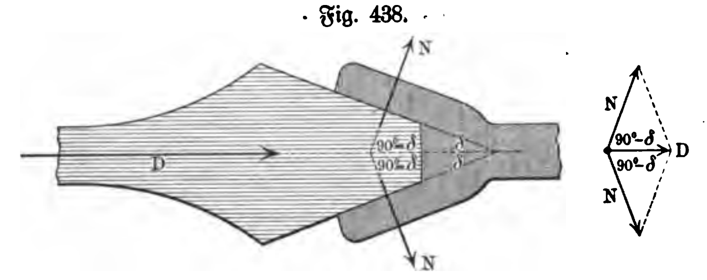
Dabei ist $\overline{R} < fN$, falls kein Gleiten stattfinden soll, so daß

$$\frac{Qr}{r_2} < fN \quad \text{oder} \quad N > \frac{Qr}{fr_2}$$

die Bedingung dafür ist, daß B durch Reibung von A mitgenommen wird.

Dabei ist f der Reibungskoefficient innerhalb der Bewegung.

Fig. 438.



Läßt man die Räder durch eine Keilnute (Keilräder) ineinander greifen, wie es Fig. 438 zeigt, so ist $N = \frac{D}{2 \sin \delta}$ und $2N = \frac{D}{\sin \delta}$. Demnach ist jetzt die Bedingung

$$\frac{D}{\sin \delta} > \frac{Qr}{fr_2} \quad \text{oder} \quad D > \frac{(Qr) \sin \delta}{fr_2}$$

zu erfüllen, d. h. in diesem Falle darf D kleiner sein als im vorigen Falle.

Nimmt man noch Rücksicht auf die Einpressung der Räder infolge ihrer Elasticität, so ist zu setzen

$$D > \frac{(Qr) \sin (\delta + \varphi)}{r_2 \sin \varphi}.$$

Für $\delta = 15^0$ und $f = 0{,}1$ ist $\frac{f}{\sin \delta} = 0{,}39$ und $\frac{\sin \varphi}{\sin (\varphi + \delta)} = 0{,}28$, so daß $D > \frac{Qr}{r_2} \cdot \frac{1}{0{,}39}$ im ersten Falle und $D > \frac{Qr}{r_2} \cdot \frac{1}{0{,}28}$ im zweiten Falle.

Bei Berücksichtigung der Zapfenreibung (f_z) sind für die Zapfen vom Halbmesser ϱ_1 und ϱ_2 die Momente $N \, . \, f_z \, . \, \varrho_1$ und $N \, . \, f_z \, . \, \varrho_2$ zu überwinden.

Das treibende Moment Mo für A hat dann für die Grenze des Gleitens den Wert

$$Mo = r_1 R + N \cdot f_z \cdot \varrho_1 = N(fr_1 + f_z \varrho_1).$$

Ebenso ist für B an der Grenze des Gleitens

$$Rr_2 = rQ + N \cdot f_z \cdot \varrho_2,$$

d. h.

$$rQ = N(fr_2 - f_z \varrho_2).$$

Daraus folgt

$$Mo = rQ \frac{fr_1 + f_z \varrho_1}{fr_2 - f_z \varrho_2} \sim rQ \cdot \frac{f_z}{f} \cdot \frac{r_1}{r_2} \left(\frac{f}{f_z} + \frac{\varrho_1}{r_1} + \frac{\varrho_2}{r_2} \right).$$

Reduziert man Mo auf den Umfang (r_1) und ebenso rQ auf den Umfang (r_2), so ist $Mo = r_1 K_1$ und $rQ = r_2 K_2$, so daß dann

$$K_1 \sim K_2 + K_2 \left(\frac{\varrho_1}{r_1} + \frac{\varrho_2}{r_2} \right) \cdot \frac{f_z}{f}$$

ist.

Soll die Arbeitsleistung von rQ einer bestimmten Anzahl $\overline{N}$ von Pferdestärken entsprechen, so hat man für eine Geschwindigkeit v von Q

$$\overline{N} \cdot 75 = Q \cdot v.$$

Dabei ist $v = \frac{2 r \pi \cdot n_2}{60}$, falls n_2 die Tourenzahl von B ist, so daß also

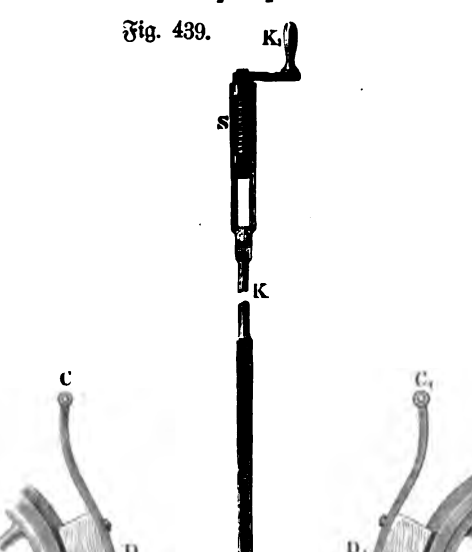
$$Qr = \frac{\overline{N} \cdot 75 \cdot 60}{2 \pi \cdot n_2} = 716{,}2 \cdot \frac{\overline{N}}{n_2}$$

und $K_2 = 716{,}2 \cdot \frac{\overline{N}}{n_2} \cdot \frac{1}{r_2}$ ist (oder auch $= 716{,}2 \frac{\overline{N}}{n_1} \cdot \frac{1}{r_1}$, falls sich n_1 und r_1 auf das erste Rad bezieht).

Ist x die Anzahl $P.S$, welche A bewegt, so ist

$$x = \overline{N} \left[1 + \left(\frac{\varrho_1}{r_1} + \frac{\varrho_2}{r_2} \right) \frac{f_z}{f} \right].$$

Fig. 439.



11. Bremsvorrichtungen. Als Beispiel mag zunächst die in Fig. 439 dargestellte Backenbremse behandelt werden. Sie besteht aus einem oder zwei Stücken Holz oder Gußeisen, die gegen den Umfang einer Welle oder eines darauf sitzenden Rades gedrückt werden, hierdurch Reibung erzeugen, um mit Hülfe derselben eine vorhandene Bewegung zu vernichten oder zu verlangsamen.

Es gehören hierzu die sogenannten Schleifzeuge, die bei den Fuhrwerken zur Anwendung kommen.

Es soll der Reibungswiderstand bei einem Schleifwerke (Fig. 439) für Eisenbahnräder berechnet werden, bei welchem das Bremsen an zwei Rädern A und A_1 zu gleicher Zeit bewirkt wird. Zu dem Ende wird der Kniehebel DED_1 mittels der Schraube S in eine möglichst horizontale Lage gebracht, wodurch die beiden Laschen B und B_1 gegen die Radumfänge gedrückt werden. Die Kraft an der Kurbel sei K_1, Länge derselben a, mittlerer Halbmesser der Schraube r_m, h deren Ganghöhe, α_m der mittlere Neigungswinkel und f Reibungskoefficient für die Bewegung der Schraube. Weiter sei β der Winkel zwischen einem Arme des Kniehebels und der Zugstange EK, f_1 der Reibungskoefficient zwischen Radumfang und Backe.

Für diese Annahmen ist

$$R = f_1 \frac{a}{r_m} K_1 \cot(\alpha_m + \varphi) \, tg\, \beta.$$

Die Kraft K, mit welcher die Stange in E aufwärts zieht, ist für die Schraube als Last aufzufassen, so daß man hat

$$K_1 a = K r_m \, tg\,(\alpha_m + \varphi)$$

oder

$$K = \frac{K_1 a}{r_m \, tg\,(\alpha_m + \varphi)}.$$

Der horizontale Druck, den der Kniehebel (vergl. S. 302) auf B oder auf B_1 ausübt, ist $\frac{1}{2} K \, tg\, \beta$, die entsprechende Reibung also $\frac{1}{2} f_1 K \, tg\, \beta$.

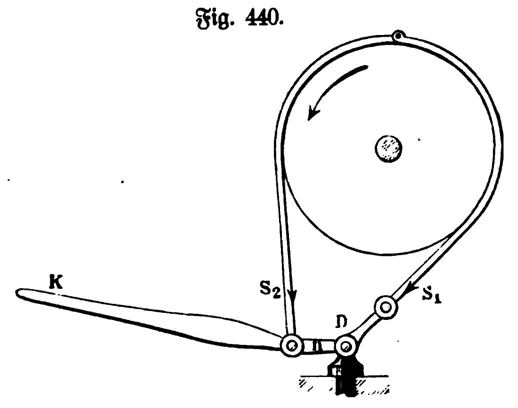
An beiden Backen zusammen beträgt also die Reibung

$$R = f_1 \frac{K_1 a}{r_m} \cot(\alpha_m + \varphi) \, . \, tg\, \beta.$$

Wir betrachten ferner eine Kegelbremse, wie sie bei Kuppelungen vorkommt.

Die Reibung mag auf den Mänteln zweier normalen Kegel hervorgebracht werden. Der Kegel auf der treibenden Welle ist fest und bietet der Reibung eine konkave Oberfläche dar, bei dem anderen, der auf der getriebenen Welle verschiebbar ist, geschieht die Reibung auf der konvexen Oberfläche.

Fig. 440.



Es ist das Reibungsmoment Mo zu bestimmen, wenn der verschiebbare Kegel mit einem Drucke P, in Richtung der Achse wirksam, gegen den festen geschoben wird. Zu dem Ende sei r_1 der äußere, r_2 der innere Halbmesser des reibenden Kegelmantels, α der Winkel, den die Seite des Kegels mit der Achse bildet, und f der Reibungskoefficient. Man hat hier

$$Mo = \frac{2}{3} \frac{P \, . \, sin \, \varphi}{sin(\alpha + \varphi)} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Der Druck P wird gewöhnlich durch eine Rückgabel mit doppelter Hebelverbindung übertragen, wonach sich P durch die wirksame Kraft K und die Hebelarme a, b, a' und b' wie folgt bestimmt

$$P = \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} K.$$

Die Kraft P_1, welche bei derartigen Bremsen im Zapfen der inneren Büchsennabe wirksam sein muß, um die Bremse zu lösen, ist

$$P_1 = P \frac{sin(\varphi - \alpha)}{sin(\varphi + \alpha)}.$$

Wir betrachten weiter eine Bandbremse, wie sie Fig. 440 (a. v. S.) darstellt. Ist Mo das Moment der an dem Hebel wirksamen Kraft [K] für D als Drehpunkt, so ist

$$Mo = n S_2,$$

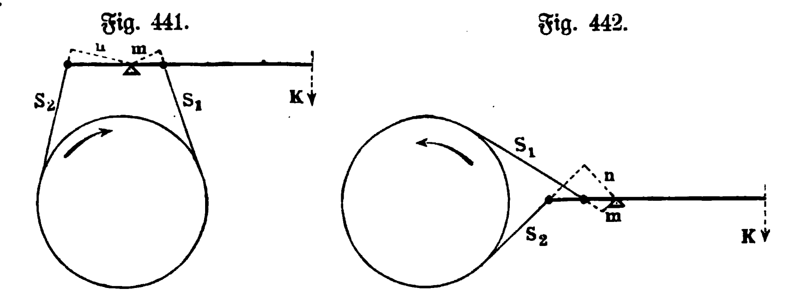
da [S_1] durch den Drehpunkt geht.

Die Reibung für die Scheibe ist $R = S_1 - S_2 = S_2 (e^{f \, arc \, . \, \alpha} - 1)$, so daß

$$Mo = n \cdot \frac{R}{e^{f \, arc \, . \, \alpha} - 1}$$

ist.

Fig. 441. Fig. 442.



Dient die Reibung dazu, eine Last Q am Arme r_2 gleichförmig zu bewegen, so ist für einen Scheibenhalbmesser r_1

$$R \, . \, r_1 = Q \, . \, r_2,$$

d. h. man hat

$$Mo = n \, . \, Q \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{e^{f \, arc \, . \, \alpha} - 1}.$$

In den Fig. 441 und 442 sind sogenannte Differentialbremsen dargestellt, bei denen beide Bandenden an einem zweiarmigen Hebel angebracht sind. Hier ist

$$Mo = S_1 m - S_2 n.$$

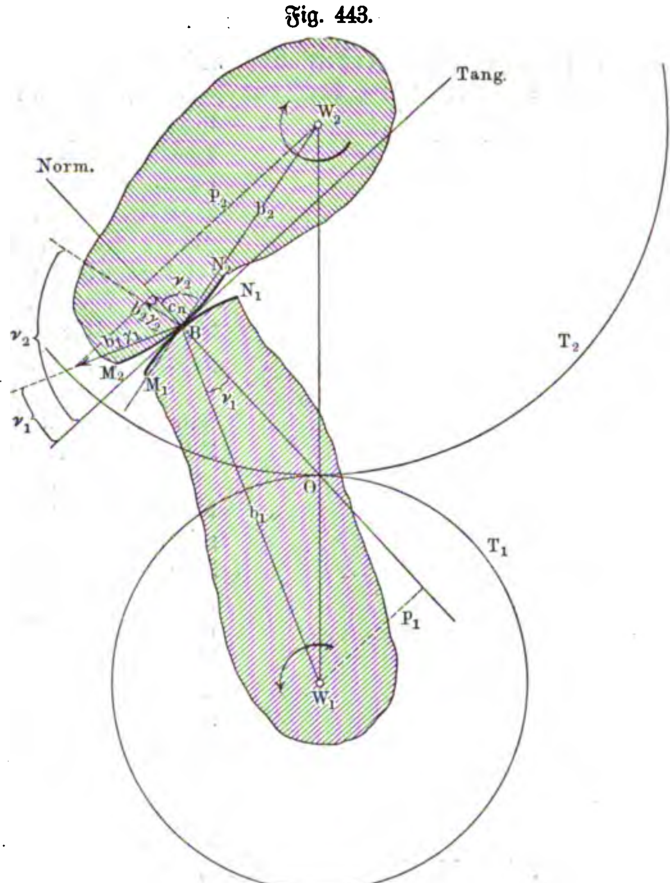
Da $S_1 = S_2 \, . \, e^{f arc \, . \, \alpha}$ ist, so kann Mo beliebig klein gemacht werden, wenn man m und n so wählt, daß

$$\frac{n}{m} \sim e^{f \operatorname{arc} . \alpha}.$$

Man kann hier statt der Kraft K am Ende des Hebelarmes allein das Gewicht des Hebelarmes benutzen.

12. Zahnräder. Wir betrachten hier den Fall, in dem die Wellen der Räder parallel gelagert sind, so daß es sich um eine sogenannte cylindrische Verzahnung (vergl. S. 150) handelt. Die beiden Wellenachsen mögen in Fig. 443 senkrecht zur Ebene der Zeichnung durchtreten, in den Punkten W_1

Fig. 443.



und W_2. Die Räder, welche auf W_1 und W_2 sitzen, mögen sich in B berühren, wobei $M_1 N_1$ das Profil eines Zahnes für W_1 und $M_2 N_2$ das Profil eines Zahnes für W_2 darstellt.

Ist γ_1 die Winkelgeschwindigkeit für W_1, so hat B als Punkt von W_1 die Geschwindigkeit $[b_1 \gamma_1]$. Bei der Übertragung der Bewegung erhält W_2 eine Winkelgeschwindigkeit γ_2, so daß B als Punkt von W_2 die Geschwindigkeit $[b_2 \gamma_2]$ hat; es sind $[b_1 \gamma_1]$ und $[b_2 \gamma_2]$ bezw. senkrecht zu $W_1 B$ und $W_2 B$.

Zerlegt man diese Geschwindigkeiten in Richtung der Tangente und der Normale von B, so müssen die Normalkomponenten (c_n) infolge des Eingriffes übereinstimmen, d. h. man hat

$$(b_1 \gamma_1) \sin \nu_1 = (b_2 \gamma_2) \sin \nu_2.$$

Da nun die Lote p_1 und p_2 bezw. aus W_1 und W_2 auf die Normale die Werte $p_1 = b_1 \sin \nu_1$ und $p_2 = b_2 \sin \nu_2$ haben, so gilt auch

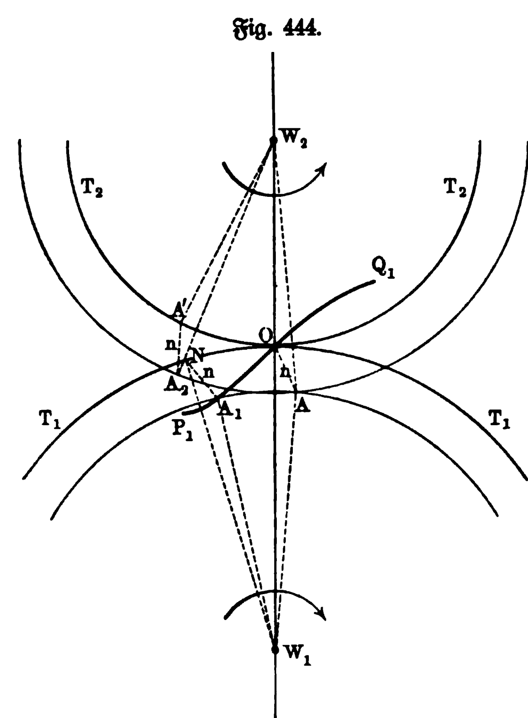
$$p_1 \gamma_1 = p_2 \gamma_2 \quad \text{oder} \quad p_1 : p_2 = \gamma_2 : \gamma_1.$$

Daraus folgt, da $p_1 : p_2 = OW_1 : OW_2$ ist,

$$OW_1 : OW_2 = \gamma_2 : \gamma_1.$$

Soll also das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten $\gamma_1 : \gamma_2 = \varepsilon$ bei der Bewegung konstant bleiben, so muß die Normale im Berührungspunkte zweier Zähne stets durch ein und denselben Punkt O der Centrale $W_1 W_2$ gehen, und zwar teilt O die Centralstrecke $W_1 W_2$ im umgekehrten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten γ_1 und γ_2.

Fig. 444.



Man nennt diese Beziehung das Grundgesetz der Verzahnung.

Schlägt man also um W_1 mit $W_1 O = r_1$ und um W_2 mit $W_2 O = r_2$ Kreise, so rollen diese Kreise bei der Bewegung für ein konstantes ε aufeinander ab. Diese Kreise heißen die Teilkreise (Primitivumfänge) der Verzahnung. Mit Hülfe der Teilkreise kann man für ein beliebiges Profil eines Zahnes von W_1 das zugehörige Profil eines Zahnes von W_2 bestimmen.

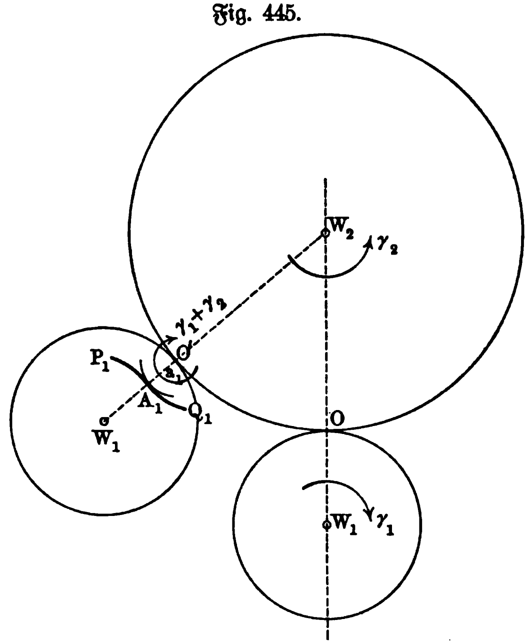
$P_1 Q_1$ in Fig. 444 sei die gegebene Kurve, welche das Zahnprofil für W_1 giebt. Kommt ein bestimmter Punkt A_1 von $P_1 Q_1$ bei der Bewegung mit einem Punkte A_2 der gesuchten Kurve $P_2 Q_2$ überhaupt in Berührung, so muß der Berührungspunkt A auf der Bahn von A_1 liegen, d. h. auf einem Kreise vom Radius $W_1 A_1$. Die Normale der Kurve $P_1 Q_1$ in A_1 geht durch O, wenn A_1 nach A gelangt ist. Da die Normale für die Lage A zum Teilkreise von W_1 dieselbe relative Lage hat wie für die Lage A_1, so kann man OA dadurch bestimmen, daß man die Strecke $A_1 N = n$ auf der

Normalen in A_1 mißt, d. h. A liegt auf einem Kreise um O vom Radius $OA = n$.

Der Ort der Berührungspunkte A heißt die Eingriffslinie.

Der Punkt A_2 des gesuchten Profiles P_2Q_2, der mit A_1 in A in Berührung ist, muß von W_2 den Abstand W_2A haben, d. h. auf einem Kreise um W_2 vom Radius W_2A liegen. Seine relative Lage zu A_1 findet man offenbar, indem man A als Punkt von W_1 nach A_1 zurückbewegt und zugleich die entsprechende Lage A_2 von A als Punkt von W_2 aufsucht. Sie entspricht dem Abrollen des Teilkreises von W_2 um $OA' = ON$, da W_1AO in die Lage W_1A_1N gelangt, wenn A als Punkt von W_1 nach A_1 zurückkehrt. Dabei nimmt W_2OA die Lage $W_2A'A_2$ ein, d. h. $A'A_2 = OA = n$. Demnach ist A_2 gegeben durch den Kreis um W_2 vom Radius W_2A und durch den Kreis um A' vom Radius n.

Fig. 445.



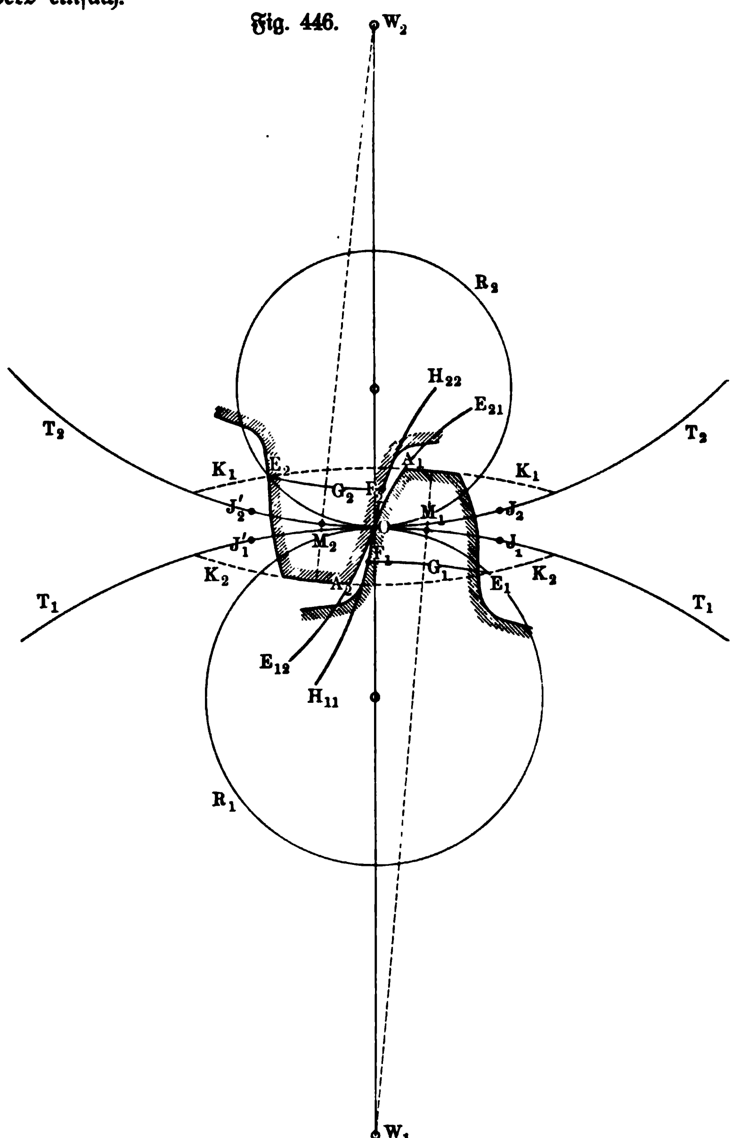
Hierauf gründet sich unmittelbar das eine der Reuleauxschen Verfahren für die Konstruktion des Profiles für W_2.

Eine andere Konstruktion (vergl. S. 149) ergiebt sich nach Poncelet, indem man das Abrollen von P_1Q_1 auf dem zu bestimmenden Profile P_2Q_2 näher untersucht. Man denkt sich dazu beiden Rädern außer ihren Winkelgeschwindigkeiten γ_1 und γ_2 noch die Winkelgeschwindigkeit $-\gamma_2$ erteilt, und zwar so (um W_2), daß W_2 ruht und die Relativbewegung von W_1 gegen W_2 untersucht werden kann. Es rollt jetzt der Teilkreis von W_1 (zugleich mit seinem Profile P_1Q_1) auf dem ruhenden Teilkreise von W_2 ab, so daß die verschiedenen Lagen von P_1Q_1 die gesuchte Linie P_2Q_2 einhüllen. Dabei ist die Winkelgeschwindigkeit von W_1 für den Berührungspunkt O' der Kreise als Drehpunkt $\gamma_1 + \gamma_2$. Ein Punkt A_1 des Profiles P_1Q_1 beschreibt also in der Zeit τ, für $lim\,\tau = 0$ den Bogen $a_1(\gamma_1 + \gamma_2)\tau$, falls $O'A_1 = a_1$ gesetzt wird. Thatsächlich geht durch O in der Zeit τ der Bogen $(r_1\gamma_1)\tau$ vom Teilkreise W_1 und der Bogen $(r_2\gamma)\tau$ von dem Teilkreise W_2. Bezeichnet man diese Bogen, welche einander gleich sind, durch b, so ist $a_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)b$ der Bogen für A_1 (vgl. Fig. 445).

Für die Profile werden die cyklischen Kurven [Cykloide, Epicykloide, Hypocykloide (Pericykloide) und Kreisevolvente] verwandt, welche durch Ab-

rollen von Kreisen und Geraden auf Kreisen entstehen; die Konstruktion der Normalen (mit Hülfe des augenblicklichen Drehpunktes) ist für diese Kurven besonders einfach.

Fig. 446.



Für die Kreisevolvente ist die Eingriffslinie eine Gerade, für die anderen Profilkurven ein Kreis.

In Fig. 446 sind zur Erzeugung der Zahnprofile die beiden Rollkreise (Wälzungskreise oder Radkreise) R_1 und R_2 eingeführt. Durch Abrollen von R_1 innerhalb des Teilkreises T_1 entsteht die Hypocykloide $OH_{1,1}$, durch Ab-

rollen von R_1 auf dem Teilkreise T_2 entsteht die Epicykloide $OE_{1,2}$. Durch Abrollen von R_2 innerhalb des Teilkreises T_2 entsteht die Hypocykloide $OH_{2,2}$, durch Abrollen von R_2 auf dem Teilkreise T_1 entsteht die Epicykloide $OE_{2,1}$. Schlägt man mit der halben Zahnbreite um O einen Kreis (M_1 und M_2), so sind die Durchmesser W_1M_1 und W_2M_2 die Symmetralen der beiden Zähne, so daß die bereits bestimmten Kurven um sie geklappt werden müssen, um die äußeren Zahnflanken zu geben. Durch die Kreise K_1 und K_2, welche Kronenkreise (Kopfkreise) genannt werden, und durch entsprechende Kreise, welche Wurzelkreise (Fußkreise) genannt werden, begrenzt man die Zähne vollständig.

Die Eingriffslinie liegt auf den beiden Rollkreisen; die Eingriffsbahn, welche wirklich benutzt wird, wird auf ihnen durch die Kronenkreise abgegrenzt, so daß sie durch E_1OE_2 dargestellt wird.

Sind von den Teilkreisen T_1 und T_2 die Bogen J_1OJ_1' und J_2OJ_2' zur Erzeugung der Zähne wirklich benutzt worden (Eingriffsbogen), so ist $E_1OE_2 = J_1OJ_1' = J_2OJ_2'$. Bei Beginn des Eingriffes in E_1 berühren sich dort A_2 und F_1, so daß für die gezeichnete Stellung OA_2 und OF_1 in Berührung gewesen sind, deren relative Verschiebung $\widehat{OA_2} - \widehat{OF_1}$ beträgt. Bei der weiteren Bewegung kommen schließlich in E_2 die Punkte A_1 und F_2 zur Berührung, so daß nach der gezeichneten Stellung OA_1 und OF_2 zur Berührung gekommen sind, deren relative Verschiebung $\widehat{OA_1} - \widehat{OF_2}$ beträgt.

Bezeichnet man den mittleren Normaldruck für den ganzen Eingriff durch N, so ist die mittlere Reibung durch fN darstellbar, und ihre Arbeit $\mathfrak{A}_\mathfrak{R}$ ist im Mittel

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}_\mathfrak{R} &= fN[(\widehat{OA_2} - \widehat{OF_1}) + (\widehat{OA_1} - \widehat{OF_2})] \\ &= fN[(\widehat{OA_2} - \widehat{OF_2}) + (\widehat{OA_1} - \widehat{OF_1})]\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 186)$$

Da $[N]$ während des ganzen Eingriffes in seiner jeweiligen Richtung die Bahn E_1OE_2 zurücklegt, so ist die dabei geleistete Arbeit

$$\mathfrak{A} = N(\widehat{E_1O} + \widehat{OE_2}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 187)$$

Man hat also den verhältnismäßigen Verlust an Arbeit durch gleitende Reibung in Bezug auf die Nutzarbeit gegeben als

$$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{A}_\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 188)$$

Die entwickelte Formel ist die Grundlage für die graphische Bestimmung der Reibungsarbeit bei Zahnrädern.

Ihre Umsetzung in eine, für die Rechnung geeignete Form, scheitert naturgemäß daran, daß die Ausdrücke für die Bogen, welche in ihr auftreten, äußerst verwickelt sind.

Man pflegt deshalb einen rechnerischen Ausdruck für die sogenannte Gradflankenverzahnung zu entwickeln und diesen auch für andere Verzahnungen zu benutzen, was bei der Unsicherheit in Bezug auf die Bestimmung von f und N sehr wohl zu rechtfertigen ist.

Bei der äußeren Gradflankenverzahnung, welche Fig. 447 darstellt, greift von dem einen Rade nur die Krone, von dem anderen nur die Wurzel ein, so daß der ganze Eingriff auf der einen Seite von O erfolgt.

Hier ist

$$\mathfrak{B} = f \cdot \frac{\widehat{OA_2} - \widehat{OF_1}}{\widehat{OE_1}}.$$

Fig. 447.

Dreht man die Räder zurück nach E_1, so daß $\widehat{O''E_1}$ mit $\widehat{OA_2}$ und $\widehat{E_1O'}$ mit $\widehat{OF_1}$ kongruent ist, so ist

$$\mathfrak{B} = f \cdot \frac{\widehat{O''PO'}}{\widehat{OE_1}},$$

oder auch

$$\mathfrak{B} \sim \frac{p_1 + p_2}{\widehat{OE_1}},$$

falls man die Projektionen p_1 und p_2 auf die Achsenrichtung $W_1 W_2$ einführt.

Sind r_1 und r_2 die Radien der Teilkreise, so ist

$$2r_1 \cdot p_1 = \overline{OO'}^2 \sim \widehat{OO'}^2$$
$$2r_2 \cdot p_2 = \overline{OO''}^2 \sim \widehat{OO''}^2.$$

Man hat also

$$\mathfrak{B} \sim f \cdot \left(\frac{\widehat{OO'}^2}{2r_1} + \frac{\widehat{OO''}^2}{2r_2}\right) \cdot \frac{1}{\widehat{OE_1}}.$$

Bezeichnet man $\widehat{OE_1}$, d. h. die thatsächlich benutzte Eingriffslinie, durch e, so ist, da $\widehat{OO'} = \widehat{OO''} = \widehat{OE_1} = e$ ist,

$$\mathfrak{B} \sim \tfrac{1}{2} f\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 189)$$

Für die sogenannte innere Verzahnung (Centren W_1 und W_2 auf derselben Seite von O) gilt ebenso

$$\mathfrak{B} \sim \tfrac{1}{2} f\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) e.$$

Da die Entfernung zweier Zähne, gemessen im Teilkreisbogen, als Teilung t bezeichnet wird, so gilt für die Zähnezahlen z_1 und z_2

$$2\pi r_1 = z_1 t \quad \text{und} \quad 2\pi r_2 = z_2 t.$$

Andererseits ist $e = \varphi t$, wobei φ proportional ist zur Dauer des Eingriffes. Man hat also auch

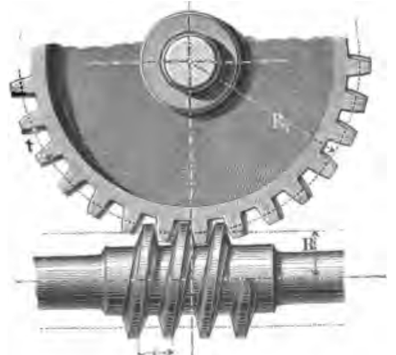
$$\mathfrak{B} = \pi f\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right) \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 190)$$

Dabei gilt das Zeichen + für äußere Verzahnung (Vollräder), das Zeichen — für innere Verzahnung (Hohlräder).

Für f gaben die Versuche 0,3 bis 0,1, bei gut eingelaufenen Rädern kann f auch noch unter 0,1 sinken.

13. Die Schraube ohne Ende. Wenn sich die Wellen zweier Räder schneiden, anstatt parallel zu sein, so verwendet man Kegelräder (konische Verzahnung, vergl. S. 150). Kreuzen sich die Wellen, so sind wiederum besondere Radformen einzuführen, falls man nicht durch Einführung einer Hülfswelle das Räderpaar durch zwei Paare konischer oder durch ein Paar cylindrischer und ein Paar konischer Räder ersetzt.

Fig. 448.



Kreuzen sich die Wellen unter rechtem Winkel, so kann man mit einer Schraube (Schnecke) und einem Schraubenrade die Übertragung der Bewegung (Schraube ohne Ende) bewirken (Fig. 448).

Das Moment Mo für die Schraube, für welche der Druck P des Rades als Last anzu-

sehen ist, beträgt nach Formel 171) für α_m als Steigung der mittleren Schraubenlinie

$$Pr_m \, tg\,(\alpha_m + \varphi).$$

Außerdem ist die Reibung im Lager zu berücksichtigen, wobei namentlich das einseitige Anpressen der Schraube durch [P] in Frage kommt.

Man kann das entsprechende Moment nach den Formeln der Zapfenreibung bestimmen oder dasselbe durch Versuche feststellen. Man pflegt ihm dadurch Rechnung zu tragen, daß man 10 Proz. zuschlägt und also mit

$$Mo = 1{,}1\,Pr_m \,.\, tg\,(\alpha_m + \varphi)$$

rechnet.

Bei guter Ölung ist $tg\,\varphi = 0{,}1$ zu setzen.

Selbsthemmung tritt also ein für $tg\,\alpha_m < 0{,}1$.

Den Achsendruck der Schnecke beseitigt man dadurch, daß man zwei Schnecken auf derselben Welle verwendet, von denen die eine rechts, die andere links gewunden ist, während sie sonst miteinander übereinstimmen, und diese zwei im Eingriff befindliche Schraubenräder mit parallelen Achsen treiben läßt.

Für die Reibung beim Gleiten der Zähne in ihrer Breitenrichtung setzt man den verhältnismäßigen Arbeitsverlust an als

$$\mathfrak{V} = \frac{f\left(\dfrac{2\,\pi\,r_m}{t} + \dfrac{t}{2\,\pi\,r_m}\right)}{1 - \dfrac{t}{2\,\pi\,r_m} f},$$

falls t die Teilung und r_m den mittleren Halbmesser der Schrauben (Schnecken) bezeichnet.

Den Arbeitsverlust durch die eigentliche Zahnreibung hat man für z als Zähnezahl und φ als Dauer des Eingriffes durch

$$\mathfrak{V} = \frac{\pi f}{z}\left(\tfrac{1}{2}\,\varphi^2 - \varphi + 1\right)$$

zu bestimmen.

Wird das Schraubenrad zum Heben einer Last Q am Arme r benutzt, so ist für R_1 als Hebelarm von P

$$PR_1 = Qr$$

bei Vernachlässigung der Widerstände im Lager des Rades bezw. der Seilsteifigkeit.

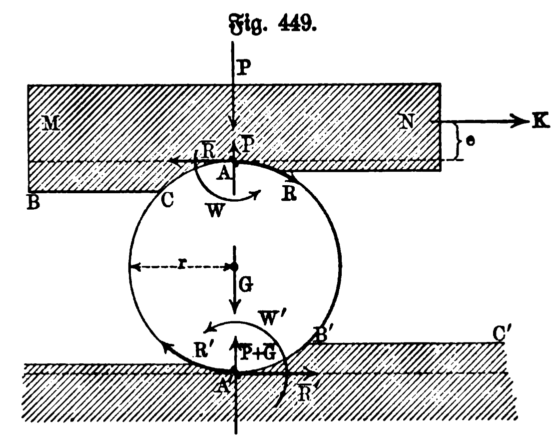
Ersetzt man noch Mo durch eine Kraft K am Arme l, so ist in diesem Falle

$$K = 1{,}1\,Q \cdot \frac{r}{R_1} \cdot \frac{r_m}{l} \cdot tg\,(\alpha_m + \varphi).$$

14. Gleichförmige Bewegung von Fuhrwerken. Wird ein Körper MN auf eine Walze gelegt, wie es Fig. 449 darstellt, so tritt an den Punkten A und A' rollende Reibung auf, wenn die Kraft K in Wirksamkeit tritt. Wäre die Walze mit dem Boden fest verbunden, so würde bei A die gleitende Reibung fP auftreten. Wäre die Walze mit dem Körper MN fest ver-

bunden, so würde bei A' die gleitende Reibung $f'(P + G)$ auftreten. Da beides nicht der Fall ist, entwickelt sich bei A nur ein Bruchteil R von fP und bei A' nur ein Bruchteil R' von $f'(P + G)$. Dafür findet ein Einsinken der Walze in den Boden und ein Einsinken des Körpers gegen die Walze statt, wie es die Linien ABC und $A'B'C'$ in starker Verzerrung darstellen. Diesem Einsinken entspricht für A als Drehpunkt das Moment der rollenden Reibung $W = P \cdot f_r$ und für A' als Drehpunkt das Moment der rollenden Reibung $W' = (P + G)f_r'$.

Fig. 449.



Betrachtet man nur die Walze, so ist für A als Drehpunkt $R' \cdot 2r = W$ und für A' als Drehpunkt $R \cdot 2r = W'$, falls eine gleichförmige Drehung der Walze entstehen soll. Man hat also

$$\overline{R} = R = \frac{1}{2r}(P + G) f_r' \quad \text{und} \quad R' = \overline{R}' = \frac{1}{2r} \cdot P \cdot f_r.$$

Bringt man alle Horizontalkräfte, die auf MN wirken, unter Abspaltung der entsprechenden Kräftepaare, in A an, so folgt

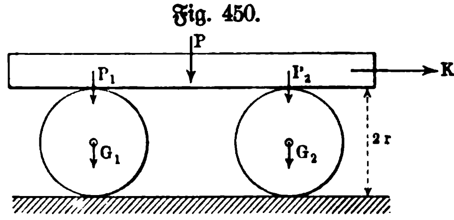
$$K = R' + \overline{R},$$

d. h.

$$K = \frac{1}{2r}[P \cdot f_r + (P + G) f_r'].$$

Legt man den Körper auf zwei Walzen, so zerlegt sich P auf irgend eine Weise in P_1 und P_2, und dieser Zerlegung entspricht eine Zerlegung von K in K_1 und K_2.

Fig. 450.



Man hat dann

$$K_1 = \frac{1}{2r}[P_1 \cdot f_r + (P_1 + G) f_r']$$

und

$$K_2 = \frac{1}{2r}[P_2 \cdot f_r + (P_2 + G) f_r'],$$

d. h. man erhält

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2r}[P \cdot f_r + (P + G) f_r'].$$

Für $f_r = f_r'$ ergiebt sich im besondern

$$K = \frac{f_r}{2r}(2P + G).$$

Betrachten wir nun das Rad eines Fuhrwerkes, so müssen wir das Gewicht P des rollenden Teiles und das Gewicht P_1 des fortschreitenden Teiles unterscheiden. Bei gewöhnlichen Wagen besteht der rollende Teil nur in dem Rade, bei Eisenbahnwagen, wo Rad und Achse fest verbunden sind, aber aus Rad und Achse.

Für A ist das Moment der rollenden Reibung $(P + P_1)f_r$ zu überwinden, für O außerdem das Moment der Zapfenreibung, welche P_1 entspricht, also $P_1 f\varrho$. (Vergl. Fig. 451.)

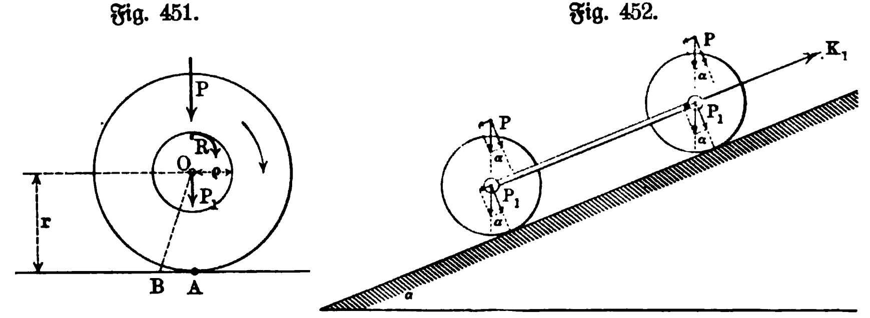
Nimmt man A als Drehpunkt, so ist hier für eine wagerechte Kraft K in O

$$Kr = (P + P_1)f_r + P_1 f\varrho.$$

Dieselbe Betrachtung gilt auch für ein Räderpaar an einer Achse bezw. für mehrere Räderpaare.

Ist die Bahn geneigt, so ändert sich an dem Reibungsmomente der Zapfen nichts, während der Normaldruck für die rollende Reibung in $(P + P_1)\cos\alpha$

Fig. 451. Fig. 452.



übergeht (vergl. Fig. 452). Hier gilt also für die Kraft K', welche diese Widerstände zu überwinden hat, für jedes Rad

$$K' = \frac{(P + P_1)f_r \,.\, \cos\alpha + P_1 f\varrho}{r}.$$

Außerdem sind aber noch die Komponenten $P\sin\alpha$ und $P_1\sin\alpha$ zu überwinden, so daß hier

$$K_1 = K' + (P + P_1)\sin\alpha$$

zu setzen ist.

Da α für die thatsächlich vorhandenen Bahnen oder Wege sehr klein ist, so ist wegen $\cos\alpha = 1 - \frac{arc\,\alpha^2}{1\,.\,2} + \cdots$ und $\sin\alpha = \frac{arc\,\alpha}{1} - \cdots$, in erster Annäherung $\cos\alpha = 1$ und $\sin\alpha = arc\,\alpha$, so daß

$$K_1 = \frac{(P + P_1)f_r + P_1 f\varrho}{r} + (P + P_1)\,arc\,\alpha = K + (P + P_1)\,arc\,\alpha$$

gesetzt werden darf.

Bei Verwendung von Seilen oder Zahnstangen ist diese Betrachtung nicht mehr zulässig, da α hier größere Werte annimmt.

Für das gleichmäßige Ablassen eines Wagens auf geneigten Bahnen bei Benutzung eines Seiles von der Spannung S hat man

$$(P + P_1) \sin \alpha - S = K'.$$

Für einen bestimmten Winkel α_0 tritt ohne Anwendung eines Seiles ($S = 0$) gleichförmige Bewegung abwärts ein, man hat für $\cos \alpha_0 = 1$ und $\sin \alpha_0 = \operatorname{arc} \alpha_0$ unmittelbar

$$\operatorname{arc} \alpha_0 = \frac{(P + P_1) f_r + P_1 f \varrho}{r(P + P_1)} = \frac{Kr}{r(P + P_1)} = \frac{K}{P + P_1}.$$

Demnach ist auch für die Bewegung auf ebener Bahn

$$K = (P + P_1) \operatorname{arc} \alpha_0.$$

Da α_0 durch Versuche verhältnismäßig leicht bestimmt werden kann, während die Bestimmung von f_r und dessen Verwendung nicht einwandfrei ist, so pflegt man α_0 unter dem Namen „Gleichgewichtsneigung" auch der Theorie zu Grunde zu legen.

Man hat dann $K' \sim K$ und findet so

$$K_1 = (P + P_1)(\sin \alpha + \operatorname{arc} \alpha_0)$$
$$\sim (P + P_1) \operatorname{arc}(\alpha + \alpha_0)$$

und

$$S \sim (P + P_1) \operatorname{arc}(\alpha - \alpha_0).$$

Bezeichnet man $\operatorname{arc} \alpha_0$, welches durch $\sin \alpha_0$ oder $tg\, \alpha_0$ ersetzt werden darf, durch $\bar{f}$, so spielt $\bar{f}$ die Rolle eines Reibungskoeffizienten, d. h. die Bewegung kann so beurteilt werden, als wenn gleitende Reibung vorhanden wäre mit dem Koeffizienten $\bar{f}$.

Thatsächlich wirkt $[K]$ nicht, wie bisher angenommen wurde, in der Höhe der Achsen, sondern oberhalb derselben. Eine Betrachtung, welche der Untersuchung auf S. 533 entspricht, zeigt aber, daß durch diese Parallelverschiebung von $[K]$ in den Beziehungen parallel zur Fahrbahn nichts geändert wird, nur senkrecht dazu (Druckverteilung) treten Änderungen auf, welche aber auf die abgeleiteten Formeln ohne Einfluß sind.

Übungen zur Lehre von den Reibungen.

1. Ein Körper liegt auf einer horizontalen Unterlage, hat ein Gewicht von 62,75 kg und wird durch eine Kraft von 15,25 kg, die nach horizontaler Richtung wirkt, so eben fortbewegt.

Wie groß ist der Reibungskoeffizient?

0,243.

2. Ein mit Eisen beschlagener Schlitten von 150 kg Gewicht wird auf einer horizontalen Schneebahn gerade fortgezogen.

Wie groß ist die dazu notwendige Kraft, wenn $f = 0,06$ ist?

9 kg.

3. Für eine auf Straßenpflaster fortgezogene Schleife ist $f = 0,45$.

Wie groß ist die zum Fortziehen notwendige Kraft, wenn die Schleife mit der Last 250 kg wiegt?

Wie groß ist die Kraft zum Anziehen der Schleife, wenn der Reibungskoeffizient der Ruhe 0,7 ist?

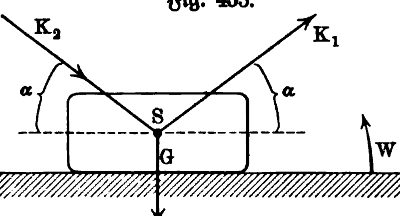
112,5 kg bezw. 175 kg.

4. Ein mit Eisen beschlagener Schlitten von 25 kg Gewicht wird auf einer horizontalen Schneemasse in Bewegung gesetzt.

Welchen Weg legt derselbe zurück, wenn eine Arbeitsgröße von 20 mkg auf ihn übertragen wurde und der Reibungskoeffizient 0,05 ist?

16 m.

Fig. 453.



5. Wenn ein Körper vom Gewichte G auf einer wagerechten Ebene fortbewegt werden soll durch eine Kraft, welche mit dieser den Winkel α bildet, so sind zwei Anordnungen (vergleiche Fig. 453) möglich: K_1 wirkt ziehend und K_2 wirkt schiebend. Beachtet man den Winkelpfeil W, so hat $[K_2]$ die Neigung $360^0 - \alpha$, wenn $[K_1]$ die Neigung α hat. Für wagerechte Kräfte $[K_1]$ und $[K_2]$ fällt dieser Unterschied fort.

Man hat (vergl. S. 539)

$$K_1 = G \frac{\sin\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)} \quad \text{und} \quad K_2 = G \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos(\alpha + \varphi)}.$$

6. Die Betrachtung der Aufgabe Nr. 5 ist für die schiefe Ebene [α] durchzuführen, wobei ε den Winkel der Kräfte gegen diese bezeichnen mag, und zwar für das Hinaufziehen und Ablassen einer Last G. Für Kräfte, parallel zur schiefen Ebene, fällt dieser Unterschied fort.

$$K_1 = G\frac{\sin(\alpha \pm \varphi)}{\cos(\varepsilon \mp \varphi)} \quad \text{und} \quad K_2 = \frac{G\sin(\alpha \pm \varphi)}{\cos(\varepsilon \pm \varphi)}.$$

7. Welche Beziehungen zeigen die Werte für K_1 und K_2 in Nr. 6?

8. Wie groß ist K_2 für $G = 270$ kg und $f = 0{,}49$ (Holz auf Gußeisen), falls die schiefe Ebene die Neigung $65^\circ 7'$ hat und die Kraft mit der schiefen Ebene den Winkel $37^\circ 13'$ bildet?

$$K_2 = 601{,}2\,\text{kg} \quad \text{bezw.} \quad 173{,}2\,\text{kg}.$$

9. Welchen Winkel ε bildet eine Kraft [G] mit einer schiefen Ebene von der Neigung α, auf welcher sie einen Körper vom Gewichte [G] hält?

Für die ziehende Kraft ist $\varepsilon = 90^\circ - \alpha$, für die schiebende Kraft ist $\varepsilon = 90^\circ - \alpha + 2\varphi$.

10. Ein Körper aus Granit liegt auf einer geneigten Ebene aus Holz, die den Winkel $40^\circ 7' 3''$ mit der Horizontalebene bildet, $f = 0{,}53$. Der Körper soll auf der Ebene durch eine im Schwerpunkte desselben wirksame Kraft gehalten werden, welche gleich dem Gewichte des Körpers ist.

Welchen Winkel bildet die Kraftrichtung mit der Richtung der geneigten Ebene für die Grenze des Gleitens?

$$49^\circ 53' \quad \text{bezw.} \quad 105^\circ 44'.$$

11. Welche Beziehungen gelten für Nr. 9 und 10?

12. Die Anwendung Nr. 4 des ersten Kapitels dieses Abschnittes ist unter Berücksichtigung der Reibung auf den Ebenen zu behandeln, falls die Cylinder der Fig. 203 durch Körper mit ebener Grundfläche ersetzt werden. Für die Bewegung in der Richtung der Pfeile gilt für den Fall des Gleichgewichtes

$$P_1 \sin(\alpha_1 - \varphi) = P_2 \sin(\alpha_2 + \varphi).$$

Für das Ablassen von P_2, d. h. für die Bewegung gegen die Pfeile gilt

$$P_1 \sin(\alpha_1 + \varphi) = P_2 \sin(\alpha_2 - \varphi).$$

Damit sind die Grenzen für P_1 bei gegebenem P_2 bestimmt, falls Ruhe vorhanden sein soll. Im ersten Falle ist bei beschleunigter Bewegung

$$S = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}\,\frac{\sin(\alpha_1 - \varphi) + \sin(\alpha_2 + \varphi)}{\cos\varphi} \quad \text{u. s. f.}$$

13. Die Betrachtung der Nr. 12 ist durchzuführen für die folgende Anwendung Nr. 5. Für die beschleunigte Bewegung im Sinne der Pfeile gilt

$$\iota = \frac{P_1 r_1 \sin(\alpha_1 - \varphi) - P_2 r_2 \sin(\alpha_2 + \varphi)}{\cos\varphi\,(P_1 r_1^2 + P_2 r_2^2)} \cdot g \quad \text{u. s. f.}$$

14. und 15. Graphostatische Bestimmung für Nr. 12 und Nr. 13.

16. In einem Hohlcylinder befindet sich ein Körper, dessen Stützfläche dem Cylinder angepaßt ist, auf der Grenze der Bewegung. Welche Lage hat er? Vergl. Fig. 454.

Fig. 454.

$$tg\,\alpha = f = tg\,\varphi,$$

d. h.

$$\alpha = \varphi.$$

Der Reibungskegel für MM' als Achse umfaßt alle möglichen Ruhelagen des Schwerpunktes S.

17. In einem Hohlcylinder befindet sich ein prismatischer Stab, dessen Achse die Cylinderachse senkrecht kreuzt. Welche Beziehungen treten hier auf? Vergl. Fig. 455. Durch die Länge l des Stabes und den Halbmesser r wird ε bestimmt. Für die Bewegungspfeile 1 ist O_1, für die Bewegungspfeile 2 ist O_2 der Durchschnittspunkt der wirkenden Kräfte bei voller Entwickelung der Reibung. Vergl. Fig. 455.

Fig. 455.

a. b.

Für O_1 folgt gemäß Fig. 455 b

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{cos\,(\varepsilon - \varphi)\,.\,sin\,(\varepsilon + \varphi - \vartheta)}{cos\,(\varepsilon + \varphi)\,.\,sin\,(\vartheta + \varepsilon - \varphi)},$$

d. h.

$$tg\,\vartheta = \frac{a_1\,.\,tg(\varepsilon+\varphi) - a_2\,tg(\varepsilon-\varphi)}{a_1+a_2}.$$

Für $a_1 = a_2$ ist

$$tg\,\vartheta = \frac{\sin 2\varphi}{2\cos(\varepsilon+\varphi)\,.\,\cos(\varepsilon-\varphi)}.$$

Für O_2 gilt Entsprechendes.

18. Eine Kugel (Cylinder) liegt zwischen zwei um B drehbaren Ebenen A_1B und A_2B. Bei welchem Drucke P bewegt sich die Kugel aufwärts, falls alle Kräfte in einer Vertikalebene liegen? Vergl. Fig. 456.

Fig. 456.

Für die Ebene links ist das Gleichgewicht bedingt durch

$$hP - m\bar{N}_1 = 0.$$

Entsprechendes gilt für die Ebene rechts. Für die Kugel gilt als Bedingung des Gleichgewichtes ($N_1 = N_2 = N$)

$$2N\frac{\sin(\varepsilon-\varphi)}{\cos\varphi} = G.$$

Man hat also

$$P = \frac{1}{2}\frac{G\,.\,m\,.\,\cos\varphi}{h\,.\,\sin(\varepsilon-\varphi)}$$

oder für $m = R\cot\varepsilon$

$$P = \tfrac{1}{2}G\cdot\frac{R}{h}\cdot\frac{\cot\varepsilon\,.\,\cos\varphi}{\sin(\varepsilon-\varphi)}.$$

19. Ein prismatischer Stab lehnt sich bei A auf eine Horizontalebene, während er bei B durch ein über eine Rolle geführtes Seil gehalten wird. Welche Beziehungen treten auf, falls alle Kräfte in einer Vertikalebene liegen? Vergl. Fig. 457.

Fig. 457.

Die Gleichung

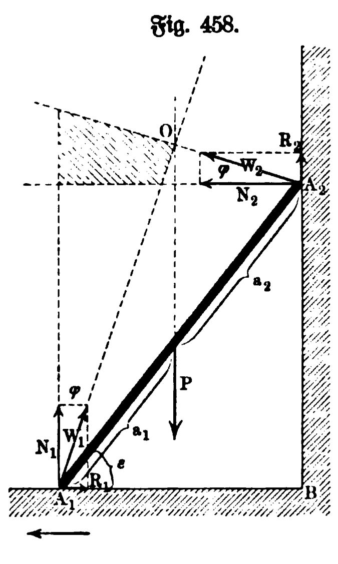
$$\cos(\beta-\varphi) = \frac{P}{Q}\sin\varphi$$

giebt den Wert von β, durch den dann α bestimmt ist gemäß der Gleichung (Drehpunkt A)

$$tg\,\alpha = \frac{(a+b)\,Q\sin\beta - aP}{(a+b)\,Q\cos\beta}.$$

20. Für den prismatischen Stab der Fig. 458 soll der Winkel ε bestimmt werden, welcher der Grenze des Gleitens entspricht.

Fig. 458.



$$tg\,\varepsilon = \frac{a_1 - a_2 f^2}{(a_1 + a_2) f}.$$

Für $a_1 = a_2$ ist $tg\,\varepsilon = \frac{1 - f^2}{2 f}$, man hat also z. B. für $f = 0{,}4$ $\varepsilon = 46^0 41'$.

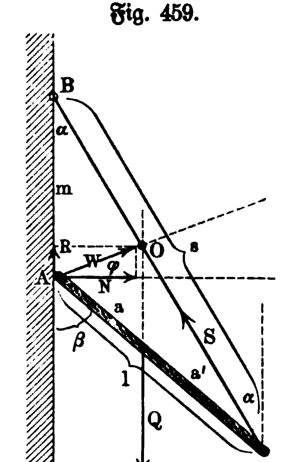
Bei unvollkommener Entwickelung der Reibung muß [P] das gemeinsame Gebiet der Reibungskegel treffen, soweit dieses in Frage kommt. Vergl. die Entwickelung auf S. 535 für $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 90^0$.

21. Wie groß ist ε für den Stab der vorigen Aufgabe, wenn er über eine Mauerkante $A_2 B$ gelehnt wird?

$$sin\,2\,\varepsilon = \frac{2 f}{1 + f^2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1}$$
$$= sin\,2\,\varphi \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1}.$$

22. Die Bedingung des Gleichgewichtes für den in Fig. 459 dargestellten prismatischen Stab ist zu bestimmen.

Fig. 459.



[Q] und [S] müssen sich im Reibungskegel von A, soweit dieser hier in Frage kommt, schneiden. Bei voller Entwickelung der Reibung gilt

$$S = Q \cdot \frac{cos\,\varphi}{cos\,(\alpha - \varphi)}$$
$$N = Q \cdot \frac{cos\,\varphi \,.\, sin\,\alpha}{cos\,(\alpha - \varphi)}.$$

Für A als Drehpunkt gilt des weiteren

$$Q a\, sin\,\beta = S \,.\, m\, sin\,\alpha,$$

wobei $m = s\,cos\,\alpha - l\,cos\,\beta$ ist. Da ferner $s \,.\, sin\,\alpha = l \,.\, sin\,\beta$ ist, so ist α bestimmbar und damit β oder umgekehrt.

Für $a + a' = l$ erhält man, falls $a = a'$ ist

$$tg^2\alpha\,[l^2 - s^2 - \tfrac{1}{4} f^2 s^2] + \tfrac{1}{2} f s^2\, tg\,\alpha + l^2 - \tfrac{1}{4} s^2 = 0.$$

23. Ein prismatischer Stab stützt sich, wie Fig. 460 zeigt, auf zwei wagerecht parallele Pflöcke. Welche Beziehungen treten auf, wenn die Achse des Stabes, dessen Gewicht vernachlässigt werden mag, die Achsen der Pflöcke unter rechten Winkeln kreuzt? Vergl. Fig. 460.

Bei voller Entwickelung der Reibung gilt

$$N_1 = \frac{Q \,.\, \sin(\alpha - \varphi)}{2 \sin \varphi}$$

$$N_2 = \frac{Q \,.\, \sin(\alpha + \varphi)}{2 \sin \varphi}$$

$$e \,.\, tg\,\alpha = (2a + e)\, tg\,\varphi$$

oder

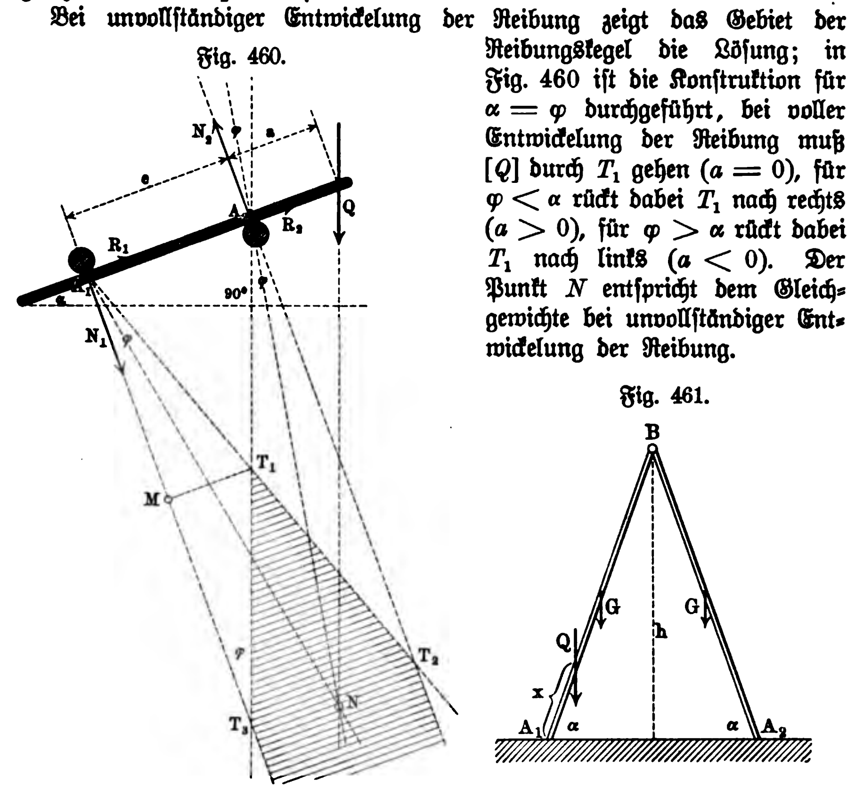
$$a = \tfrac{1}{2}\, e \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\alpha \,.\, \sin\varphi}.$$

Für $\alpha = \varphi$ ist $a = 0$, für $\alpha > \varphi$ liegt Q rechts von A_2, für $\alpha < \varphi$ liegt Q links von A_2.

Bei unvollständiger Entwickelung der Reibung zeigt das Gebiet der Reibungskegel die Lösung; in Fig. 460 ist die Konstruktion für $\alpha = \varphi$ durchgeführt, bei voller Entwickelung der Reibung muß $[Q]$ durch T_1 gehen ($a = 0$), für $\varphi < \alpha$ rückt dabei T_1 nach rechts ($a > 0$), für $\varphi > \alpha$ rückt dabei T_1 nach links ($a < 0$). Der Punkt N entspricht dem Gleichgewichte bei unvollständiger Entwickelung der Reibung.

Fig. 460.

Fig. 461.



24. Welche Beziehungen bietet eine Trittleiter (vergl. Fig. 461) dar? Welche Beziehungen bietet eine symmetrisch aufgestellte Trittleiter dar, von der jeder Schenkel das Gewicht $[G]$ hat, während auf A_1B eine Last Q aufwärts bewegt wird?

Wie wirkt eine wagerechte Verbindungsstange ein?

Für die Lösung vergl. die Entwickelung auf S. 372 u. f.

25. Anwendung Nr. 7, VII auf S. 514 ist unter Einführung der Reibung zu behandeln.

26. Ändern sich die Ergebnisse der Übungen Nr. 29 und 31 auf S. 524 durch Einführung der Reibungen?

27. Übung Nr. 22 auf S. 522 ist unter Einführung der Reibung zu behandeln.

28. Desgl. Übung Nr. 32 auf S. 524.

29. Desgl. Übung Nr. 33 auf S. 525.

30. Desgl. Übung Nr. 34 auf S. 526.

31. Desgl. Übung Nr. 36 auf S. 526.

32. Es ist die in Fig. 462 skizzierte Keilkette zu untersuchen für P als treibende Kraft. In der Untersuchung auf S. 580 ist zu setzen $\varepsilon_1 = \delta$, $\varepsilon_2 = 0$, $\alpha_1 = 2\,\delta$, $\alpha_2 = 90^0 - \delta$. Für das gleichförmige Eintreiben gilt

$$P = \frac{2\,Q \sin(\delta + \varphi) \cos\varphi}{\cos(\delta + 2\,\varphi)}.$$

Für die umgekehrte Bewegung bezw. für das Lösen des Keiles gilt

$$\pm P = \frac{2\,Q \sin(\delta - \varphi) \cos\varphi}{\cos(\delta - 2\,\varphi)}.$$

Selbsthemmung tritt ein für $\delta < \varphi$.

Angenähert ist $P = 2\,Q\,tg(\delta \pm \varphi)$ und $\eta = \dfrac{tg\,\delta}{tg(\delta + \varphi)}$ u. s. w.

33. Graphostatische Behandlung von Nr. 32.

Fig. 462.

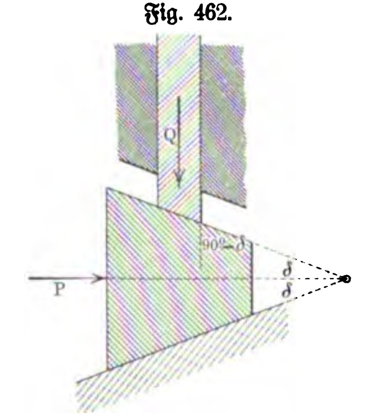
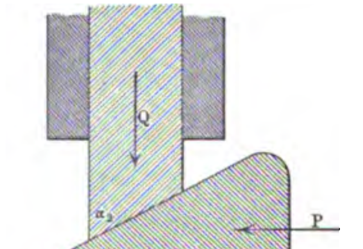


Fig. 463.



34. Es ist die in Fig. 463 dargestellte Keilkette zu untersuchen, bei der ein keilförmig abgeschlossener Pfeiler durch einen Keil angetrieben wird. Man hat $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$.

Hat f für alle Gleitflächen denselben Wert, so gilt

$$P = Q\,.\,tg(\alpha_1 + 2\,\varphi) \quad \text{und} \quad \eta = \frac{tg\,\alpha_1}{tg(\alpha_1 + 2\,\varphi)}.$$

Für das Ausziehen des Keiles gilt

$$-P = Q\,tg(\alpha_1 - 2\,\varphi)$$

bei Selbsthemmung ($\alpha_1 < 2\,\varphi$) und

$$\eta' = \frac{tg(\alpha_1 - 2\varphi)}{tg\,\alpha_1}.$$

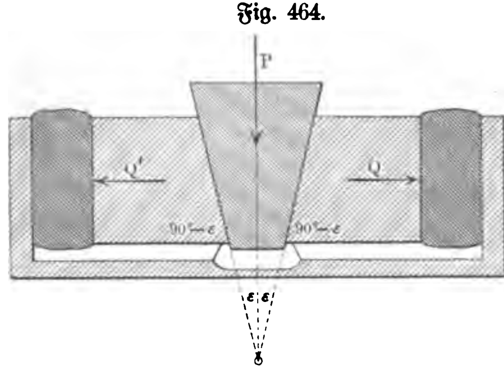
35. Graphostatische Behandlung von Nr. 34.

36. Wie ändert sich das Ergebnis der Nr. 34, falls die Reibungskoeffizienten für die gemeinsame Gleitfläche der Keile f_1, für die Reibung in der Vertikalen f_2 und für die Reibung in der Horizontalen f_3 sind?

$$P = \frac{Q \cos\varphi_2 \sin(\alpha_1 + \varphi_1 + \varphi_3)}{\cos\varphi_3 \cdot \cos(\alpha_1 + \varphi_1 + \varphi_2)} \text{ u. s. w.}$$

37. Es ist die in Fig. 464 dargestellte Keilpresse zu untersuchen.

Fig. 464.



$$Q' = Q = \frac{1}{2}\frac{P \cdot \cos(\varepsilon + 2\varphi)}{\sin(\varepsilon + \varphi)\cos\varphi}.$$

Für P als treibende Kraft ist

$$\eta = \frac{\sin\varepsilon \cos(\varepsilon + 2\varphi)}{\cos\varepsilon \sin(\varepsilon + \varphi)\cos\varphi}.$$

38. Graphostatische Ausführung zu Nr. 37.

39. Der Schieber einer Dampfmaschine von 5 Atmosphären (1 kg auf 1 qcm) ist 20 cm lang und 15 cm breit. Welche Kraft P überwindet die Schieberreibung ($f = 0{,}1$)?

$$P = 150\,\text{kg}.$$

Wie groß ist die Arbeitsstärke bei einem Schieberhube von 8 cm für die Tourenzahl 40?

Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Schiebers (Vor- und Rückgang $= 2 \cdot 8$ cm) ist $\frac{2 \cdot 8 \cdot 40}{60} = 10{,}67 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 0{,}1067 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und demnach die Arbeit für die Sekunde $150 \cdot 0{,}1067 \sim 15 \frac{\text{mkg}}{\text{sec}} = 0{,}2$ P.S.

40. Bei einem Keile (vergl. Fig. 408) ist $AB : BC = 1 : 8$ und $f = 0{,}15$. Wie groß ist P für das Eintreiben, falls $N = 250$ kg ist?

$$P = 105{,}83\,\text{kg bei } \varphi = 8^0\,30'.$$

Für das Zurücktreiben ist $P = 43{,}33$ kg.

Bei Vernachlässigung der Reibung ergiebt sich $P = 31{,}25$ kg.

41. Eine schiefe Ebene ist mit drei Keilnuten vom Winkel $2\delta = 60^0$ versehen, welche den Schnitt der schiefen Ebene und der horizontalen unter rechtem Winkel treffen.

Wie ändern sich die Formeln der Übungen Nr. 6, 9, 12, 13?

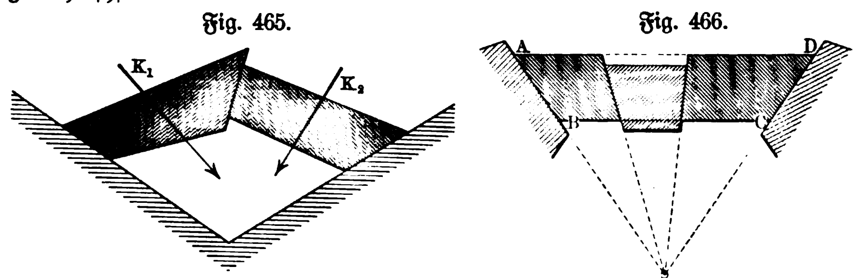
Unabhängig von der Anzahl der Keilnuten muß f ersetzt werden durch $f' = \frac{f}{\sin\delta} = 2f.$

42. Unter Berücksichtigung der entstehenden Kräftepaare ist der Normaldruck zu bestimmen für einen rechtkantigen Block von den Kanten 1 m, 1,5 m, 2 m und vom specifischen Gewichte 2,5, welcher auf der Fläche von 2 qm auf einer Horizontalebene steht, wenn eine Kraft $[K]$ von 8000 kg in der Mittelebene des Blockes parallel zur Kante 2 m wirkt und zwar zunächst auf der Oberfläche und dann abwärts gleitend bis zur Grundebene. Dabei ist ein etwaiges Kippen zu berücksichtigen.

43. Nr. 42 ist durchzuführen, falls der Block auf einer schiefen Ebene von der Neigung 28° 20′ steht und die Kraft $[K]$ einmal für das gleichförmige Emporziehen und dann für das gleichförmige Ablassen in Frage kommt ($f = 0{,}3$).

44. Welchen Spielraum (Parallelverschiebung) hat die Kraft $[K_2]$ bei fester Lage von $[K_1]$ in Fig. 465, falls das Keilsystem nicht kippen soll, unter der Voraussetzung, daß die Kräfte mit den Reaktionen ein Gleichgewichtssystem bilden?

Fig. 465. Fig. 466.



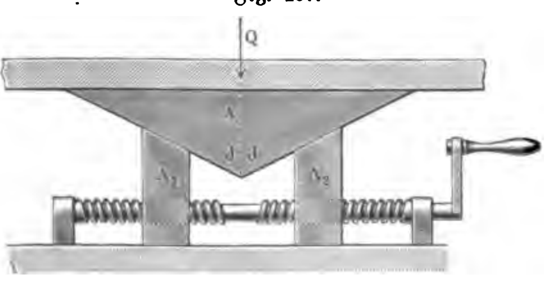
45. Für das scheitrechte Gewölbe (vergl. Fig. 423) ist der Grenzwert von α zu bestimmen, falls $MA : AB = 5$ ist und absolut glatte Flächen vorausgesetzt werden.

$$90^\circ - \alpha = 33^\circ 45'.$$

46. Für das scheitrechte Gewölbe ist durch Betrachtung der in Fig. 466 dargestellten Keilkette zu zeigen, daß der Einsturz durch Gleiten selbst bei reibungslosen Fugen nicht erfolgen würde, falls für die Widerlagerfuge AB Sicherheit vorhanden ist.

47. Bei dem Gewölbe der Fig. 424 ist eine Tabelle $\varepsilon = 0^\circ \ldots 90^\circ$ für H_2 zu entwerfen, falls $r_1 : r_2 = 1{,}1$ ist. Das Maximum von H_2 tritt ein für $\varepsilon = 53^\circ 15'$.

Fig. 467.



48. Es ist die in Fig. 467 dargestellte Schraubenkeilpresse zu untersuchen, bei welcher zwei Schrauben, die eine rechtsläufig, die andere linksläufig, auf einer Achse die Keile A_1 und A_2 und damit den Keil A verschieben.

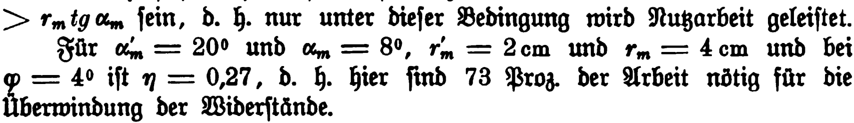
Ist P am Arme l wirksam, und werden für die Schrauben die eingeführten Bezeichnungen r_m und α_m angewandt, so ergiebt sich, falls f_1 für die Reibung der Schrauben und falls f für die Reibung der Keilflächen eingeführt wird

$$P = Q \cdot \frac{r_m}{l} \cdot tg(\alpha_m + \varphi_1)[cot(\delta - \varphi) + tg\,\varphi].$$

49. Graphostatische Behandlung von Nr. 48.

50. Die Beziehungen für die Differentialschraube (vergl. Fig. 468) sind zu entwickeln.

Fig. 468.



Wird die Hohlschraube S durch eine Kraft P am Arme l um einen Gang h hinabgeschraubt, während die obere Spindel S' verhindert ist, diese Drehung mitzumachen, so schiebt sich S' um einen Gang h' empor, so daß sich S' und Q um $h' - h$ hebt.

Führt man für S und S' die Größen r_m bezw. r'_m und α_m und α'_m ein, so gilt

$$P = Q \cdot \frac{1}{l}[r'_m tg(\alpha'_m + \varphi) - r_m tg(\alpha_m - \varphi)]$$

$$\eta = \frac{r'_m tg\,\alpha'_m - r_m tg\,\alpha_m}{r'_m tg(\alpha'_m + \varphi) - r_m tg(\alpha_m - \varphi)}.$$

Soll η positiv sein, so muß $r'_m tg\,\alpha'_m > r_m tg\,\alpha_m$ sein, d. h. nur unter dieser Bedingung wird Nutzarbeit geleistet.

Für $\alpha'_m = 20^0$ und $\alpha_m = 8^0$, $r'_m = 2\,\text{cm}$ und $r_m = 4\,\text{cm}$ und bei $\varphi = 4^0$ ist $\eta = 0{,}27$, d. h. hier sind 73 Proz. der Arbeit nötig für die Überwindung der Widerstände.

Selbsthemmung ist vorhanden für

$$r'_m tg(\alpha'_m - \varphi) < r_m tg(\alpha_m + \varphi).$$

51. Es sind die Beziehungen der Differentialhaspel (vergl. Fig. 225) zu untersuchen.

Es sei das Gewicht der Welle mit Zubehör G, der Halbmesser des stärkeren Teiles der Welle r_1, die Spannung des daran hängenden Seiles S_1, der Halbmesser des schwächeren Teiles r_2, die Spannung des daran wirkenden Seiles S_2, der Zapfenhalbmesser der Welle ϱ. Der Arm der Kraft P sei R und Q bezeichne die gesamte Last.

Man hat für die Hebung

$$S_1 = \frac{\mu}{1+\mu}Q \quad \text{und} \quad S_2 = \frac{1}{1+\mu}Q.$$

Bei Vernachlässigung des Seilbiegungswiderstandes ist

$$PR + S_2 r_2 = S_1 r_1 + f_z(P + Q + G)\varrho.$$

Der Widerstand der Seilbiegung ist nötigen Falles einzuführen (vergl. S. 561).

52. Die Formeln für den Kegelzapfen in § 89 sind abzuleiten.

53. Die Formeln für den Kegelzapfen in § 90 sind abzuleiten.

54. Eine horizontale Welle, an beiden Enden in Lagern ruhend, trägt zwei Räder, durch welche die Welle in drei Teile geteilt ist, die sich wie 2 : 2 : 1 verhalten. Die Welle hat ein Gewicht von 300 kg, das Kraftrad, in der Entfernung 2 von dem einen Ende, wiegt 1300 kg, hat einen Halbmesser von 1,5 m und die zu suchende Kraft P wirke tangential in einer zur Wellenachse normalen Ebene nach horizontaler Richtung. Das Lastrad in der Entfernung 1 von dem anderen Wellenende wiegt 700 kg, hat einen Halbmesser von 0,5 m und die Last von 900 kg wirkt tangential in einer zur Wellenachse normalen Ebene nach vertikaler Richtung. Der Halbmesser der Zapfen sei 0,105 m und der Koeffizient für die Zapfenreibung 0,08.

Ohne Berücksichtigung der Widerstände und der Gewichte ist

$$P \,.\, 1{,}5 = 900 \,.\, 0{,}5, \text{ daher } P = 300 \text{ kg}.$$

Man hat für die senkrechten und wagerechten Komponenten der Zapfendrucke D_1 und D_2

$$V_1 = 150 + 1300 \,.\, 0{,}6 + 1600 \,.\, 0{,}2 = 1250 \text{ kg},$$
$$V_2 = 150 + 1300 \,.\, 0{,}4 + 1600 \,.\, 0{,}8 = 1950 \text{ kg},$$
$$H_1 = 0{,}6\,P = 180 \text{ kg},$$
$$H_1 = 0{,}4\,P = 120 \text{ kg}.$$

Demnach ist

$$D_1 = 1263 \text{ kg} \quad \text{und} \quad D_2 = 1954 \text{ kg}.$$

Das Reibungsmoment ist also

$$0{,}08\,(1263 + 1954)\,0{,}105 = 27 \text{ mkg}.$$

Man hat also

$$P = 300 + \frac{27}{1{,}5} = 318 \text{ kg}.$$

55. Ein eisernes Rad von 10 000 kg Gewicht und einem Halbmesser R von 5 m ruht in Zapfen von 0,13 m Halbmesser. Wie groß ist die Kraft P am Umfange des Rades, welche die Zapfenreibung überwindet? Welche Arbeitsstärke ist zur Überwindung der Reibung notwendig, wenn fünf Umdrehungen in der Minute gemacht werden und der Reibungskoeffizient $f_z = 0{,}08$ angenommen wird?

$$54 \frac{\text{mkg}}{\text{sec}} = 0{,}72 \text{ P.S.}$$

56. Eine stehende Welle ist mit einer liegenden durch ein Kammrad und einen Drehling verbunden. Die stehende Welle wird durch zwei Pferde in Bewegung gesetzt, die einander gegenüber an dem Arme m wirken. Das Gewicht der stehenden Welle mit Zubehör sei G_1, der Halbmesser der Zapfen ϱ_1 und der mittlere Halbmesser des Kammrades R_1. Das Gewicht der liegenden Welle sei G_2, der Halbmesser der Zapfen ϱ_2, der Halbmesser des Drehlings R_2. Auf der liegenden Welle ist noch ein Stirnrad vom Halbmesser R_3 befestigt, in dessen Umfange ein Druck Q zu überwinden ist, dessen

Richtung mit der Vertikalen zusammenfällt. Es ist der Wert von Q zu bestimmen, wenn jedes Pferd mit dem Drucke von P kg wirkt und die Zapfenreibung berücksichtigt wird.

Wir erhalten als Gleichgewichtsbedingungen, falls der im Mantel der Räderverbindung wagerecht wirksame Druck mit V bezeichnet wird und die Zapfendrucke der liegenden Welle D_1 und D_2 genannt werden

$$1)\quad 2Pm - fG_1\frac{\varrho_1}{2} - VR_1 - f_z V\varrho_1 = 0,$$

$$2)\quad VR_2 - QR_3 - f_z D_1\varrho_2 - f_z D_2\varrho_2 = 0.$$

Es sei für die Berechnung gegeben

$$P = 60\,\text{kg},\ G_1 = 300\,\text{kg},\ G_2 = 200\,\text{kg},\ m = 3{,}139\,\text{m};$$
$$R_1 = 0{,}628\,\text{m},\ R_2 = 0{,}314\,\text{m},\ R_3 = 0{,}157\,\text{m},$$
$$\varrho_1 = 0{,}046\,\text{m},\ \varrho_2 = 0{,}036\,\text{m},\ f = 0{,}16,\ f_z = 0{,}08.$$

Außerdem seien die Entfernungen von $[D_1]$ bei der wagerechten Welle, deren Länge $l = 3{,}452$ m sein mag, für Q, G_2, V gegeben bezw. durch 2,824 m, 1,650 m, 0,314 m.

Aus der ersten Gleichung folgt

$$V = 594{,}5\,\text{kg}.$$

Für Q findet man annähernd aus der Gleichung $VR_2 - QR_3 = 0$ den Wert

$$Q = 1190\,\text{kg}.$$

Berechnet man mit diesem Werte von Q die Zapfendrucke D_1 und D_2, so ist

$$D_1 = 629\,\text{kg} \quad \text{und} \quad D_2 = 1070\,\text{kg},$$

während das Reibungsmoment 5 mkg wird. Nun folgt aus der zweiten Gleichung genauer

$$Q = 1157\,\text{kg}.$$

57. Welche Kraft ist notwendig, um mittels eines Flaschenzuges, dessen sechs Rollen gleichen Durchmesser haben, eine Last von 1000 kg im Gleichgewichte zu erhalten?

Es ist für $\mu = 1{,}12$

$$P = 1000\,\frac{1{,}12^7 - 1{,}12^6}{1{,}12^6 - 1} = 243\,\text{kg}.$$

58. Bei einem zweiarmigen Hebel, dessen Arme für Kraft und Last bezw. 0,5 m und 1 m sind, unterstützt das Gewicht G die Last Q im Abstande 0,1 m vom Drehpunkte. Welche Kraft P ist erforderlich für eine Last $Q = 40$ kg und für ein Gewicht $G = 6$ kg, falls der Hebel auf einer Schneide ruht, deren Reibung vernachlässigt werden kann, während die Stangen mit Zapfen vom Halbmesser $\varrho = 0{,}005$ m eingelenkt sind ($f_z = 0{,}08$)?

Die Kraft, welche die Last gleichförmig bewegt, beträgt 81,3 kg, die Kraft, welche das Sinken der Last gerade verhindert, beträgt 81,1 kg. Bei Vernachlässigung der Reibung hat die erforderliche Kraft den Wert 81,2 kg und die Reaktion der Unterstützung den Wert 127,2 kg.

59. An einem einarmigen Hebel vom Gewichte 5 kg, dessen Schwerpunkt vom Drehpunkte 0,032 m entfernt ist, wirkt eine Last von 200 kg am Arme 0,012 m. Welchen Wert hat die Kraft am Arme 0,08 m, wenn der Zapfen 1 cm stark ist ($f = 0{,}1$)? Für die gleichförmige Senkung ist die Kraft 30,9 kg, für die Hebung 33,1 kg, ohne Reibung 32 kg?

60. Eine stehende Welle, deren Zapfen ($d = 10$ cm) mit voller Kreisfläche berührt, hat in der Achsenrichtung einen Druck von 8000 kg auszuhalten. Welches Moment ist zur Überwindung der Zapfenreibung nötig ($f = 0{,}1$)?

$$M = \tfrac{1}{2} \,.\, 0{,}1 \,.\, 8000 \,.\, 5 = 2000 \text{ cmkg} = 20 \text{ mkg}.$$

61. Eine liegende Welle ist mit 20 000 kg belastet und hat Zapfen vom Halbmesser 10 cm. Welche Arbeit ist für eine Tourenzahl 10, wie sie z. B. bei Wasserrädern vorkommt, zur Überwindung der Zapfenreibung nötig?

$$200 \frac{\text{mkg}}{\text{sec}} = 2{,}67 \text{ P.S. für } f = 0{,}1.$$

62. Welche Kraft P muß bei einer flachgängigen Schraube, für die $\alpha_m = 6^0 10'$ ist, am mittleren Schraubenhalbmesser r_m als Arm wirken, wenn eine Last $Q = 250$ kg emporgeschraubt werden soll ($f = 0{,}16$)?

$P = 68{,}2$ kg, der umgekehrten Bewegung entspricht $P = -12{,}75$ kg.

Für $Q = 750$ kg und $\alpha_m = 2^0 40'$ erhält man $P = 156$ kg für die Hebung und $P = -84{,}4$ kg für die Senkung.

Welche Last Q kann mit einer flachgängigen Schraube, für die $r_m = 0{,}026$ m und $\alpha_m = 9^0 10'$ ist, durch eine Kraft $P = 45$ kg an einem Arme von 2 m gehoben werden?

$$Q = 10\,492 \text{ kg}.$$

Für $P = 16$ kg und $\alpha_m = 3^0$ ergiebt sich unter sonst gleichen Verhältnissen $Q = 5\,746$ kg.

63. Welche Kraft P ist am mittleren Halbmesser r_m einer scharfgängigen Schraube ($2\beta = 55^0$) bei einem Achsendrucke Q erforderlich, wenn die Mutter als ein Stützzapfen mit ringförmigem Querschnitte ($r = 2 r_m$) angesehen wird ($f = 0{,}16$; $\alpha_m = 2^0 40'$)?

$$P \sim 0{,}5\, Q.$$

64. Bei einer Schraubenpresse ist für die Schraube $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 3{,}2$ cm, $h = 1{,}6$ cm und für die Auflagerfläche der Spindel $\varrho = 3$ cm gegeben. Welches Moment ist erforderlich, um 6000 kg Druck zu erhalten?

$$Mo \sim 62 \text{ mkg für } f = 0{,}16.$$

Bei Vernachlässigung der Reibung ist $Mo = 15{,}12$ mkg, also $\eta \sim \frac{1}{4}$.

65. Bei einer Schraubenkeilpresse ist $r_m = 0{,}025$ m, $\delta = 85^0$, $\alpha_m = 4^0$ und $f = f' = 0{,}08$.

Welches Kraftmoment entspricht dem Drucke von 1000 kg?

$$0{,}94 \text{ mkg}.$$

66. Bei einer Differentialschraube ist $\alpha'_m = 20^0$, $\alpha_m = 8^0$, $r'_m = 0{,}02$ m, $r_m = 0{,}04$ m und $f = 0{,}08$.

Welches Moment ist für eine Last von 1000 kg nötig?

6,08 mkg.

67. Bei einem Differentialflaschenzuge ist $r : R = 14 : 15$ und $\mu = 1{,}06$. Wie groß ist für die Hebung $P : Q$?

$$P \sim \frac{Q}{11}.$$

68. Bei einem Schraubenrad mit Schnecke (Schraube ohne Ende) ist das wirksame Moment 14 mkg. Wie groß ist der Zahndruck für $\frac{h}{2\pi r_m} = \frac{1}{10}$, $r_m = 80$ mm und $f = 0{,}15$ bei Anrechnung der Lagerreibung zu 10 Proz.?

$P \sim 625$ kg.

69. Bei einer Differentialhaspel (vergl. Übung Nr. 51 in diesem Abschnitte) ist $Q = 4700$ kg, $R = 0{,}5$ m, $r_1 = 0{,}13$ m, $r_2 = 0{,}12$ m, $\varrho = 0{,}02$ m, $G = 20$ kg, $\mu = 1{,}06$, $f_z = 0{,}1$.

Wie groß ist P?

$P \sim 100$ kg.

70. Wieviel P.S. muß man einer Welle A mitteilen, welche mit einer Welle B durch Reibungsräder verbunden ist, wenn für die von B zu leistende Arbeit 5 P.S. verfügbar sein sollen? Der Achsenabstand beider Wellen sei 50 cm, die Tourenzahl der treibenden Welle $n_1 = 80$, die der getriebenen $n_2 = 100$, der Reibungskoeffizient für Eisen auf Eisen 0,15, die Zapfenhalbmesser $\varrho = 3$ cm, der Koeffizient für die Reibung in den Lagern $f_z = 0{,}08$. Aus $r_1 + r_2 = 50$ cm und $80 \,.\, r_1 = 100 \,.\, r_2$ folgt ($n = \frac{4}{5}$)

$$r_1 = \tfrac{5}{9} \,.\, 50 \text{ cm} \quad \text{und} \quad r_2 = \tfrac{4}{9} \,.\, 50 \text{ cm}.$$

Man hat (vergl. S. 603)

$$K_2 = \frac{716{,}2 \,.\, 5 \,.\, 100}{100 \,.\, \frac{4}{9} \,.\, 50}$$

und

$$K_1 = K_2 + K_2 \cdot \frac{0{,}08}{0{,}15}\left(\frac{3 \,.\, 9}{5 \,.\, 50} + \frac{3 \,.\, 9}{4 \,.\, 50}\right).$$

Demnach ist, falls x die gesuchte Anzahl P.S. bezeichnet,

$$K_1 = \frac{716{,}2 \,.\, x \,.\, 100}{80 \,.\, \frac{5}{9} \,.\, 50},$$

d. h. man hat

$$x = 5\left[1 + \frac{0{,}08}{0{,}15}\left(\frac{3 \,.\, 9}{5 \,.\, 50} + \frac{3 \,.\, 9}{4 \,.\, 50}\right)\right]$$
$$= 5\,(1 + 0{,}13) = 5{,}65 \text{ P.S.}$$

Der Druck N ist für den Grenzzustand des Gleitens rund 1160 kg.

71. Durch einen Riemenbetrieb von gleichen Scheiben sollen 4 P.S. zur Arbeitsleistung übertragen werden. Wie groß sind die Spannungen P und

Q für $r_1 = r_2 = 40$ cm, $n_1 = n_2 = 80$, $f_z = 0{,}08$, $\varrho_1 = \varrho_2 = 2{,}5$ cm?
Man hat

$$Lr' = \frac{716{,}2\,.\,4}{80} = 35{,}81 \text{ mkg}$$

und für die Grenze des Gleitens

$$100\,.\,Lr' = Q\,.\,[40(2{,}4 - 1) - 2{,}5\,.\,0{,}08(2{,}4 + 1)]$$
$$\sim 56\,Q.$$

Es ist also für die Grenze des Gleitens

$$Q \sim 64 \text{ kg} \quad \text{und} \quad P \sim 2{,}4\,Q \sim 154 \text{ kg}.$$

72. Für die Bremse der Fig. 439 sei $K_1 = 15$ kg, $a = 23{,}5$ cm, $r_m = 2{,}6$ cm, $\alpha_m = 6^0\,3'$, $\beta = 80^0$, $f_1 = 0{,}4$, $f = 0{,}16$.
Wie groß ist R?

$$R = 1134 \text{ kg}.$$

73. Für eine Kegelkuppelung (vergl. S. 605) ist $K = 15$ kg, $a = 94{,}2$ cm, $b = 15{,}6$ cm, $a' = 141{,}2$ cm, $b' = 15{,}6$ cm, $r_1 = 15{,}6$ cm, $r_2 = 13$ cm, $\alpha = 30^0$, $f = 0{,}16$.
Wie groß ist das Reibungsmoment?

29,46 mkg.

Wie groß ist P_1 für $\alpha = 7^0$?

$$P_1 = 107{,}6 \text{ kg}.$$

74. Für Bandbremsen (vergl. S. 606) wirke $K = 15$ kg am Arme 0,942 m für $m = n = 0{,}078$ m, $\alpha = 1{,}4\,\pi$, $f = 0{,}18$. Dann ist $e^{f\,.\,\mathrm{arc}\,\alpha} = 2{,}21$ und $R = 219{,}2$ kg, wenn die Spannung S_1 durch den Drehpunkt des Hebels gerichtet ist.

Es sei unter denselben Verhältnissen $R = 225$ kg, dann ist im Minimum

$K = 49{,}4$ kg zur Erzeugung beider Spannungen,
$K = 15{,}4$ kg zur Erzeugung von S_2.

Für die Anordnung als Differentialbremse ist

$$n = e^{f\,.\,\mathrm{arc}\,\alpha}\,m = 2{,}21\,m,$$

wobei der Hebel mittels einer Schraube festgehalten und das Bremsband mit einem derartigen Druck gegen die Scheibe gepreßt wird, daß die notwendigen Spannungen S_1 und S_2 dadurch erzeugt werden.

75. Für Riemenscheiben mit Spannrolle ist $2\,\delta = 120^0$, $S_1 - S_2 = 150$ kg, $r_1 = 0{,}654$ m, $r_2 = 0{,}131$ m, $\varrho = 1{,}098$ m, $f = 0{,}25$.

Mit welcher Kraft R muß die Spannrolle gegen den Riemen drücken? Welche Spannung P ruft sie hervor?

$$R = P \sim 272 \text{ kg}.$$

76. Bei einem Eisenbahnwagen sei der Halbmesser der Räder 50 cm, der Halbmesser der Zapfen 5 cm. Das Satzgewicht (Achsen und Räder) betrage 2000 kg, das Gewicht der übrigen Wagenteile 12 000 kg.

Welche Zugkraft Z entspricht hier der gleichförmigen Bewegung, falls $f_r = 0{,}05$ cm und $f_z = 0{,}02$ ist?

Für die rollende Reibung kommt die gesamte Belastung in Anrechnung ($12000 + 2000 = 14000$ kg), so daß hier 14 kg Zugkraft erfordert werden.

Für die Zapfenreibung kommt nur die Belastung 12000 kg zur Anrechnung, so daß für diese die Zugkraft 24 kg beträgt.

$$Z = 14 + 24 = 38 \text{ kg}.$$

77. Eine Chausseewalze vom Halbmesser R ruht in Zapfen vom Halbmesser r. Das Gewicht der Walze sei Q, der auf den Zapfen liegende Rahmen mit Zubehör wiege G kg. Wie groß ist die Kraft P in den Zugsträngen, damit die wälzende und Zapfenreibung gerade überwunden werde?

$$PR = f_r(Q + G) + f_z\sqrt{P^2 + G^2} \cdot r.$$

Es sei

$$Q = 1000 \text{ kg}, \; R = 0{,}785 \text{ m}, \; f_z = 0{,}08,$$
$$G = 100 \text{ kg}, \; r = 0{,}033 \text{ m}, \; f_r = 0{,}018 \text{ m}.$$

Berechnet man zuerst P aus der Gleichung $PR = f_r(Q + G)$, so erhält man als Näherungswert $P = 25{,}2$ kg, der zur Berechnung des Momentes der Zapfenreibung benutzt wird, wonach sich dann aus der obigen Gleichung als genauerer Wert von P finden läßt

$$P = 25{,}6 \text{ kg}.$$

78. Ein Rollenbett bestehe aus sechs in paralleler Lage horizontal angeordneten Cylindern vom Halbmesser r_1, deren Zapfen den Halbmesser r_2 haben mögen. Eine Last vom Gewichte Q soll mittels einer Kraft P gerade in Bewegung gesetzt werden, d. h. mit den Widerständen der Bewegung gerade im Gleichgewichte sein.

Welchen Wert hat P, wenn die Reibungskoeffizienten f_z und f_r und das Gewicht jedes Cylinders G ist?

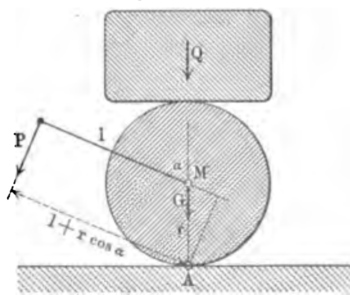
$$P = Q\frac{f_r}{r_1} + 6 f_z \sqrt{\left(\frac{Q}{6} + G\right)^2 + P^2} \cdot \frac{r_2}{r_1},$$

oder annähernd

$$P = \frac{Q f_r + f_z(Q + 6\,G) r_2}{r_1}.$$

79. Eine Last Q (Fig. 469) wird auf horizontalem Boden durch untergelegte Walzen fortgeschafft. Die hierzu notwendige Kraft P soll berechnet werden, wenn dieselbe normal zu einem Arme von der Länge l wirkt, der in der Achse der Walze mündet und in diesem Augenblicke mit der Vertikalen den Winkel α bildet. Der Halbmesser der Walze sei r, das eigene Gewicht G und die Reibungskoeffizienten seien f_r und f_r.

Fig. 469.



Der Druck am oberen Berührungspunkte ist gleich Q, der am unteren gleich $Q + P\sin\alpha + G$. Für A als Drehpunkt ist $l + r\cos\alpha$ der Arm von P, so daß als Moment für die Überwindung der rollenden Reibung $P(l + r\cos\alpha)$ anzusetzen ist.

Man hat daher

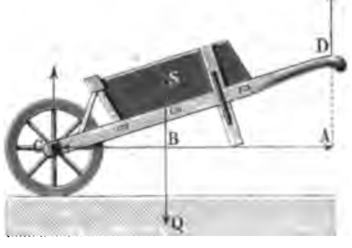
$$P = \frac{Q(f_r + f_r') + G f_r}{l + r\cos\alpha - f_r \sin\alpha},$$

und für $f_r = f_r'$ ergiebt sich

$$P = f_r \frac{2Q + G}{l + r\cos\alpha - f_r \sin\alpha}.$$

80. Welche Kraft ist nötig, um einen Schubkarren (vergl. Fig. 470) gleichförmig zu bewegen? Das Gewicht des Karrens und der aufgelegten Last sei Q, wirksam in S, es sei $CB = c$ und $BA = a$, der Halbmesser des Rades R und der des Zapfens ϱ.

Fig. 470.



Zerlegt man $[Q]$ in die, in C und A angreifenden Parallelkräfte $\left[\frac{Qa}{l}\right]$ und $\left[\frac{Qc}{l}\right]$ für $a + c = l$, so ist $\left[\frac{Qc}{l}\right]$ in D durch den Arbeiter überwunden, der außerdem noch mit einer Kraft $[K]$ in der Richtung DC wirken muß. Für $\measuredangle DCA = \alpha$ ist $[K\cos\alpha]$ die treibende Kraft, welche die rollende Reibung und die Zapfenreibung zu überwinden hat.

Der Vertikaldruck hat den Wert $\frac{Qa}{l} + K\sin\alpha$, so daß das Moment der rollenden Reibung $f_r\left(\frac{Qa}{l} + K\sin\alpha\right)$ ist; der Zapfendruck setzt sich zusammen aus $\left[\frac{Qa}{l}\right]$ und $[K]$, so daß er den Wert

$$Z = \sqrt{K^2 + \left(\frac{Qa}{l}\right)^2 + \frac{2KQa}{l}\sin\alpha}$$

und sein Moment den Wert $rf_z \,.\, Z$ hat.

Für den Unterstützungspunkt des Rades als Drehpunkt gilt also

$$K\cos\alpha \,.\, R = f_r\left(\frac{Qa}{l} + K\sin\alpha\right) + r\,.\,f_z\,.\sqrt{K^2 + \left(\frac{Qa}{l}\right)^2 + \frac{2KQa}{l}\sin\alpha}.$$

Diese quadratische Gleichung für K vereinfacht sich etwas, falls α so klein ist, daß $\sin\alpha = 0$ und $\cos\alpha = 1$ gesetzt werden darf.

Viertes Kapitel.

Kinetik des starren Körpers.

96. Der Bewegungszustand eines Körpers und dessen Änderung. Wenn Kräfte, welche an einem starren Körper wirken, nicht im Gleichgewichte stehen, so ändern sie dessen Bewegungszustand (vergl. § 54).

Um die Aufgabe der Kinetik, welche solche Änderungen zu untersuchen und darzustellen hat, näher zu bestimmen, ist es notwendig, einerseits genauer zu erläutern, was man unter dem Bewegungszustande eines Körpers zu verstehen hat, und andererseits darauf hinzuweisen, daß dieser Bewegungszustand sich selbst bei starren Körpern auch ohne den Einfluß äußerer Kräfte ändern kann.

Unter dem elementaren Bewegungszustande eines Körpers verstehen wir das Bild des Körpers, welches wir erhalten, wenn wir in jedem seiner Punkte die Bewegungsgröße, welche einem bestimmten Zeitpunkte t entspricht, als Vektor anbringen. Wir nehmen dabei den Punkt zum Ursprung, die Geschwindigkeit des Punktes zur Zeit t als Richtung und das Produkt aus dem Werte seiner Geschwindigkeit zur Zeit t und seiner Masse als Maßzahl des Vektors. Vergl. S. 250 u. f.

Man nennt die Bewegungsgröße als Vektor wohl auch Momentankraft oder Impuls.

Der Bewegungszustand eines Körpers für eine bestimmte Zeit erwächst dann aus den elementaren Bewegungszuständen, die dem Verlaufe dieser Zeit entsprechen.

Die einfachen Bewegungszustände, welche wir gelegentlich schon in der Statik betrachtet haben, nämlich die gleichförmige Verschiebung mit gerader Leitlinie, die gleichförmige Drehung um eine, im Raume unbewegliche Hauptachse des Körpers durch dessen Massenmittelpunkt (vergl. S. 388) und die entsprechende Schraubung, erscheinen demgemäß jetzt als Bewegungszustände, welche während der Bewegung keinen Änderungen unterliegen. Sie bilden gewissermaßen den Übergang von statischen zu kinetischen Verhältnissen, weil hier die Bewegungen, wenigstens für Körper in der Nähe der Erdoberfläche [1]),

[1]) Im Gegensatze zu astronomischen Verhältnissen.

unter dem Einflusse im Gleichgewichte befindlicher Kräfte zu stande kommen. Dabei steht die gleichförmige Verschiebung mit gerader Leitlinie, bei welcher gar keine Effektivkräfte auftreten, den Verhältnissen ruhender Körper am nächsten, während die Betrachtung der anderen beiden Bewegungszustände, bei welchen ja Centripetalkräfte als effektive Kräfte auftreten, schon in die eigentliche Kinetik hineinführt.

Besonders hervorgehoben werden muß nun, daß sich selbst der Bewegungszustand eines starren Körpers auch ohne den Einfluß äußerer Kräfte ändern kann, und zwar gemäß der räumlichen Massenverteilung, welche dem Körper eigen ist. Bei homogenen Körpern wird diese räumliche Massenverteilung schon allein durch die geometrische Gestalt des Körpers gegeben, bei heterogenen Körpern wird sie außerdem durch die veränderliche Dichtigkeit bestimmt. Dreht sich z. B. ein freier starrer Körper in einem bestimmten Zeitpunkte um eine Achse, so ändert sich dieser elementare Bewegungszustand infolge der Massenverteilung auch ohne Einfluß äußerer Kräfte, falls jene Achse nicht eine Hauptachse des Körpers durch dessen Massenmittelpunkt ist. Will man in diesem Falle den elementaren Bewegungszustand erhalten, so bedarf es der Einführung von Kräften, z. B. durch Befestigung des Körpers in zwei Punkten (Achse in Lagern). Auch hier, wo der Bewegungszustand des Körpers unter dem Einflusse von Kräften erhalten wird, handelt es sich im Grunde um eine Änderung des an und für sich veränderlichen Bewegungszustandes.

Wir werden nun zunächst die Behandlung der Bewegungen, welche in technischer Hinsicht am wichtigsten sind, nämlich der Verschiebung und der Drehung um eine feste Achse, zum Abschluß bringen, und darauf zur Kinetik einer beliebigen Bewegung eines starren Körpers und eines Systemes von starren Körpern übergehen. Letztere Aufgabe ist, so vielgestaltig sie auch erscheinen mag, im wesentlichen gelöst, wenn die Schwenkung um einen festen Punkt eine sachgemäße Darstellung erhalten hat, weil sich schließlich in kinetischer Beziehung alle Bewegungen eines starren Körpers auf Verschiebungen seines Massenmittelpunktes und auf Schwenkungen um diesen zurückführen lassen.

97. Die Verschiebung. Nach § 44 u. f. ist bei einer Verschiebung eines starren Körpers das System der Effektivkräfte in jedem Augenblicke gleichwertig einer, durch den Massenmittelpunkt gehenden, Effektivkraft $[K] = M[j]$, falls die Masse des Körpers durch M und die augenblickliche Beschleunigung der Verschiebung durch $[j]$ bezeichnet wird. Da nun das System der Effektivkräfte nach dem Principe von d'Alembert (vergl. auch S. 344) stets dem Systeme der äußeren Kräfte gleichwertig ist, so haben die auf den Körper wirkenden Kräfte in diesem Falle in jedem Augenblicke eine Resultante $[K]$, welche durch den Massenmittelpunkt des Körpers geht.

Umgekehrt ist nach demselben Principe nur ein System äußerer Kräfte, dessen Resultante durch den Massenmittelpunkt des Körpers geht, im stande, diesem eine Verschiebung zu erteilen.

Bei Verschiebungen ist der Massenmittelpunkt des Körpers stets dynamisches Centrum, so daß er als materieller Punkt mit der Masse M

für den Körper eintreten kann. Die dynamischen Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes lassen sich in diesem Falle ohne weiteres auf den ganzen Körper übertragen, zunächst die Gleichung

$$j = \frac{K}{M}, \text{ d. h. Beschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 191)$$

Diese Betrachtungen gelten zunächst für einen freien Körper, dann aber auch, nach Einführung der Reaktionen, für einen unfreien Körper.

Entsprechendes gilt für Systeme starrer Körper, deren einzelne Glieder Verschiebungen unterliegen.

Dabei sind die Bemerkungen, welche bei der Behandlung des Principes der virtuellen Verrückungen in Bezug auf die Reaktionen gemacht wurden, sorgfältig zu beachten.

98. **Die Drehung um eine feste Achse.** Während die Verschiebung eines starren Körpers mit den einfachen Hülfsmitteln, welche die Lehre vom materiellen Punkte unmittelbar darbietet, erledigt werden konnte, zeigten sich in Bezug auf die Drehung (vergl. § 49) um eine Achse gewisse Schwierigkeiten, namentlich war die Ersetzung des Körpers durch einen materiellen Punkt nicht mehr möglich. Außerdem bedurfte die Gleichung der Achsendrehung

$$\iota = \frac{Mo}{Tr}, \text{ d. h. Winkelbeschleunigung} = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}} \quad . \quad 192)$$

einer weiteren Behandlung, sowohl was ihre Bildung als auch was den Bereich ihrer Gültigkeit anlangt.

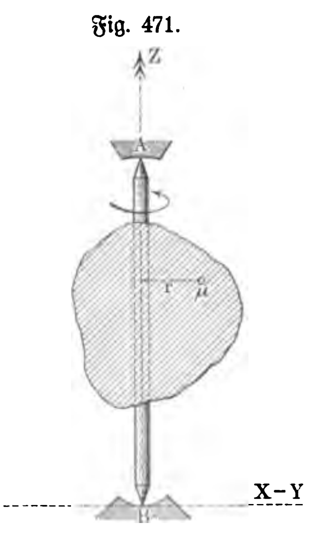
In Bezug auf den Zähler Mo des Ausdruckes für ι hat das erste Kapitel dieses Abschnittes (Dynamik) unterdessen die nötigen Ergänzungen gebracht, während diese in Bezug auf den Nenner Tr noch ausstehen.

Wichtige Folgerungen aus der Gleichung für ι wurden schon am Schlusse von § 49 gegeben, namentlich in Bezug auf die Arbeitsstärke und die Reduktion träger Massen.

Daß obige Gleichung zunächst für die Drehung einer festen Achse gültig ist, wie sie in der Technik verwendet wird, wurde bereits früher erwähnt; auch zeigt die Anwendung Nr. 14 a. S. 386, daß schon in diesem Falle eine Fülle von Beziehungen zu beachten sind.

Wir betrachten nun diesen Fall etwas genauer, gemäß Fig. 471.

Fig. 471.



Wenn die Mittellinie der festen Achse als Z-Achse eingeführt wird, so gelten für das System der Effektivkräfte der Drehungen die Gleichungen Nr. 107 a und 107 b,

wobei man sich den einen Endpunkt B der Achse AB als Anfangspunkt O der Koordinaten gewählt denken kann. Da das System der gegebenen Kräfte, zu welchem auch die Reaktionen in A und in B gehören, nach dem Principe von d'Alembert (vergl. S. 344) dem Systeme der Effektivkräfte gleichwertig ist, so erhält man zwischen den, auf dasselbe Koordinatenkreuz bezogenen Kräften und Momenten beider Systeme sechs Gleichungen. Von diesen Gleichungen genügt eine für die Darstellung der Bewegung, so daß die fünf übrigen zur Bestimmung der zunächst unbekannten Reaktionen in A und B verwendet werden können. Da nämlich bei dem Zwange der Bewegung für diese nur die Drehung um die Z-Achse in Frage kommt, so ist für die Bewegung nur die eine Gleichung von Bedeutung, welche die Momente für die Z-Achse darstellt. Diese lautet für die Effektivkräfte gemäß Gleichung Nr. 107 b bei einer Winkelbeschleunigung ι, falls man das Trägheitsmoment der Körper für die Z-Achse mit $\mathfrak{Tr}_z$ bezeichnet, je nach dem Sinne der ι entsprechenden Drehung

$$M_z = \pm \iota \cdot \mathfrak{Tr}_z.$$

Ist $\overline{M_z}$ das Moment der gegebenen Kräfte für die Z-Achse, zu welchen die Reaktionen von A und B nichts beitragen, so folgt demnach auf Grund des Principes von d'Alembert

$$\overline{M_z} = M_z = \pm \iota \cdot \mathfrak{Tr}_z.$$

Damit ist die früher bereits benutzte Formel für die Drehung um feste Achsen gerechtfertigt.

Die übrigen fünf Gleichungen bestimmen die vier Komponenten der Reaktionen von A und B, welche die Richtung der X-Achse und der Y-Achse haben, und die Gesamtreaktion innerhalb der Z-Achse, deren Verteilung auf die Punkte A und B statisch-unbestimmt ist. Vergl. S. 473.

Da die Effektivkraft Z in Richtung der Z-Achse den Wert Null hat, so hängt diese Gesamtreaktion in Richtung der Z-Achse nur von den gegebenen Kräften ab.

Für die Bestimmung der vier Reaktionen von A und B, welche die Richtung der X-Achse und der Y-Achse haben, stehen also vier Gleichungen zur Verfügung.

Bezeichnet man diese vier Reaktionen bezw. durch $R_A^{(x)}$, $R_A^{(y)}$, $R_B^{(x)}$, $R_B^{(y)}$ und AB durch l, so lauten diese vier Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} X &= \overline{X} + R_A^{(x)} + R_B^{(x)} \\ Y &= \overline{Y} + R_A^{(y)} + R_B^{(y)} \\ M_x &= \overline{M_x} + l \cdot R_A^{(y)} \\ M_y &= \overline{M_y} - l \cdot R_A^{(x)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 193)$$

falls man die Komponenten des Systemes der Effektivkräfte, welche die Gleichungen Nr. 107 a und 107 b liefern, bezw. durch X, Y, M_x, M_y und die Komponenten des Systems der gegebenen Kräfte bezw. durch $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{M_x}$, $\overline{M_y}$ bezeichnet. (Vergl. Fig. 216 und Fig. 471.)

Die Auflösung des Gleichungssystemes ergiebt

$$R_A^{(x)} = -\frac{M_y - \overline{M}_y}{l}, \qquad R_A^{(y)} = +\frac{M_x - \overline{M}_x}{l}$$

$$R_B^{(x)} = X - \overline{X} + \frac{M_y - \overline{M}_y}{l}, \quad R_B^{(y)} = Y - \overline{Y} - \frac{M_x - \overline{M}_x}{l}.$$

Der Angriffspunkt der Kraft $[R_A^{(x)}] \overset{\times}{+} [R_B^{(x)}]$, deren Wert $X - \overline{X}$ ist, teilt $AB = l$ im Verhältnisse $R_B^{(x)} : R_A^{(x)}$, der Angriffspunkt der Kraft $[R_A^{(y)}] + [R_B^{(y)}]$, deren Wert $Y - \overline{Y}$ ist, teilt $AB = l$ im Verhältnisse $R_B^{(y)} : R_A^{(y)}$.

Da φ und ι in den Ausdrücken X, Y, M_x, M_y im allgemeinen Funktionen der Zeit sind, so sind die bestimmten Reaktionen gleichfalls im allgemeinen mit der Zeit veränderlich.

Bei gleichförmiger Drehung ($\iota = 0$ und $\varphi = \gamma$) treten die Vereinfachungen ein, welche bereits auf S. 387 u. f. ausgeführt wurden.

In technischer Hinsicht wird die Drehungsachse auch als eine freie Achse bezeichnet, wenn die Reaktionen von A und B in die Richtung der Achse fallen.

Es haben dann $R_A^{(x)}$, $R_B^{(x)}$, $R_A^{(y)}$, $R_B^{(y)}$ sämtlich den Wert Null, so daß $X = \overline{X}$, $Y = \overline{Y}$, $M_x = \overline{M}_x$, $M_y = \overline{M}_y$ ist. Nach den früheren Betrachtungen tritt dies z. B. ein, wenn die Drehungsachse eine Hauptachse ist, welche durch den Massenmittelpunkt geht, und wenn außer $\overline{M}_z$ keine äußere Kräfte auf den Körper wirken.

Während sich nach dem sonst üblichen Gebrauche die Begriffe „freie Achse" und „Hauptachse durch den Massenmittelpunkt" völlig decken, wird also in technischer Hinsicht eine Achse auch dann „frei" genannt, wenn sie keine senkrecht gegen sie gerichtete Reaktionen auszuhalten hat.

Da der Druck auf die Lager und die Reaktionen der Lager u. s. w. zu Materialzerstörungen führen, so ist es zweckmäßig, innerhalb der Technik möglichst die Hauptachsen durch den Massenmittelpunkt eines Körpers als Drehungsachsen zu benutzen. Dieser Einsicht entsprechen auch die üblichen Formen der in der Technik verwendeten drehbaren Körper.

Für manche Anwendungen ist es zweckmäßig, das System der Effektivkräfte, abgesehen von M_z, auf zwei sich kreuzende Kräfte zurückzuführen. Vergl. S. 337.

Wenn man die Paare M_x und M_y der Formel 107 b bezw. in die YZ-Ebene und in die XZ-Ebene legt und ihnen dort bezw. die Kräfte Y und X der Formel Nr. 107 a als Kräfte giebt, so sind die zugehörigen Arme z_1 und z_2 gegeben durch

$$M_x = z_1 \,.\, Y \quad \text{und} \quad M_y = z_2 \,.\, X.$$

Dreht man jetzt die Paare bezw. in der YZ-Ebene und in der XZ-Ebene so, daß je eine ihrer Kräfte die Kräfte $[Y]$ und $[X]$ in O zerstört, so bleiben die anderen Kräfte der Paare übrig. Die erste schneidet die positive Z-Achse im Abstande z_1 von O und hat die Richtung und den Wert von $[Y]$, die zweite schneidet die negative Z-Achse im Abstande z_2 von O und hat die Richtung und den Wert von $[X]$.

Für diese Darstellung gelten demnach die Formeln

$$z_1 = \frac{-\varphi^2 D_x + \iota D_y}{-\varphi^2 M\eta + \iota M\xi} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{+\varphi^2 D_y + \iota D_x}{-\varphi^2 M\xi - \iota M\eta} \quad . \quad 194)$$

Diese Formeln für z_1 und z_2 ändern sich nicht, wenn man statt der Effektivkräfte deren Gegenkräfte einführt, da dabei die Vorzeichen im Zähler und im Nenner von z_1 und z_2 umschlagen.

Die Einführung dieser Gegenkräfte ist von einer gewissen Bedeutung.

Innerhalb der Technik pflegt man sich nämlich den Einfluß der Bewegung auf den sich drehenden Körper dadurch zu veranschaulichen, daß man sich die Gegenkräfte der Effektivkräfte an dem ruhenden Körper angebracht denkt. Da das System der Effektivkräfte dem Systeme der äußeren Kräfte (einschließlich der Reaktionen) gleichwertig ist, so steht dieses System mit dem Systeme der Gegenkräfte der Effektivkräfte im Gleichgewichte. Vergl. S. 344. Denkt man sich also an dem ruhenden Körper neben den äußeren Kräften die Gegenkräfte der Effektivkräfte angebracht, so handelt es sich dann des weiteren lediglich um statische Betrachtungen. Vergl. S. 260. Man nennt die (fingierten) Gegenkräfte der Effektivkräfte, so weit sie von der Winkelgeschwindigkeit φ abhängen, Centrifugalkräfte, so weit sie von der Winkelbeschleunigung ι abhängen, Trägheitskräfte. Nach Gleichung Nr. 107 a) und 107 b) gilt also für die Centrifugalkräfte eines Körpers bei der Drehung um die Z-Achse

$$\left.\begin{aligned} X &= +\varphi^2 M\xi \\ Y &= +\varphi^2 M\eta \\ Z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{aligned} M_x &= +\varphi^2 D_x \\ M_y &= -\varphi^2 D_y \\ M_z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 195)$$

Ebenso gilt für die Trägheitskräfte

$$\left.\begin{aligned} X &= +\iota M\eta \\ Y &= -\iota M\xi \\ Z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{aligned} M_x &= -\iota D_y \\ M_y &= -\iota D_x \\ M_z &= +\iota \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 196)$$

Beide Systeme lassen sich, abgesehen von M_z, durch die Formel Nr. 194) auf je zwei sich kreuzende Kräfte zurückführen, indem man in dieser einmal $\iota = 0$ und einmal $\varphi = 0$ setzt.

Solange es sich um gleichförmige Drehungen ($\iota = 0$) handelt, kommt hier lediglich das System der Centrifugalkräfte zur Geltung.

Für dieses System der Centrifugalkräfte gilt

$$+z_1 = +\frac{D_x}{M\eta} \quad \text{und} \quad -z_2 = +\frac{D_y}{M\xi} \quad . \quad . \quad . \quad 197)$$

Können die beiden sich kreuzenden Kräfte, welche dieses System darstellen, durch eine Kraft ersetzt werden, so kann man von einer Centrifugalkraft des ganzen Körpers sprechen.

Sind ξ, η und D_x, D_y von Null verschieden, so ist die allgemeine Bedingung[1]) dafür $+z_1 = -z_2$, d. h. $\xi D_x - \eta D_y = 0$.

[1]) Sie ist im Sonderfalle der Bedingung $XM_x + YM_y + ZM_z = 0$. Vergl. S. 335.

Der Wert dieser Centrifugalkraft ist $\varphi^2 M \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \varphi^2 M \varrho$, falls man den Abstand des Schwerpunktes von der Achse durch ϱ bezeichnet, d. h. für die Berechnung dieses Wertes darf man den Körper stets durch seinen Schwerpunkt ersetzt denken.

Von Wichtigkeit ist der Sonderfall, in welchem der Körper eine Symmetrieebene hat, senkrecht zur Drehungsachse; es ist dann (vergl. S. 388) $D_x = 0$ und $D_y = 0$, falls die Symmetrieebene zur XY-Ebene genommen wird, welche dann also auch den Schwerpunkt enthält. Die Resultante aus $[X]$ und $[Y]$ geht hier, da $Y : X = \eta : \xi$ ist, durch den Schwerpunkt. In diesem Falle verhält sich der Körper wie ein materieller Punkt von der Masse M, der mit dem Körperschwerpunkte zusammenfällt, d. h. der Körper ist durch seinen Schwerpunkt ersetzbar.

Zerlegt man einen beliebigen Körper in unendlich-dünne Platten, senkrecht zur Drehungsachse, so gilt obige Betrachtung für jede einzelne Platte. Ist der Körper nun so gebaut, daß die Schwerpunkte der einzelnen Platten in eine Ebene fallen, welche durch die Drehungsachse geht, so bilden die Centrifugalkräfte der einzelnen Platten ein ebenes System von Parallelkräften; dieses hat, abgesehen von dem Sonderfalle des Kräftepaares, eine Resultante.

Für eine Platte im Abstande z von der XY-Ebene ist $D_x = \Sigma \mu y z = z \Sigma \mu y$ und $D_y = \Sigma \mu x z = z \Sigma \mu x$. Bezeichnet man die Masse der Platte mit m und die Abstände ihres Schwerpunktes von der XZ-Ebene und der YZ-Ebene bezw. mit $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$, so ist $D_x = mz \,.\, \mathfrak{y}$ und $D_y = mz \,.\, \mathfrak{x}$. Legt man nun die YZ-Ebene durch die Schwerpunkte der Platten, so ist für jede Platte $\mathfrak{x} = 0$ und demnach auch $D_y = 0$, so daß D_y auch für den Körper den Wert Null erhält, ebenso wie ξ. Dagegen wird D_x für den Körper $\Sigma mz \,.\, \mathfrak{y}$. Von den Gleichungen Nr. 195) bleiben also hier bestehen

$$Y = + \varphi^2 M \eta \quad \text{und} \quad M_x = + \varphi^2 D_x = + \varphi^2 \Sigma m z \mathfrak{y}.$$

Demnach ist für den Fall einer Resultante deren Angriffspunkt gegeben durch $z_1 = \dfrac{\Sigma m z \mathfrak{y}}{M \eta}$.

Da die Höhe des Schwerpunktes über der XY-Ebene durch $\zeta = \dfrac{\Sigma m z}{M}$ bestimmt ist, so geht die Resultante hier im allgemeinen nicht durch den Schwerpunkt, obwohl ihr Wert $\varphi^2 M \eta$ so gebildet ist, als wenn auch hier der Schwerpunkt für den Körper als dynamisches Centrum eintreten könnte[1]).

[1]) Läßt sich der Körper auffassen als eine ebene Platte, welche die Drehungsachse in sich aufnimmt, so kann man die Ebene der Platte als YZ-Ebene nehmen; es ist dann $X = 0$ und $D_y = 0$, so daß nur die Gleichungen $Y = + \varphi^2 M \eta$ und $M_x = + \varphi^2 D_x$ bestehen bleiben.

Die Centrifugalkraft hat hier also den Wert, als wenn sich im Schwerpunkte der Platte deren Masse verdichtete, ihr Angriffspunkt liegt (z_1) aber in der Entfernung $z_0 = \dfrac{D_x}{M \,.\, \eta}$ von der Y-Achse; seine Entfernung y_0 von der Z-Achse ist gegeben durch $\Sigma(\varphi^2 \mu y) y = (\varphi^2 M \eta) y_0$, d. h. es ist $y_0 = \dfrac{\Sigma \mathfrak{r}_z}{M \,.\, \eta}$.

Nur wenn $\eta \Sigma m z = \Sigma m z \mathfrak{y}$ ist, läßt sich auch hier der Körper durch seinen Schwerpunkt ersetzen, also z. B. für $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{y}_3$ u. s. w., d. h. wenn die Schwerpunkte der einzelnen Platten auf einer Geraden liegen, welche der Drehungsachse parallel ist, wie es z. B. bei einem homogenen Rotationskörper der Fall ist, wenn die Drehungsachse seiner Achse parallel ist.

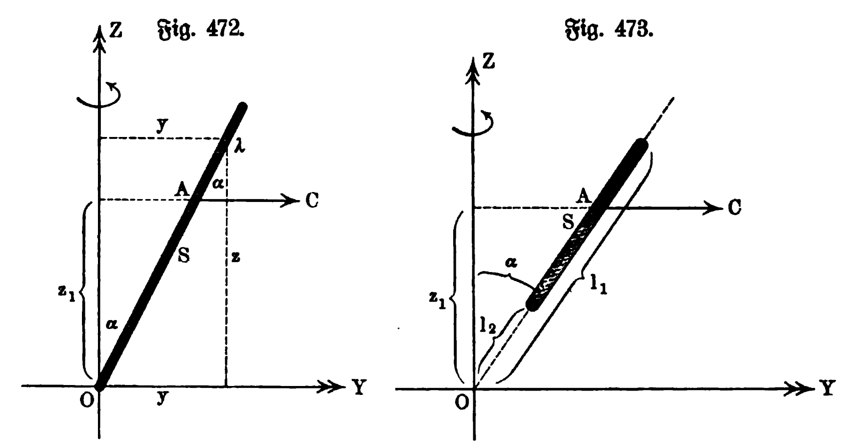


Fig. 472. Fig. 473.

Für eine Stange von der Länge l, die sich um die Achse OZ dreht, wie es Fig. 472 andeutet, ist die Centrifugalkraft bei einer Belastung γ für die Längeneinheit

$$C = \varphi^2 (l\gamma) \cdot \varrho = \tfrac{1}{2} \varphi^2 m l \sin\alpha,$$

falls man die Masse $l\gamma$ durch m bezeichnet.

Da hier, wenn man die Ebene durch die Stange als YZ-Ebene einführt, $D_y = 0$ ist, so hat man nur $D_x = \Sigma \mu y z$ zu berechnen.

Für ein Element λ der Stange ist $\mu = \lambda\gamma$ und, da $y = z\, tg\, \alpha$ ist, $\Sigma \mu y z = \lambda \gamma\, tg\, \alpha\, \Sigma z^2$.

Hat das betrachtete Element von O den Abstand $p\lambda$, so hat das zugehörige z den Wert $p\lambda \cos\alpha$, so daß

$$\Sigma \mu y z = \lambda^3 \gamma \sin\alpha \cos\alpha\, \Sigma p^2$$

ist.

Für $l = n\lambda$ ergiebt sich bei $\lim n = \infty$

$$D_x = \frac{\gamma}{3} l^3 \sin\alpha \cos\alpha = \tfrac{1}{3} m l^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Für den Angriffspunkt A der Centrifugalkraft gilt also

$$z_1 = \frac{D_x}{M \cdot \eta} = \frac{\frac{1}{3} m l^2 \sin\alpha \cos\alpha}{m \cdot \frac{1}{2} l \sin\alpha} = \tfrac{2}{3} l \cos\alpha,$$

d. h. er liegt auf der Stange von O um $\frac{2}{3} l$ entfernt, während der Schwerpunkt von O den Abstand $\frac{1}{2} l$ hat.

Für die Stange der Fig. 473 gilt

$$C = \tfrac{1}{2} \varphi^2 \sin\alpha\, \gamma\, (l_1^2 - l_2^2).$$

Da hier die Masse $m = (l_1 - l_2)\gamma$ ist, so gilt auch

$$C = \tfrac{1}{2}\varphi^2 m (l_1 + l_2) \sin\alpha.$$

Ferner ist

$$D_x = \tfrac{1}{3}\gamma \sin\alpha \cos\alpha (l_1^3 - l_2^3).$$

Man hat also, da $\eta = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)\sin\alpha$ ist, hier

$$z_1 = \frac{\frac{1}{3}\gamma \sin\alpha \cos\alpha (l_1^3 - l_2^3)}{\frac{1}{2}\gamma (l_1 - l_2)(l_1 + l_2)\sin\alpha} = \frac{2}{3}\frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2}\cos\alpha.$$

Für $l_1 = 30$ cm und $l_2 = 10$ cm hat z. B. der Abstand des Angriffspunktes auf dem Stabe, von O aus gerechnet, den Wert 21,67 cm, während der Schwerpunkt entsprechend den Abstand 20 cm hat.

Auch in den Fällen, wo die sich kreuzenden Kräfte, welche das System der Centrifugalkräfte eines Körpers ersetzen, nicht auf eine Kraft zurückgeführt werden können, kann man aus X und Y eine Resultante vom Werte $\varphi^2 M\varrho$ bilden, nur tritt dann neben dieser noch ein Kräftepaar auf.

Wählt man den Schwerpunkt ein für allemal als Zurückführungspunkt dieses Kräftesystems, so kann man ihn demnach auch stets als dynamisches Centrum betrachten, nur muß man außerdem noch von Fall zu Fall gewisse Kräftepaare beachten, welche auf Bewegung der Achse wirken, während die im Schwerpunkte angreifende Centrifugalkraft an der Achse nach außen reißt.

Fig. 474.

In den zuletzt behandelten Beispielen der Fig. 472 und 473 würde neben der im Schwerpunkte an der Achse wirkenden Kraft $[C']$ vom Werte C noch ein Kräftepaar vom Werte $+ C \,.\, d$ auftreten, welches auf Bewegung der Achse wirkt, falls $AS \,.\, \cos\alpha = d$ ist.

Festzuhalten ist bei allen diesen Betrachtungen, daß durch Einführung der Centrifugalkräfte, ebenso wie auch der Trägheitskräfte, die Inanspruchnahme des Körpers innerhalb der Bewegung so dargestellt wird, wie sie am ruhenden Körper unter dem Einflusse entsprechender statischer Kräfte eintreten würde.

Die Hauptgleichung des Abschnittes, Nr. 192, benutzen wir in der kurzen Form

$$Mo = \iota \,.\, \mathfrak{T}r,$$

wenn über die Lage der Achse u. s. w. keine Zweifel obwalten. Ihre Ableitung kann man, auf Grund der vorstehenden Betrachtung, auch kurz auf folgendem Wege gewinnen. Ist O in Fig. 474 der Durchtritt der Achse, senkrecht zur Ebene der Zeichnung, so ist das Moment der Effektivkraft von P vollständig gegeben als $r(\mu j_T)$, weil die Komponente $[j_N]$ von $[j_G]$ die Achse schneidet. Führt man die Winkelbeschleunigung ι ein, so ist $j_T = r\iota$ und man hat also für jenes Moment den Wert $\iota \,.\, r^2\mu$. Da ι für die einzelnen Punkte des Körpers zur Zeit t denselben Wert hat, so führt diese Betrachtung für den Körper zu

$$Mo = \iota(r_1^2\mu_1 + r_2^2\mu_2 + \cdots) = \iota \,.\, \mathfrak{T}r.$$

Dabei bedeutet Mo zunächst das Moment der Effektivkräfte, gemäß dem Principe von d'Alembert aber auch das Moment der gegebenen Kräfte.

99. Die Trägheitsmomente und Deviationsmomente für verschiedene Achsen und die Hauptachsen des Körpers. Um die Bestimmung von $\mathfrak{Tr}$ für besondere Fälle durchführen zu können, betrachten wir diese Größe etwas genauer.

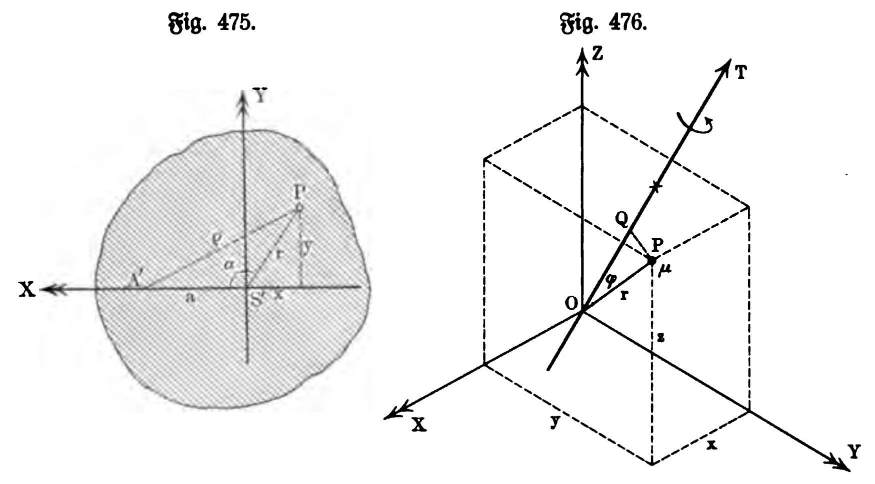
Dazu beweisen wir zunächst folgenden Satz: Ist $\mathfrak{Tr}$ für eine, durch den Massenmittelpunkt S des Körpers gelegte Achse bekannt, so ist es für jede Parallelachse im Abstande a gegeben durch die Formel

$$\mathfrak{Tr}_a = \mathfrak{Tr}_S + a^2 \,.\, M,$$

in welcher $\mathfrak{Tr}_S$ das Trägheitsmoment für die Achse durch den Schwerpunkt, $\mathfrak{Tr}_a$ das Trägheitsmoment für die Parallelachse im Abstande a und M die Masse des Körpers bezeichnet.

Fig. 475 stelle eine Scheibe des Körpers dar, senkrecht zu den beiden Achsen, welche in S' und A' durchtreten mögen.

Fig. 475. Fig. 476.



Jeder Punkt P in der Schnittebene liefert für $\mathfrak{Tr}_S$ den Beitrag μr^2 und für $\mathfrak{Tr}_a$ den Beitrag $\mu \varrho^2$. Da $\varrho^2 = r^2 + a^2 - 2 a r \cos\alpha$ ist, so ist

$$\mu\varrho^2 = \mu r^2 + \mu a^2 - 2\mu a r \cos\alpha.$$

Zerlegt man den Körper in unendlich-dünne Schichten, senkrecht zu der Achse, so gilt also

$$\Sigma\mu\varrho^2 = \Sigma\mu r^2 + a^2(\mu_1 + \mu_2 + \cdots) - 2a\Sigma\mu r\cos\alpha,$$

d. h.

$$\mathfrak{Tr}_a = \mathfrak{Tr}_S + a^2 \,.\, M - 2a\Sigma\mu r\cos\alpha.$$

Da $r\cos\alpha = x$ ist, so ist $\Sigma\mu r\cos\alpha = \Sigma\mu x$, d. h. es ist das Massenmoment für die YZ-Ebene, falls man die Z-Achse senkrecht zur Ebene der Zeichnung durch S' legt. Da diese Ebene den Schwerpunkt enthält, so ist dieses Moment Null. Demnach gilt

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_a = \mathfrak{T}\mathfrak{r}_S + a^2 M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 198)$$

Ferner beweisen wir den Satz: Sind die Trägheitsmomente $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_x$, $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_y$, $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z$ für drei Achsen OX, OY, OZ, die sich rechtwinkelig in einem Punkte O schneiden, gegeben und sind für die Ebenen dieser Achsen auch die drei Deviationsmomente (Centrifugalmomente) D_x, D_y, D_z gegeben, so ist auch für eine beliebige durch O gehende Achse OT von bekannter Richtung (α, β, γ) das entsprechende Trägheitsmoment $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_{\alpha, \beta, \gamma}$ gegeben.

Bezeichnet man in Fig. 476 durch PQ das Lot von einem beliebigen Punkte P auf OT, so ist der Beitrag von P für das gesuchte Trägheitsmoment gegeben als $\mu \,.\, \overline{PQ}^2$.

Für das Quadrat dieses Lotes PQ gilt, falls $P = (x;\, y;\, z)$ ist, der Ausdruck

$$(y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (z^2 + x^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma$$
$$- 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta.$$

Man leitet ihn unter anderem leicht auf folgende Weise ab. Man hat $PQ = r \,.\, \sin\varphi$ und $\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$, falls OP mit den Achsen bezw. die Winkel α', β', γ' bildet (vergl. Gleichung Nr. 11). Aus $x = r\cos\alpha'$, $y = r\cos\beta'$, $z = r\cos\gamma'$ folgt

$$\cos\varphi = \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{r}$$

und

$$\sin\varphi^2 = 1 - \cos^2\varphi = \frac{r^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2}{r^2},$$

so daß

$$\overline{PQ}^2 = r^2\sin^2\varphi = (x^2 + y^2 + z^2) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$$

ist.

Entwickelt man die Quadrate unter Berücksichtigung der Gleichung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, so erhält man den oben angegebenen Wert.

Behandelt man alle Punkte des Körpers, wie für P angegeben, so erhält man

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_{\alpha, \beta, \gamma} = \Sigma\mu \,.\, \overline{PQ}^2 = \cos^2\alpha\,\Sigma\mu(y^2 + z^2) + \cos^2\beta\,\Sigma\mu(z^2 + x^2)$$
$$+ \cos^2\gamma\,\Sigma\mu(x^2 + y^2) - 2\cos\beta\cos\gamma\,\Sigma\mu yz - 2\cos\gamma\cos\alpha\,\Sigma\mu zx$$
$$- 2\cos\alpha\cos\beta\,\Sigma\mu xy.$$

Da $\sqrt{y^2 + z^2}$ den Abstand des Punktes P von der X-Achse bezeichnet, so ist $\Sigma\mu(y^2 + z^2) = \mathfrak{T}\mathfrak{r}_x$ das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die X-Achse als Drehungsachse u. s. w.

Ebenso ist $\Sigma\mu yz = D_x$ das Deviationsmoment (Centrifugalmoment) des Körpers in Bezug auf die YZ-Ebene, welches auch als D_{yz} bezeichnet werden kann, u. s. w.

Demgemäß gilt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}\mathfrak{r}_{\alpha, \beta, \gamma} = \mathfrak{T}\mathfrak{r}_x \,.\, \cos^2\alpha + \mathfrak{T}\mathfrak{r}_y \,.\, \cos^2\beta + \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z \,.\, \cos^2\gamma \\ - 2D_x\cos\beta\cos\gamma - 2D_y\cos\gamma\cos\alpha - 2D_z\cos\alpha\cos\beta \end{aligned}\right\} \quad . \quad 199)$$

Die Formeln Nr. 198) und 199) gestatten, das Trägheitsmoment für jede beliebige Achse herzustellen, falls für irgend einen Punkt O des Körpers

und ein durch diesen gelegtes Achsensystem die Größen $\mathfrak{Tr}_x$, $\mathfrak{Tr}_y$, $\mathfrak{Tr}_z$ und D_x, D_y, D_z gegeben sind.

Um dies durchzuführen, zeichnet man zu der gegebenen Achse I Parallelen II und III bezw. durch O und durch S. Unmittelbar gegeben ist dann durch Gleichung Nr. 199) das Trägheitsmoment für die Achse II durch O, welches $\mathfrak{Tr}_{II}$ heißen mag. Ist a_2 der Abstand von II und III, so gilt nun ferner nach Gleichung Nr. 198

$$\mathfrak{Tr}_{II} = \mathfrak{Tr}_{III} + a_2^2 \,.\, M, \text{ d. h. } \mathfrak{Tr}_{III} = \mathfrak{Tr}_{II} - a_2^2 \,.\, M.$$

Ist endlich a_1 der Abstand von I und III, so gilt gleichfalls nach Gleichung Nr. 198)

$$\mathfrak{Tr}_I = \mathfrak{Tr}_{III} + a_1^2 \,.\, M = \mathfrak{Tr}_{II} + (a_1^2 - a_2^2) M.$$

Diese Bestimmung läßt sich sehr vereinfachen, wenn man das Kreuz durch O geschickt wählt.

Trägt man auf OT in Fig. 476 eine Strecke OE ab vom Werte $\frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_{\alpha,\beta,\gamma}}}$, so erhält man einen Punkt E, dessen Koordinaten $\mathfrak{x} = OE \,.\, \cos\alpha$, $\mathfrak{y} = OE \,.\, \cos\beta$, $\mathfrak{z} = OE \,.\, \cos\gamma$ sind. Denkt man diese Konstruktion für alle durch O gehenden Strahlen durchgeführt, so entsteht eine Fläche, für welche O Centrum sein muß, da die Werte für OE und $\overline{OE}$ dieselben sind, falls OE und $\overline{OE}$ auf einer Geraden liegen.

Diese Fläche ist leicht zu bestimmen, indem man $\cos\alpha = \frac{\mathfrak{x}}{OE}$, $\cos\beta = \frac{\mathfrak{y}}{OE}$, $\cos\gamma = \frac{\mathfrak{z}}{OE}$ in den Wert von $\mathfrak{Tr}_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{C^2}{\overline{OE}^2}$ einführt. So ergiebt sich

$$C^2 = \mathfrak{x}^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_x + \mathfrak{y}^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_y + \mathfrak{z}^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_z - 2 D_x \mathfrak{y}\mathfrak{z} - 2 D_y \mathfrak{z}\mathfrak{x} - 2 D_z \mathfrak{x}\mathfrak{y}.$$

Man erhält also eine geschlossene Fläche zweiter Ordnung, deren Centrum O ist, d. h. ein dreiachsiges Ellipsoid vom Centrum O, welches das **Trägheitsellipsoid** für O heißt.

Ersetzt man das zufällig gewählte Koordinatensystem durch das System der Hauptachsen (ξ, η, ζ) des Ellipsoides, so geht obige Gleichung über in

$$C^2 = \xi^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_\xi + \eta^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_\eta + \zeta^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 200\,\text{a})$$

d. h. in Bezug auf dieses System erhalten die Größen D_ξ, D_η, D_ζ den Wert Null.

In diesem Systeme gilt also auch für $\mathfrak{Tr}_{\alpha,\beta,\gamma}$ die einfachere Gleichung

$$\mathfrak{Tr}_{\alpha,\beta,\gamma} = \mathfrak{Tr}_\xi \,.\, \cos^2\alpha + \mathfrak{Tr}_\eta \,.\, \cos^2\beta + \mathfrak{Tr}_\zeta \,.\, \cos^2\gamma \quad . \quad 200\,\text{b})$$

falls die Achse, auf welche sich $\mathfrak{Tr}_{\alpha,\beta,\gamma}$ bezieht, mit den Hauptachsen des Ellipsoides bezw. die Winkel α, β, γ bildet.

Demnach gelangen wir zu dem Schlusse:

Durch jeden Punkt O eines Körpers geht ein, aber im allgemeinen auch nur ein System dreier, aufeinander rechtwinkeliger Achsen (ξ, η, ζ), für welche die Deviationsmomente (Centrifugalmomente) D_ξ, D_η, D_ζ verschwinden: man nennt diese Achsen die Hauptachsen des Körpers für den Punkt O.

Wählt man diese Achsen zu Koordinatenachsen, so reicht die Kenntnis der drei Trägheitsmomente $\mathfrak{Tr}_\xi$, $\mathfrak{Tr}_\eta$, $\mathfrak{Tr}_\zeta$, welche Hauptträgheitsmomente heißen, aus, um das Trägheitsmoment für jede beliebige Achse durch O zu bestimmen, gemäß Gleichung Nr. 200 b).

Da C^2 jeden beliebigen Wert erhalten kann, so stellt die Gleichung Nr. 200 a) eine unendliche Schar ähnlicher und ähnlich-gelegener Ellipsoide dar, deren jedes für die Untersuchung brauchbar ist.

Liegen keine besonderen Gründe vor, so kann man $C^2 = 1$ setzen.

Stellt man ein Trägheitsmoment $\mathfrak{Tr}$ gemäß der Reduktion träger Massen (vergl. S. 257) in der Form $\mathfrak{Tr} = ml^2$ dar, so wird l der entsprechende Trägheitsarm genannt, weil ein materieller Punkt von der Masse m im Abstande l von der Achse in Bezug auf diese das Trägheitsmoment $\mathfrak{Tr}$ hat.

Denkt man sich den Körper für eine bestimmte Achse (α, β, γ) durch einen materiellen Punkt von der Körpermasse M ersetzt, so gilt

$$\mathfrak{Tr}_{\alpha,\beta,\gamma} = \varrho^2_{\alpha,\beta,\gamma} \cdot M.$$

Man nennt $\varrho_{\alpha,\beta,\gamma}$ den Trägheitsarm für die Achse (α, β, γ).

Führt man für $\mathfrak{Tr}_\xi$, $\mathfrak{Tr}_\eta$, $\mathfrak{Tr}_\zeta$ die Trägheitsarme ein, so geht Gleichung Nr. 200 a) über in

$$C'^2 = \frac{C^2}{M} = \xi^2\varrho_\xi^2 + \eta^2\varrho_\eta^2 + \zeta^2\varrho_\zeta^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 201)$$

Hier setzt man zweckmäßig $C^2 = M$ bezw. $C'^2 = 1$.

Ist das Trägheitsellipsoid ein Umdrehungsellipsoid, dessen Achse z. B. die ζ-Achse ist, so ist $\mathfrak{Tr}_\xi = \mathfrak{Tr}_\eta = \mathfrak{Tr}$; in diesem Falle hat $\mathfrak{Tr}_{\alpha,\beta,\gamma}$ für jede Achse der $\xi\eta$-Ebene $(\gamma = 90^0)$ nach Gleichung Nr. 200 b) den Wert $\mathfrak{Tr}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = \mathfrak{Tr}$, wie auch aus der Anschauung folgt.

Ist das Trägheitsmoment eine Kugel, so ist $\mathfrak{Tr}_\xi = \mathfrak{Tr}_\eta = \mathfrak{Tr}_\zeta = \mathfrak{Tr}$; wie auch aus der Anschauung folgt, hat in diesem Falle jedes $\mathfrak{Tr}_{\alpha,\beta,\gamma}$ den Wert $\mathfrak{Tr}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = \mathfrak{Tr}$.

Da nach früheren Bemerkungen (vergl. S. 388) die Deviationsmomente für Symmetrieebenen der Körper verschwinden, so hat z. B. das Rechtkant mit verschiedenen Kanten für seinen Schwerpunkt ein dreiachsiges Ellipsoid als Trägheitsellipsoid, dessen Achsen zu den Kanten des Rechtkants parallel sind, während das Rechtkant auf quadratischer Basis, wenn es kein Würfel ist, den Fall des Umdrehungsellipsoides, der Würfel den Fall der Kugel darstellt.

Wählt man den Schwerpunkt S zum Mittelpunkte des Trägheitsellipsoides, so führt dieses den Namen „Centralellipsoid".

Wählt man eine Hauptachse eines beliebigen Punktes O als Drehungsachse, so gilt gemäß Formel Nr. 108 b) für die Effektivkräfte, falls die Achse die ζ-Achse ist,

$$M_\xi = 0,\ M_\eta = 0,\ M_\zeta = -\iota\,\mathfrak{Tr}_\zeta,$$

d. h. eine Hauptachse verhält sich in Bezug auf Drehungen wie eine feste Achse, wobei im übrigen aber die Formeln Nr. 107 a) zu berücksichtigen sind.

Wählt man im besonderen eine Hauptachse durch den Schwerpunkt S des Körpers als Drehungsachse, so bleibt gemäß Formel Nr. 108 a) und

108 b) bezw. gemäß Formel Nr. 109) von dem Systeme der Effektivkräfte nur

$$M_\zeta = \iota \mathfrak{T} r_\zeta$$

übrig. Demgemäß gilt: Für jeden Körper sind die Hauptachsen des Schwerpunktes und nur diese freie Achsen, falls außer einem, senkrecht zur Achse wirkenden Momente keine äußeren Kräfte vorhanden sind.

100. Die Berechnung der Trägheitsmomente und der Deviationsmomente (Centrifugalmomente). a) Allgemeines. Die Berechnung der Trägheitsmomente und Deviationsmomente ist in der Technik meist nur für homogene Körper erforderlich bezw. für Körper, welche aus solchen zusammengesetzt sind.

Von den Trägheitsmomenten für homogene Körper gelangt man zu den Trägheitsmomenten homogener Flächen und homogener Linien durch Betrachtungen, welche den in der Lehre des Schwerpunktes durchgeführten genau entsprechen, wobei man die Flächeneinheit bezw. die Linieneinheit mit der Masse δ homogen belegt denkt.

Für $\delta = 1$ gelangt man wieder zu rein geometrischen Beziehungen.

Sieht man einen Körper und die Achse, für welche das Trägheitsmoment des Körpers berechnet werden soll, als ein System an und bildet man dieses System ähnlich ab nach dem Modul $1 : \varepsilon$, so verhalten sich die Trägheitsmomente des ursprünglichen Körpers und seiner Abbildung wie $1 : \varepsilon^5$, falls man beide Körper aus demselben homogenen Stoffe hergestellt denkt.

Ist nämlich v ein Volumenelement des ersten Körpers und r dessen Abstand von der Achse, so sind die entsprechenden Größen für den zweiten Körper $v \cdot \varepsilon^3$ und $r \cdot \varepsilon$, so daß dem Trägheitsmomente $(v \cdot \delta) r^2$ das Trägheitsmoment $(v \cdot \varepsilon^3 \cdot \delta) r^2 \varepsilon^2 = (v\delta) r^2 \cdot \varepsilon^5$ entspricht. Solches gilt für alle Volumenelemente beider Körper, also auch für diese selbst.

Für homogen belegte Flächen und Linien sind die entsprechenden Verhältnisse bezw. $1 : \varepsilon^4$ und $1 : \varepsilon^3$.

Will man die Trägheitsmomente eines Körpers für alle möglichen Achsen darstellen, so ist es zweckmäßig, auf die Betrachtung eines Trägheitsellipsoides bezw. im besonderen des Centralellipsoides zurückzugreifen, dessen Achsen ihrer Lage nach (Symmetrie) bei den, in der Technik verwendeten Körpern meist unmittelbar gegeben sind.

Es handelt sich dabei um die Bestimmung der drei Trägheitsmomente für die Hauptachsen des Schwerpunktes, deren jedes im allgemeinen durch einen Grenzübergang hergestellt werden muß.

Von hier aus gelangt man durch die Formeln Nr. 198) und 199) zu dem Trägheitsmomente jeder beliebigen Achse.

Die Anwendungen verlangen besonders häufig die Anwendung von Formel Nr. 198), aus welcher sich noch eine Reihe von brauchbaren Folgerungen ableiten lassen. Besteht z. B. ein Körper aus zwei Teilkörpern von den Massen m_1 und m_2, deren Schwerpunkte S_1 und S_2 heißen, und sind die Trägheits-

momente dieser Körper bezw. für zwei Parallelachsen durch S_1 und S_2 als $\mathfrak{Tr}_1$ und $\mathfrak{Tr}_2$ gegeben, so gilt für eine zu jenen Achsen parallele Achse durch den Gesamtschwerpunkt S die Formel

$$\mathfrak{Tr} = \mathfrak{Tr}_1 + \mathfrak{Tr}_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot e^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 202)$$

falls der Abstand der Achsen durch S_1 und S_2 mit e bezeichnet wird.

Man hat nämlich nach Formel Nr. 198) zunächst, falls a_1 und a_2 bezw. die Abstände der Achsen durch S_1 und S_2 von der Achse durch S bezeichnen,

$$\mathfrak{Tr} = (\mathfrak{Tr}_1 + a_1^2 m_1) + (\mathfrak{Tr}_2 + a_2^2 m_2).$$

Da aber $a_1 + a_2 = e$ und $m_1 a_1 = m_2 a_2$ ist, so lassen sich a_1 und a_2 durch m_1, m_2 und e ausdrücken, wie oben angegeben.

Handelt es sich darum, von einer Achse, die von dem Schwerpunkte den Abstand a_1 hat, überzugehen zu einer Parallelachse, die vom Schwerpunkte den Abstand a_2 hat, so gilt in Bezug auf eine Parallelachse durch S

$$\mathfrak{Tr}_{a_1} = \mathfrak{Tr}_S + a_1^2 . m \text{ und } \mathfrak{Tr}_{a_2} = \mathfrak{Tr}_S + a_2^2 . m,$$

d. h. man hat

$$\mathfrak{Tr}_{a_2} = \mathfrak{Tr}_{a_1} + m(a_2^2 - a_1^2).$$

Fig. 477.

Für die Beziehung des Abstandes a der beiden Achsen zu den Abständen a_1 und a_2 gilt stets (vergl. Fig. 477)

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos \alpha.$$

Liegen die drei Achsen in einer Ebene, so vereinfacht sich diese Beziehung erheblich.

Bei der Berechnung eines bestimmten Trägheitsmomentes eines Körpers finden die folgenden Betrachtungen, welche sich auf ebene, homogen belegte Flächen beziehen, sinngemäß Anwendung.

Gleiches gilt auch in Bezug auf die Deviationsmomente (Centrifugalmomente).

b) Die Bestimmung der Trägheitsmomente und der Deviationsmomente ebener, homogen belegter Flächen. In der Technik spielen die Trägheitsmomente von (ebenen) Querschnitten einzelner Konstruktionsglieder eine hervorragende Rolle, wobei diese als ebene, homogen belegte Flächen (δ) aufzufassen sind, und zwar mit einer Belegung, entsprechend $\delta = 1$.

Faßt man die Ebene der Fläche als XY-Ebene auf, während die Z-Achse senkrecht auf der Fläche steht, so bezeichnet man $\mathfrak{Tr}_x$ und $\mathfrak{Tr}_y$ als achsiale Trägheitsmomente, weil deren Achsen in der Fläche als Achsen auftreten, während man $\mathfrak{Tr}_z$ ein polares Trägheitsmoment[1]) nennt, weil dessen Achse die Fläche nur in einem Punkte (Pol) trifft. Man bezeichnet dann $\mathfrak{Tr}_x$ und $\mathfrak{Tr}_y$ wohl auch bezw. als $\mathfrak{Tr}_1$ und $\mathfrak{Tr}_2$ und $\mathfrak{Tr}_z$ als $\mathfrak{Tr}_0$.

[1]) Die Ausdehnung dieses Begriffes auf Körper ist bisher in der Technik nur von geringer Bedeutung geworden.

Da hier alle materiellen Punkte in der XY=Ebene liegen, so gilt für jeden dieser Punkte gemäß Fig. 478

$$r^2 = y^2 + x^2.$$

Bezeichnet man nun ein Element der Fläche durch φ und die Belegung der Flächeneinheit durch δ, so ist

$$(\varphi\delta)\,r^2 = (\varphi\delta)\,y^2 + (\varphi\delta)\,x^2$$

und demnach auch

$$\Sigma(\varphi\delta)\,r^2 = \Sigma(\varphi\delta)\,y^2 + \Sigma(\varphi\delta)\,x^2,$$

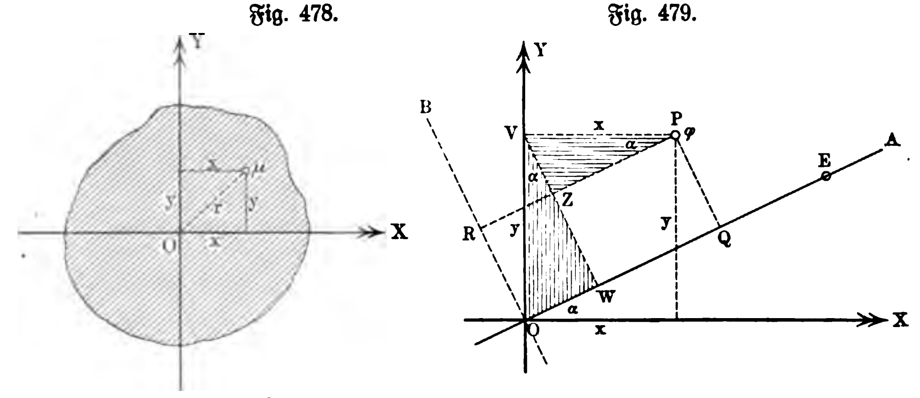
wobei die Summation über alle Elemente der Fläche zu erstrecken ist. Die Glieder dieser Gleichung sind die drei Trägheitsmomente der ebenen Fläche, so daß hier

$$\mathfrak{Tr}_z = \mathfrak{Tr}_x + \mathfrak{Tr}_y \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Tr}_0 = \mathfrak{Tr}_1 + \mathfrak{Tr}_2 \quad . \quad . \quad . \quad 203)$$

gilt.

Von dem Trägheitsellipsoide bezw. im besonderen von dem Centralellipsoide ist hier meist nur der Schnitt mit der XY=Ebene, die sogenannte Trägheitsellipse bezw. im besonderen die Centralellipse von Wichtigkeit.

Fig. 478. Fig. 479.



Man kann diese Ellipse selbständig einführen durch die Erklärung: Wenn man die Trägheitsmomente $\mathfrak{Tr}_\alpha$ einer ebenen Fläche für alle in ihr gelegenen Achsen, die durch einen bestimmten Punkt O gehen, bestimmt, und auf jeder Achse (α) von O aus Streckenpaare vom Werte $\frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_\alpha}}$ aufträgt, so bilden die Endpunkte dieser Streckenpaare die zu O gehörige Trägheitsellipse der ebenen Fläche. Ist O der Schwerpunkt der Fläche, so heißt die Ellipse im besonderen Centralellipse.

Ihre Gleichung erhält man gemäß der Entwickelung auf S. 646 für $z = 0$ als

$$x^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_x + y^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_y - 2\,xy\,D_{xy} = C^2,$$

während zugleich

$$\mathfrak{Tr}_\alpha = \mathfrak{Tr}_x \,.\, cos^2\alpha + \mathfrak{Tr}_y \,.\, sin^2\alpha - D_{xy}\,sin\,2\,\alpha \quad . \quad . \quad 204)$$

ist; dabei bedeuten $\mathfrak{Tr}_x$ und $\mathfrak{Tr}_y$ die Trägheitsmomente für die Achsen OX und OY eines beliebigen rechtwinkeligen Kreuzes und D das Deviations=

moment (Centrifugalmoment) für die XY-Ebene mit ihrem bestimmten Kreuze XOY, welches genauer als D, oder auch als D_{xy} bezeichnet werden kann, während $\mathfrak{Tr}_\alpha$ das Trägheitsmoment für eine Achse darstellt, welche durch O geht und mit der X-Achse den Winkel α bildet.

Um diese Beziehungen selbständig zu entwickeln, bestimmt man hier zunächst den Abstand PQ eines Flächenelementes φ von der durch O gehenden Achse OA, welche unter dem Winkel α gegen OX gegeben ist (vergl. Fig. 479). Man hat

$$PQ = VW - VZ = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

Demnach ist das Trägheitsmoment von φ für OA bei einer homogenen Belegung δ für die Flächeneinheit

$$\varphi \,.\, \overline{PQ}^2 \,.\, \delta = \varphi\,(y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 \,.\, \delta$$
$$= (\varphi\delta)\,y^2 \,.\, \cos^2\alpha + (\varphi\delta)\,x^2 \,.\, \sin^2\alpha - (\varphi\delta)\,xy\sin 2\alpha.$$

Das Trägheitsmoment der ganzen Fläche für OA ist demnach

$$\mathfrak{Tr}_\alpha = \cos^2\alpha\,\Sigma(\varphi\delta)\,y^2 + \sin^2\alpha\,\Sigma(\varphi\delta)\,x^2 - \sin 2\alpha\,\Sigma(\varphi\delta)\,xy.$$

Da die Summen der Reihe nach das Trägheitsmoment $\mathfrak{Tr}_x$ für die X-Achse, das Trägheitsmoment $\mathfrak{Tr}_y$ für die Y-Achse und das Deviationsmoment D für das Kreuz XOY bezeichnen, so ist die zweite Gleichung der Nr. 204) damit von neuem bewiesen.

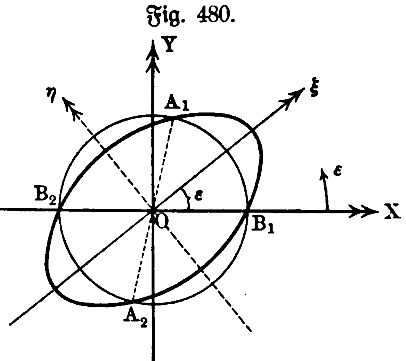
Trägt man nun auf OA eine Strecke $OE = \dfrac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_\alpha}}$ auf, so sind die Koordinaten ihres Endpunktes

$$x = \frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_\alpha}} \cdot \cos\alpha \quad \text{und} \quad y = \frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_\alpha}} \cdot \sin\alpha,$$

so daß $\cos^2\alpha = \dfrac{x^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_\alpha}{C^2}$, $\sin^2\alpha = \dfrac{y^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_\alpha}{C^2}$ und $\sin 2\alpha = \dfrac{2xy \,.\, \mathfrak{Tr}_\alpha}{C^2}$ ist. Trägt man diese Werte in die eben erhaltene Gleichung ein, so erhält man auch die erste Gleichung der Nr. 204) von neuem. Führt man den Trägheitsarm ein, indem man $\mathfrak{Tr}_\alpha = \varrho_\alpha^2(f\delta)$ setzt, wobei f die ganze Fläche und demnach $f\delta$ die ganze Masse bedeutet, so ist $\dfrac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_\alpha}} = \dfrac{1}{\varrho_\alpha} \cdot \dfrac{C}{\sqrt{f\delta}} = \dfrac{C'}{\varrho_\alpha}$, d. h. man gewinnt die Ellipse auch durch Auftragen von Strecken, proportional zu den reciproken Werten des Trägheitsarmes ϱ_α.

Die Konstanten C bezw. C', welche die Dimension l^3 bezw. l^2 haben, weil OE die Dimension l^1 und $\mathfrak{Tr}_\alpha$ die Dimension l^4 hat, sind ganz beliebig, so daß es sich stets um eine unendliche Schar von ähnlichen und ähnlich-gelegenen Ellipsen handelt, deren jede für die Betrachtung brauchbar ist. Für $C = 1$ oder $C' = 1$ erhält man je eine bestimmte Ellipse der Schar.

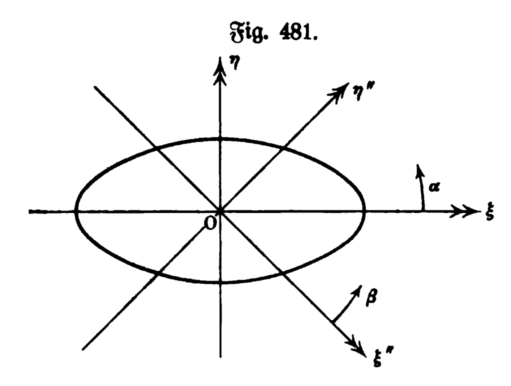
Fig. 480.



Deviationsmoment für jedes Kreuz durch O bestimmt. Dreht man das Nebenkreuz, dem Winkelsinne entsprechend, bis es wieder in seine alte Lage kommt, so geht β von 0° bis 360° und 2β von 0° bis 720°.

Für $\beta = 45°$, 135°, 225°, 315° findet ein Zusammenfallen mit dem Hauptkreuze statt, wobei $\cos 2\beta = 0$, d. h. $D_\beta = 0$ wird. Um die Vorzeichen der Formel Nr. 208) zu unterscheiden, muß man zunächst das Hauptkreuz näher bestimmen, und das soll so geschehen, wie es Fig. 481 zeigt, wobei die ξ-Achse die große Achse der Ellipse wird, so daß also $\mathfrak{Tr}_\xi < \mathfrak{Tr}_\eta$ ist.

Fig. 481.



Dreht man nun das Hauptkreuz um α in die Lage (ξ'', η''), wobei $\xi = \xi'' \cos\alpha - \eta'' \sin\alpha$ und $\eta = \xi'' \sin\alpha + \eta'' \cos\alpha$ zu setzen ist, so erhält man für $\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

$$\tfrac{1}{2}(\xi'')^2 \mathfrak{Tr}_0 + \tfrac{1}{2}(\eta'')^2 \mathfrak{Tr}_0 + \xi''\eta''(\mathfrak{Tr}_\eta - \mathfrak{Tr}_\xi) \sin 2\alpha = C^2.$$

Soll diese Gleichung mit der Gleichung für das Nebenkreuz

$$\tfrac{1}{2}(\xi')^2 \mathfrak{Tr}_0 + \tfrac{1}{2}(\eta')^2 \mathfrak{Tr}_0 - 2 D_0 \xi'\eta' = C^2$$

übereinstimmen, und soll dabei D_0 einen positiven Wert erhalten, so muß, da $\mathfrak{Tr}_\eta - \mathfrak{Tr}_\xi > 0$ ist, gesetzt werden $\sin 2\alpha = -1$, d. h. $2\alpha = -90°$ oder $+270°$ und $\alpha = -45°$ oder $+135°$.

Unter dieser Voraussetzung ist

$$D_0 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Tr}_\eta - \mathfrak{Tr}_\xi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 210)$$

Der Winkel β des Nebenkreuzes entspricht also hier dem Winkel $\alpha = 135° + \beta$ oder $\alpha = 315° + \beta$, so daß gemäß Nr. 209)

$$D_\alpha = -D_0 \,.\, \sin 2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad 211)$$

ist, falls man alles auf das Hauptkreuz beziehen will. Fig. 481 zeigt die Lage des Nebenkreuzes für $\alpha = -45°$, eine Umkehrung der Pfeile beider Achsen entspräche $\alpha = +135°$.

Dreht man das Hauptkreuz stetig um 360°, so sind die Werte $\mathfrak{Tr}_x$, $\mathfrak{Tr}_y$ und D, welche den einzelnen Stellungen seiner Achsen entsprechen, nun leicht zu bestimmen. Sie werden durch Fig. 482 veranschaulicht.

Fig. 482 erläutert auch die gewonnenen Gleichungen und deren Folgerungen

$$\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_\xi + (\mathfrak{Tr}_\eta - \mathfrak{Tr}_\xi)\sin^2\alpha \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tr}_y = \mathfrak{Tr}_\eta - (\mathfrak{Tr}_\eta - \mathfrak{Tr}_\xi)\sin^2\alpha$$
$$\mathfrak{Tr}_\beta = \tfrac{1}{2}\mathfrak{Tr}_0 - D_0 \sin 2\beta \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tr}_\alpha = \tfrac{1}{2}\mathfrak{Tr}_0 - D_0 \cos 2\alpha$$
$$D_\beta = D_0 \cos 2\beta \quad \text{und} \quad D_\alpha = -D_0 \sin 2\alpha.$$

Unter den Veranschaulichungen dieser Beziehungen ist noch für D die Darstellung durch eine der Cassinischen Kurven und zwar durch eine Lemniscate zu erwähnen.

Da sich D nicht auf eine der Achsen bezieht, wie das Trägheitsmoment, sondern auf das Achsenkreuz, so ist es zweckmäßig, den Wert für D oder daraus abgeleitete Werte von O aus auf einer Symmetralen des Kreuzes abzutragen. Dabei ergeben sich insofern Schwierigkeiten, als D seine Vorzeichen wechselt; man kann diese z. B. dadurch beseitigen, daß man die Symmetrale

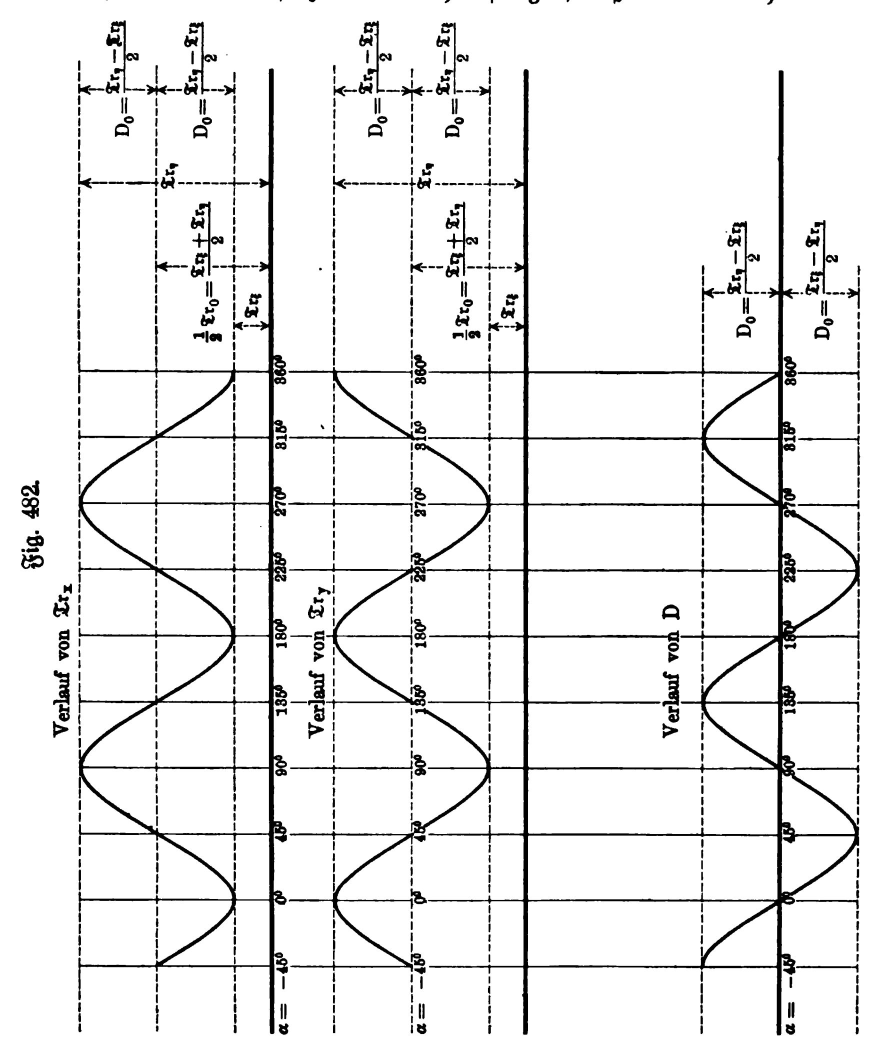


Fig. 482.

der Quadranten (+, +) und (—, —) des Nebenkreuzes für positive Werte von D und die Symmetrale der Quadranten (+, —) und (—, +) des Nebenkreuzes für negative Werte von D benutzt.

Trägt man die Werte von D selbst von O aus ab, so erhält man dabei Kurven, welche sonst nicht in Gebrauch sind.

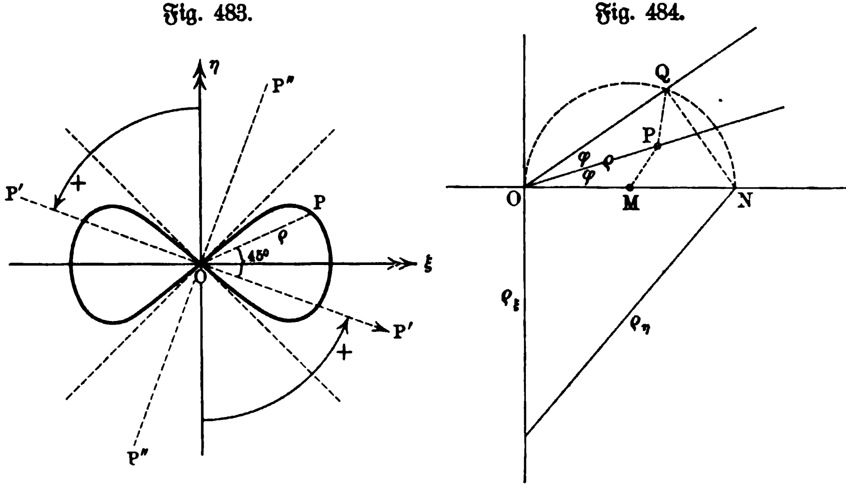
Führt man statt dessen, dem Trägheitsmomente entsprechend, einen Arm

für das Deviationsmoment ein, so gelangt man zu der bekannten Lemniscate, welche der Gruppe der Cassinischen Kurven angehört.

Für positive Werte von D kann man ohne weiteres $D_\beta = \varrho_\beta^2 (f\delta)$ setzen, so daß $\varrho_\beta^2 = \varrho_0^2 \cos 2\beta$ wird.

Diese Gleichung ist, falls für die in Fig. 481 gezeichnete Lage des Nebenkreuzes die positive ξ-Achse als Symmetrale benutzt wird, unmittelbar als Polargleichung für diese ξ-Achse zu verwenden, da $[\varrho]$ beim Auftragen auf

Fig. 483. Fig. 484.



die Symmetrale mit der ξ-Achse denselben Winkel φ bildet, wie die ξ''-Achse mit ihrer ursprünglichen Lage, so daß stets $\varphi = \beta$ ist. Man hat also für die positiven Werte von D

$$\varrho^2 = \varrho_0^2 \cos 2\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 212)$$

Diese Betrachtung entspricht der in Fig. 483 gezeichneten Lemniscate, bei der z. B. $\varrho = OP$ den Wert von D für die Lage $P'OP''$ des Nebenkreuzes bestimmt.

Für negative Werte von D, für deren Darstellung die beiden Quadranten $(+, -)$ und $(-, +)$ des Nebenkreuzes vorhanden sind, setzen wir

$$-D_\beta = \varrho_\beta^2 (f\delta),$$

so daß hier die Gleichung $\varrho_\beta^2 = \varrho_0^2 [-\cos 2\beta]$ zu verwenden ist, wobei ϱ_0 den alten Wert hat.

Benutzen wir hier die Symmetrale zwischen der negativen ξ''-Achse und der η''-Achse, so ist φ für das Hauptkreuz mit β verbunden durch $90^\circ + \beta = \varphi$, so daß $-\cos 2\beta = +\cos 2\varphi$ ist, d. h. man erhält dieselbe Lemniscate wie vorher.

Es bestimmt in Fig. 483 z. B. $\varrho = OP$ den Wert von $-D$ für die Lage $P''OP'$ des Nebenkreuzes.

Um die Lemniscate [1]) zu konstruieren, kann man folgendermaßen verfahren. Da $D_0 = \frac{1}{2}(\mathfrak{T}r_\eta - \mathfrak{T}r_\xi) = \frac{1}{2}(f\delta)(\varrho_\eta^2 - \varrho_\xi^2)$ ist, so ist

[1]) In Bezug auf die weitere Verwendung dieser Lemniscate vergl. Holzmüller, Ingenieur-Mathematik, 1897.

$$\varrho^2 = \tfrac{1}{2}(\varrho_\eta^2 - \varrho_\xi^2)\cos 2\varphi = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\varrho_\eta^2 - \varrho_\xi^2}\right)\left(\sqrt{\varrho_\eta^2 - \varrho_\xi^2}\cos 2\varphi\right).$$

In Fig. 484 ist $ON = \sqrt{\varrho_\eta^2 - \varrho_\xi^2}$, so daß für $OM = \frac{1}{2} ON$ ist

$$\varrho^2 = OM \,.\, OQ,$$

d. h. $OP = \varrho$ ist mittlere Proportionale zwischen OM und OQ, so daß $\triangle\, OMP \sim \triangle\, OPQ$ ist.

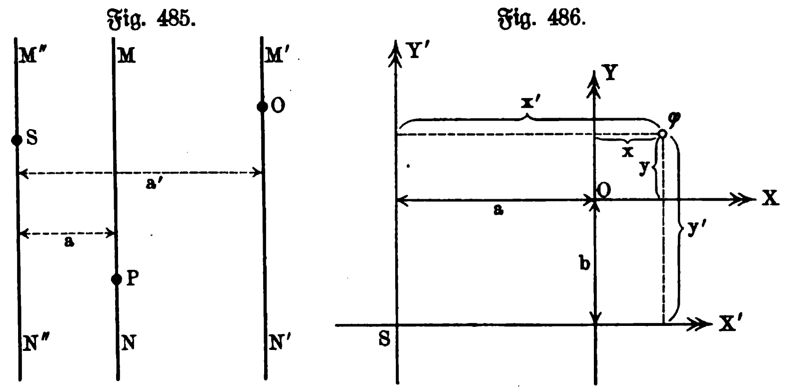
Um von den Momenten für Achsen durch einen Punkt O zu Momenten für beliebige andere Achsen überzugehen, benutzt man stets Parallelachsen durch den Schwerpunkt S.

Beim Trägheitsmomente reicht für $m = f\delta$ die Formel (vergl. S. 645)

$$\mathfrak{Tr}_a = \mathfrak{Tr}_S + a^2 \,.\, m$$

aus. Ist für den Punkt O alles bekannt, während es sich um die Achse MN durch P handelt, so zieht man durch O und S Parallelachsen zu MN.

Fig. 485. Fig. 486.



Bezeichnet man die Trägheitsmomente für die Achsen MN, $M'N'$ und $M''N''$ bezw. durch $\mathfrak{Tr}$, $\mathfrak{Tr}'$ und $\mathfrak{Tr}''$, so gilt gemäß Fig. 485

$$\mathfrak{Tr}' = \mathfrak{Tr}'' + a'^2 \,.\, (f\delta) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tr} = \mathfrak{Tr}'' + a^2 \,.\, (f\delta),$$

d. h. man hat

$$\mathfrak{Tr} = \mathfrak{Tr}' + (a^2 - a'^2)(f\delta).$$

Für das Deviationsmoment gilt für zwei parallele Kreuze, von denen eins durch den Schwerpunkt S geht, in Bezug auf ein Flächenelement φ, gemäß Fig. 486

$$x = x' - a \quad \text{und} \quad y = y' - b$$

$$xy = x'y' - bx' - ay' + ab$$

$$\Sigma(\varphi\delta)xy = \Sigma(\varphi\delta)x'y' - b\,\Sigma(\varphi\delta)x' - a\,\Sigma(\varphi\delta)y' + ab\,\Sigma\varphi\delta.$$

Da die mittleren Glieder Null sind, weil die Achsen durch S gehen, so gilt für $\delta = 1$

$$D = D_S + ab \,.\, f \quad \text{. . . . . 213)}$$

Statt des Quadrates der Verschiebung a, welche beim Trägheitsmomente auftritt, ist also die Änderung hier durch das Rechteck aus den Verschiebungen a und b bestimmt, dessen Vorzeichen natürlich wechseln kann.

Da dieses Rechteck den Wert Null hat, wenn entweder $a = 0$ oder $b = 0$ ist, so ist das Deviationsmoment eine Konstante für jedes Kreuz, das aus einer bestimmten Schwerachse und irgend einem Lote derselben gebildet wird.

Die Übertragung von einem Kreuze durch O auf ein Kreuz durch P unter Vermittelung eines Kreuzes durch S ist ohne weiteres ersichtlich.

Dabei ist stets zu beachten (vergl. S. 388), daß für eine Fläche mit einer Symmetralen das Deviationsmoment den Wert Null erhält, wenn man das Kreuz aus dieser Symmetralen und einem Lot derselben bildet.

Unter den verschiedenen Mittelpunkten für Trägheitsellipsen einer ebenen Fläche (F) haben neben dem Schwerpunkte noch die Punkte besondere Bedeutung, für welche die Ellipse im besonderen ein Kreis ist. Man nennt solche Punkte, deren es stets zwei giebt, Festpunkte, weil das Trägheitsmoment für jede Achse durch sie einen festen Wert hat.

Wenn die Trägheitsellipse für irgend einen Punkt C ein Kreis sein soll, so muß ihre Gleichung für jedes rechtwinkelige Kreuz $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ durch C die Gleichung

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = \mathfrak{r}^2$$

haben, also auch z. B. für das Kreuz, welches durch Verschiebung des centralen Hauptkreuzes nach C entsteht. Sind die Verschiebungen für die ξ-Achse und η-Achse bezw. b und a, so sind die Trägheitsmomente für die $\mathfrak{x}$-Achse und $\mathfrak{y}$-Achse für $\delta = 1$ bezw. $\mathfrak{Tr}_\xi + b^2 \,.\, F$ und $\mathfrak{Tr}_\eta + a^2 \,.\, F$, während das Deviationsmoment für das neue Kreuz abF ist. Also hat die Ellipse für C die Gleichung

$$\mathfrak{x}^2(\mathfrak{Tr}_\xi + b^2F) + \mathfrak{y}^2(\mathfrak{Tr}_\eta + a^2F) - 2\mathfrak{x}\mathfrak{y}abF = 1.$$

Soll diese Ellipse ein Kreis sein, so muß das Glied mit $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ fortfallen, d. h. es muß $a = 0$ oder $b = 0$ sein, und ferner müssen die Koeffizienten von $\mathfrak{x}^2$ und $\mathfrak{y}^2$ einander gleich sein. Für $a = 0$ ist also $\mathfrak{Tr}_\eta = \mathfrak{Tr}_\xi + b^2 . F$ und für $b = 0$ ist ebenso $\mathfrak{Tr}_\xi = \mathfrak{Tr}_\eta + a^2F$ Bedingung.

Unter der Voraussetzung, daß nicht der Sonderfall $(a = 0,\ b = 0)$ vorliegt, in welchem die Ellipse des Hauptkreuzes ein Kreis ist, gilt $\mathfrak{Tr}_\xi \gtrless \mathfrak{Tr}_\eta$.

Ist $\mathfrak{Tr}_\xi > \mathfrak{Tr}_\eta$, so ist die Bedingung für $b = 0$ erfüllbar, während die Bedingung für $a = 0$ unerfüllbar ist.

Ist $\mathfrak{Tr}_\xi < \mathfrak{Tr}_\eta$, so ist die Bedingung für $a = 0$ erfüllbar, während die Bedingung für $b = 0$ unerfüllbar ist.

Nehmen wir an, daß die große Achse der Ellipse des Hauptkreuzes als ξ-Achse bezeichnet ist, so ist $\mathfrak{Tr}_\xi < \mathfrak{Tr}_\eta$, d. h. die Verschiebung $(0; b)$, bei welcher die η-Achse in sich gleitet, führt für

$$b = \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{Tr}_\eta - \mathfrak{Tr}_\xi}{F}} = \pm \sqrt{\varrho_\eta^2 - \varrho_\xi^2}$$

je zu einem Punkte, für welche die Trägheitsellipse im besonderen ein Kreis ist.

Man nennt die beiden Punkte, die auf der kleinen Achse der Ellipse des centralen Hauptkreuzes zu beiden Seiten des Schwerpunktes im Abstande $\sqrt{\varrho_\eta^2 - \varrho_\xi^2}$ liegen, die Festpunkte (Fixpunkte) der ebenen Figur.

Der Trägheitskreis für jeden der Festpunkte hat die Gleichung

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = \mathfrak{r}^2 = \frac{1}{\mathfrak{Tr}_\eta} = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_\eta}}\right)^2,$$

wobei $\mathfrak{Tr}_\eta$ das größere Trägheitsmoment des centralen Hauptkreuzes ist.

Die Bedeutung der Festpunkte liegt darin, daß von ihnen aus das **Trägheitsmoment** für jede beliebige Achse leicht **konstruktiv** gefunden werden kann.

Zieht man durch den Festpunkt C_1 auf der positiven Halbachse (η) und durch den Schwerpunkt S je eine Parallele zu der vorgelegten Achse AB

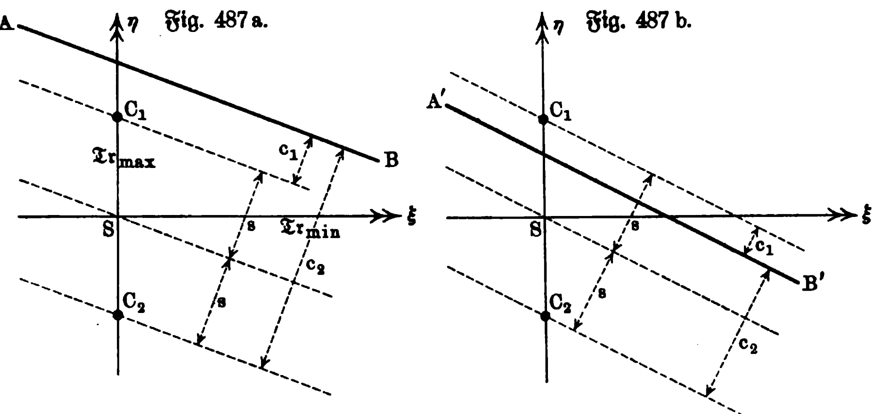


Fig. 487 a. Fig. 487 b.

(vergl. Fig. 487 a), deren Trägheitsmoment $\mathfrak{Tr}$ gesucht wird, so ist $\mathfrak{Tr}_\eta$ das Trägheitsmoment für die Achse durch C_1, d. h. es gilt

$$\mathfrak{Tr}_S + s^2 \,.\, F = \mathfrak{Tr}_\eta \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tr}_S + (s + c_1)^2 \,.\, F = \mathfrak{Tr}.$$

Man hat also

$$\mathfrak{Tr} = \mathfrak{Tr}_\eta + F(c_1^2 + 2 s c_1).$$

Führt man noch die Entfernung c_2 des anderen Festpunktes von der Achse AB ein, so ist $c_2 = c_1 + 2s$, d. h. man hat

$$\mathfrak{Tr} = \mathfrak{Tr}_\eta + F c_1 c_2 \quad \text{. . . . . 214 a)}$$

Diese Gleichung gilt zunächst für jede Gerade AB, welche die η-Achse schneidet und zwar außerhalb der Strecke $C_1 C_2$.

Schneidet sie innerhalb der Strecke $C_1 C_2$, so ist (vergl. $A'B'$, Fig. 487 b)

$$\mathfrak{Tr} = \mathfrak{Tr}_\eta + F(c_1^2 - 2 s c_1)$$

und $c_2 = 2s - c_1$, d. h. man hat

$$\mathfrak{Tr} = \mathfrak{Tr}_\eta - F c_1 c_2 \quad \text{. . . . . 214 b)}$$

Man kann die beiden Formeln Nr. 214 a) und 214 b) in eine zusammenziehen, wenn man die Lote aus C_1 und C_2 auf AB, welche mit den Strecken c_1 und c_2 übereinstimmen, mit gleichen Vorzeichen ansetzt, wenn sie gleich gerichtet, und mit entgegengesetzten Vorzeichen ansetzt, wenn sie gegeneinander gerichtet sind. Führt man die Trägheitsarme ein, so ist dann

$$\varrho^2 = \varrho_\eta^2 + c_1 c_2.$$

Liegen keine besonderen Gründe vor, so giebt man C oder C' bei der Trägheitsellipse den Wert 1.

Bei graphischen Darstellungen hat es große Vorzüge, eine besondere Ellipse zu wählen, für welche $C^2 = \varrho_\xi^2 \cdot \varrho_\eta^2 \cdot (f\delta)$ ist.

Ihre Gleichung ist demnach (für das Hauptkreuz)

$$\xi^2 \cdot \varrho_\xi^2 + \eta^2 \cdot \varrho_\eta^2 = \varrho_\xi^2 \cdot \varrho_\eta^2.$$

Legt man an diese Ellipse eine Tangente im Punkte $(\mathfrak{x}; \mathfrak{y})$, so ist deren Gleichung

$$\xi \cdot \mathfrak{x} \cdot \varrho_\xi^2 + \eta \cdot \mathfrak{y} \cdot \varrho_\eta^2 = \varrho_\xi^2 \cdot \varrho_\eta^2.$$

Bringt man diese Gleichung durch Division mit $\sqrt{\mathfrak{x}^2 \varrho_\xi^4 + \mathfrak{y}^2 \varrho_\eta^4} = n$ auf die Normalform, so sieht man, daß der Abstand der Tangente von O den Wert

$$\frac{\varrho_\xi^2 \cdot \varrho_\eta^2}{n} \text{ hat.}$$

Da die Tangente mit der ξ-Achse den Winkel α bildet, für den $tg\,\alpha = -\frac{\mathfrak{x} \cdot \varrho_\xi^2}{\mathfrak{y} \cdot \varrho_\eta^2}$ ist, so hat die Achse durch O, welche jener Tangente parallel ist, das Trägheitsmoment

$$\mathfrak{Tr}_\alpha = \mathfrak{Tr}_\xi \cdot cos^2\alpha + \mathfrak{Tr}_\eta\, sin^2\alpha,$$

falls $sin^2\alpha = \frac{\mathfrak{x}^2 \cdot \varrho_\xi^4}{n^2}$ und $cos^2\alpha = \frac{\mathfrak{y}^2 \cdot \varrho_\eta^4}{n^2}$ gesetzt wird, d. h. man hat

$$\mathfrak{Tr}_\alpha = \frac{\mathfrak{Tr}_\xi \mathfrak{y}^2 \varrho_\eta^4 + \mathfrak{Tr}_\eta \mathfrak{x}^2 \varrho_\xi^4}{n^2}.$$

Führt man den Trägheitsarm ein, so ist

$$\varrho_\alpha^2 = \frac{\varrho_\xi^2 \mathfrak{y}^2 \varrho_\eta^4 + \varrho_\eta^2 \mathfrak{x}^2 \varrho_\xi^4}{n^2} = \frac{\varrho_\xi^2 \varrho_\eta^2 (\mathfrak{y}^2 \varrho_\eta^2 + \mathfrak{x}^2 \varrho_\xi^2)}{n^2}.$$

Da der Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ auf der Ellipse liegt, so gilt auch

$$\mathfrak{x}^2 \cdot \varrho_\xi^2 + \mathfrak{y}^2 \cdot \varrho_\eta^2 = \varrho_\xi^2 \varrho_\eta^2,$$

d. h. man hat

$$\varrho_\alpha^2 = \frac{\varrho_\xi^4 \varrho_\eta^4}{n^2} \quad \text{und} \quad \varrho_\alpha = \pm \frac{\varrho_\xi^2 \varrho_\eta^2}{n}.$$

Demnach hat der Abstand der Tangente im Punkte $(\mathfrak{x}; \mathfrak{y})$ von O denselben Wert wie der Trägheitsarm für die Achse durch O, welche jener Tangente parallel ist.

Die betrachtete Ellipse läßt sich also folgendermaßen herstellen: Zieht man zu jeder Achse durch O die beiden Parallelen im Abstande ϱ, wobei ϱ den Arm des Trägheitsmomentes für die jeweilige Achse bezeichnet, so umhüllen diese Parallelen die Ellipse, welche als die Culmannsche Ellipse bezeichnet werden mag, weil sie von diesem innerhalb technischer Untersuchungen eingeführt worden ist.

Da alle Trägheitsellipsen eines Punktes O, welche verschiedenen Werten von C entsprechen, ähnlich und ähnlich-gelegen sind, so zeigt jede in be-

stimmter Verkürzung oder Verlängerung dasselbe, was bei der Culmann-schen Ellipse unmittelbar hervortritt.

Denkt man in einem Scheitel dieser Ellipse die Masse der Ellipse ($ab\pi\delta$) verdichtet, so ersetzt der Scheitel als materieller Punkt die Ellipse bei der Drehung um die Hauptachse, welche den Scheitel nicht enthält.

Konstruiert man für den Mittelpunkt O der Ellipse deren Fußpunkts-kurve, so kann jeder Punkt P dieser Kurve in obigem Sinne als Ersatz der Ellipsenfläche für je eine bestimmte Achse benutzt werden, und zwar nur für die Achse, die auf OP in O senkrecht steht.

Schließlich mag noch bemerkt werden, daß jede Trägheitsellipse bei reciproker Abbildung in Bezug auf einen konzentrischen Kreis eine Reciprokal-ellipse liefert, welche in diesem Gebiete gleichfalls mit Nutzen verwendet werden kann.

Zu den Trägheitsellipsen

$$\xi^2 \varrho_\xi^2 + \eta^2 \varrho_\eta^2 = C^2$$

gehören die Reciprokalellipsen

$$\frac{\xi^2}{\varrho_\xi^2} + \frac{\eta^2}{\varrho_\eta^2} = K^2,$$

falls C und K beliebige Konstanten bezeichnen.

Für $K^2 = 1$ hat die Reciprokalellipse im besonderen die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{\varrho_\xi^2} + \frac{\eta^2}{\varrho_\eta^2} = 1.$$

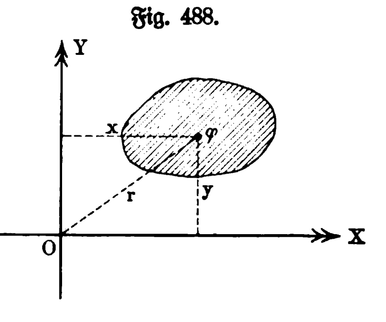
Fällt man bei dieser besonderen Ellipse ein Lot von O auf die Tangente im Punkte $(\mathfrak{x}; \mathfrak{y})$, so hat dieses für $m = \sqrt{\mathfrak{x}^2 \varrho_\eta^4 + \mathfrak{y}^2 \varrho_\xi^4}$ die Länge $\frac{\varrho_\xi^2 \varrho_\eta^2}{m}$, welche zugleich den Trägheitsarm für das Lot als Achse darstellt.

Trägt man also auf den Achsen durch O von O aus deren Trägheits-arme ab, so umhüllen die Lote in den Endpunkten der Trägheitsarme die Reciprokalellipse.

Für $\mathfrak{Tr}_\xi < \mathfrak{Tr}_\eta$ liegt die kleine Achse der Reciprokalellipse auf der ξ-Achse.

Für die Berechnung der Trägheitsmomente und der Deviationsmomente sind gelegentlich auch die folgenden Veranschaulichungen von Wert.

Fig. 488.



Bezeichnet man ein Element der Fläche in Fig. 488 durch φ, so ist das (achsiale) Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf OX für die Belegung 1 der Flächeneinheit bestimmt durch $\mathfrak{Tr} = \Sigma \varphi y^2$. Errichtet man nun über φ ein Prisma von der Höhe y, senkrecht zur Ebene der Zeichnung, so ist dessen Inhalt φy, während sein (auf halber Höhe gelegener) Schwerpunkt von der Ebene ZOX den Abstand y hat. Führt man diese Betrachtung für alle Elemente φ der Fläche durch, so entsteht über der Fläche ein

Prisma, das oberhalb durch eine Ebene begrenzt wird, welche durch OX geht und die Ebene der Zeichnung unter 45° schneidet.

Das Massenmoment $\Sigma\varphi y^2$ dieses Prismas in Bezug auf die Ebene ZOX stimmt überein mit dem Trägheitsmoment der betrachteten Fläche in Bezug auf die Achse OX.

Ferner stimmt das Massenmoment $\Sigma\varphi xy$ dieses Prismas in Bezug auf die Ebene ZOY überein mit dem Deviationsmoment der betrachteten Fläche in Bezug auf das Kreuz XOY.

Geht man von der Achse OY aus, so daß eine Ebene durch diese das Prisma über der betrachteten Fläche abschrägt, so liefern die Massenmomente dieses Körpers bezw. für die Fläche das Trägheitsmoment für die Achse OY und das Deviationsmoment für das Kreuz XOY.

Schrägt man das Prisma über der betrachteten Fläche durch Ebenen ab, welche durch OX bezw. OY gehen und mit der Ebene der Zeichnung bezw. die Winkel α und β bilden, so entstehen zwei andere Prismen, für welche die Höhen der Elementarprismen bezw. $y\,tg\,\alpha$ und $x\,tg\,\beta$ sind.

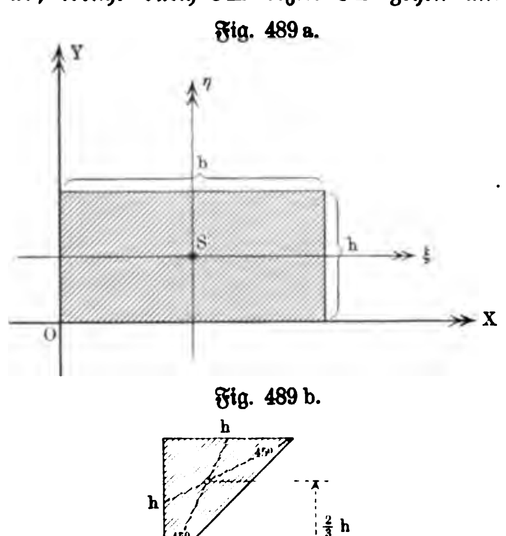


Fig. 489 a.

Fig. 489 b.

In diesem allgemeinen Falle sind die Volumen der beiden Körper $tg\,\alpha\,\Sigma\varphi y$ und $tg\,\beta\,\Sigma\varphi x$, ihre Massenmomente für die Ebene ZOX bezw. $tg\,\alpha\,\Sigma\varphi y^2$ und $tg\,\beta\,\Sigma\varphi xy$, ihre Massenmomente für die Ebene ZOY bezw. $tg\,\alpha\,\Sigma\varphi xy$ und $tg\,\beta\,\Sigma\varphi x^2$.

Bezeichnet man die Höhen, welche die Vertikalen durch die Schwerpunkte der beiden Körper in diesen bestimmen bezw. durch h_α und h_β, so ist die Höhenlage der Schwerpunkte durch bezw. $\frac{1}{2}h_\alpha$ und $\frac{1}{2}h_\beta$ bestimmt, weil jedes Elementarprisma seinen Schwerpunkt in der Mitte seiner Höhe hat und also die Ebene durch diese Mitten für den Körper Schwerebene ist.

Führt man noch die Koordinaten des Schwerpunktes der Fläche, deren Inhalt f sein mag, als x_0 und y_0 ein, so ist $\Sigma\varphi y = f.y_0$ und $\Sigma\varphi x = f.x_0$, während außerdem $\Sigma\varphi y^2$, $\Sigma\varphi x^2$ und $\Sigma\varphi xy$ bezw. $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_x$, $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_y$ und D darstellen.

Bezeichnet man nun die Koordinaten des Schwerpunktes für den ersten Körper durch x_α, y_α, z_α und für den zweiten Körper durch x_β, y_β, z_β, so gilt also

$$x_\alpha = \frac{D}{f \cdot y_0}, \quad y_\alpha = \frac{\mathfrak{Tr}_x}{f \cdot y_0}, \quad z_\alpha = \tfrac{1}{2} h_\alpha,$$

$$x_\beta = \frac{\mathfrak{Tr}_y}{f \cdot x_0}, \quad y_\beta = \frac{D}{f \cdot x_0}, \quad z_\beta = \tfrac{1}{2} h_\beta.$$

Mit Hülfe dieser Formeln, in denen x_α, y_α bezw. x_β, y_β von α bezw. β unabhängig sind, kann man einerseits $\mathfrak{Tr}_x$, $\mathfrak{Tr}_y$, D berechnen, wenn die anderen Größen gegeben sind, man kann sie aber auch anderseits für die Bestimmung der Schwerpunkte schief abgeschnittener Prismen bezw. keilförmiger Lamellen (für unendlich-kleine Werte von α und β) verwenden.

Als Beispiel betrachten wir das Rechteck der Fig. 489. Wir legen durch OX und durch OY Ebenen, welche die Ebene der Zeichnung unter 45^0 schneiden. Die Ebene durch OX bestimmt einen Körper, der sich als ein gewöhnliches horizontal gelegenes dreiseitiges Prisma von der Höhe b und dem Querschnitte der Fig. 489 b auffassen läßt. Sein Inhalt ist $\frac{1}{2} b h^2$, seine Schwerpunktsabstände von der Ebene ZOX und ZOY sind bezw. $\frac{2}{3} h$ und $\frac{b}{2}$, also ist $\mathfrak{Tr}_x = \frac{b h^3}{3}$ und $D = \frac{1}{4} b^2 h^2$.

Die Ebene durch OY bestimmt einen Körper, der sich ebenso als gewöhnliches Prisma von der Höhe h auffassen läßt. Sein Inhalt ist $\frac{1}{2} b^2 h$, seine Schwerpunktsabstände von der Ebene ZOX und ZOY sind bezw. $\frac{h}{2}$ und $\frac{2}{3} b$, also ist $D = \frac{1}{4} b^2 h^2$ und $\mathfrak{Tr}_y = \frac{b^3 h}{3}$.

Geht man zu den Achsen durch S über in Fig. 489, so ist

$$\mathfrak{Tr}_\xi + \frac{h^2}{4} \cdot f = \mathfrak{Tr}_x, \qquad \text{d. h. } \mathfrak{Tr}_\xi = \frac{b h^3}{12}$$

$$\mathfrak{Tr}_\eta + \frac{b^2}{4} \cdot f = \mathfrak{Tr}_y, \qquad \text{d. h. } \mathfrak{Tr}_\eta = \frac{b^3 h}{12}$$

$$D_{\xi\eta} + \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot f = D_{xy}, \quad \text{d. h. } D_{\xi\eta} = 0.$$

Die Achsen (ξ, η) sind also die Hauptachsen des Rechteckes, wie man auch schon aus der Symmetrie hätte schließen können; wäre man davon ausgegangen, so würde aus $D_{\xi\eta} = 0$ umgekehrt der Wert von D_{xy} folgen.

Für $b > h$ ist $\mathfrak{Tr}_\xi < \mathfrak{Tr}_\eta$, d. h. die große Achse der Centralellipse liegt auf der ξ-Achse. Ihre Gleichung ist

$$\xi^2 \cdot \frac{b h^3}{12} + \eta^2 \cdot \frac{b^3 h}{12} = C^2.$$

Für eine Achse SA, die mit $S\xi$ den Winkel α bildet, gilt

$$\mathfrak{Tr}_\alpha = \frac{b h^3}{12} \cos^2 \alpha + \frac{b^3 h}{12} \sin^2 \alpha.$$

Die Trägheitsarme sind gegeben durch $\varrho_\xi^2 = \frac{h^2}{12}$ und $\varrho_\eta^2 = \frac{b^2}{12}$.

Die gebräuchlichen Ellipsen des Schnittes treten auf für $C = 1$, für

$C = \sqrt{bh}$, d. h. für $C^2 = \frac{C^2}{bh} = 1$ und für $C^2 = \frac{b^3h^3}{144}$. Im letzteren Falle liegt die Culmannsche Ellipse vor, deren Gleichung sich auch schreiben läßt

$$\frac{\xi^2}{\frac{1}{12}b^2} + \frac{\eta^2}{\frac{1}{12}h^2} = 1.$$

Die Lemniscate des Deviationsmomentes hat für $S\xi$ die Polargleichung

$$\varrho^2 = \frac{1}{24}(b^2 - h^2)\cos 2\varphi.$$

Für das Kreuz YOX gilt ebenso

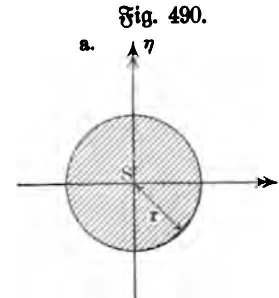
$$x^2 \cdot \frac{bh^3}{3} + y^2 \cdot \frac{b^3h}{3} - 2xy\frac{b^2h^2}{4} = C^2$$

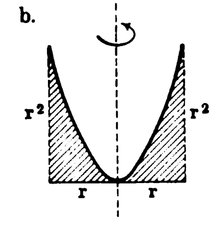
und

$$\mathfrak{Tr}_\alpha = \frac{bh^3}{3}\cos^2\alpha + \frac{b^3h}{3}\sin^2\alpha - \frac{b^2h^2}{4}\sin 2\alpha.$$

Um das (polare) Trägheitsmoment $\mathfrak{Tr}_s = \mathfrak{Tr}_0$ einer Fläche, welches durch $\Sigma\varphi r^2$ dargestellt wird, zu veranschaulichen, trägt man am besten über φ ein Prisma von der Höhe r^2 auf, so daß über f ein Körper vom Inhalte $\Sigma\varphi r^2$ entsteht.

Fig. 490.





Für den Kreis der Fig. 490a entsteht z. B. das Rotationsparaboloid der Fig. 490b als Oberfläche, so daß $\mathfrak{Tr}_0$ durch den Inhalt des Körpers, welcher der schraffierten Fläche entspricht, dargestellt wird.

Man hat für den Cylinder als Inhalt $r^4\pi$, für das Paraboloid nach dem einen Pappus-Guldinschen Satze, da $\frac{2}{3}r^3$ die Erzeugungsfläche und der Schwerpunktsabstand $\frac{3}{8}r$ ist (vergl. S. 431), als Inhalt $\frac{r^4\pi}{2}$, also für den Restkörper als Inhalt $\frac{r^4\pi}{2}$, d. h. es ist

$$\mathfrak{Tr}_0 = \frac{1}{2}r^4\pi.$$

Daraus folgt gemäß $\mathfrak{Tr}_\xi = \mathfrak{Tr}_\eta$ und $\mathfrak{Tr}_0 = \mathfrak{Tr}_\xi + \mathfrak{Tr}_\eta$

$$\mathfrak{Tr}_\xi = \mathfrak{Tr}_\eta = \frac{1}{4}r^4\pi.$$

Diese Art der Veranschaulichung läßt sich auch für die (achsialen) Trägheitsmomente $\mathfrak{Tr}_x$ und $\mathfrak{Tr}_y$ gelegentlich mit Vorteil verwenden.

Für das Rechteck der Fig. 489 erhält man z. B. für $S\xi$ als Achse, entsprechend $\Sigma\varphi\eta^2$, einen parabolischen Cylinder von der Länge b und dem Querschnitte $2 \cdot \left(\frac{1}{3}\frac{h^3}{8}\right)$, dessen Inhalt also $\frac{bh^3}{12}$ ist, was wieder $\mathfrak{Tr}_\xi$ giebt.

Ferner ist zu bemerken, daß der Nr. h) auf S. 430 entsprechende Betrachtungen auch für achsiale Trägheitsmomente gelten, d. h. das Trägheitsmoment für die Achse UV wird nicht geändert, wenn die Streifen, parallel

zu UV, lediglich verschoben werden, und es wird proportional geändert, wenn die Streifen alle nach demselben Modul verlängert oder verkürzt werden.

So ist z. B. das Trägheitsmoment für die Halbellipse der Fig. 255a in Bezug auf UV als Achse leicht zu bestimmen. Da entsprechende Flächenstreifen für Ellipse und Kreis im Verhältnis $a : b$ stehen, so gilt dasselbe für die entsprechenden Trägheitsmomente, d. h. die Halbellipse hat das Trägheitsmoment

$$\frac{a}{b} \cdot \tfrac{1}{8} b^4 \pi = \tfrac{1}{8} a b^3 \pi.$$

Ebenso gilt für Fig. 255b in Bezug auf die Halbellipse $\mathfrak{Tr} = \frac{1}{8} a^3 b \pi$. Für die ganze Ellipse ist also

$$\mathfrak{Tr}_s = \mathfrak{Tr}_0 = \frac{a b \pi}{4} (a^2 + b^2).$$

Auch die Betrachtungen über die Mittelschnittsformel u. s. w. (vergl. § 75) lassen sich auf Trägheitsmomente ausdehnen.

Ist q_y wieder durch $a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots a_n y^n$ gegeben (vergl. Fig. 259), so liefert eine Grenzbetrachtung, wie sie schon mehrfach durchgeführt wurde,

$$\mathfrak{Tr} = \left(\frac{a_0}{3} h^3 + \frac{a_1}{4} h^4 + \frac{a_2}{5} h^5 + \cdots \frac{a_n h^{n+3}}{n+3}\right) \delta$$

für das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf I als Achse, falls die Belegung der Flächeneinheit durch δ bezeichnet wird.

Versucht man dieses Trägheitsmoment durch die Mittelschnittsformel

$$\mathfrak{Tr} = \frac{h}{6} (1 \cdot q_0 \cdot y_0^2 + 4 q_{h/2} \cdot y_{h/2}^2 + 1 \cdot q_h \cdot y_h^2) \delta \quad . \quad . \quad 215)$$

darzustellen, so ergiebt sich, daß hier genaue Werte nur für $q_y = a_0 + a_1 y$ erhalten werden.

Geht man zu einer Achse UV im Abstande a über, so würde die Mittelschnittsformel

$$\mathfrak{Tr}_a = \frac{h}{6} [1 \cdot q_0 (y_0 + a)^2 + 4 q_{h/2} (y_{h/2} + a)^2 + 1 \cdot q_h (y_h + a)^2]$$

liefern, d. h.

$$\begin{aligned} \mathfrak{Tr}_a &= \mathfrak{Tr} + a^2 \cdot \frac{h}{6} (1 \cdot q_0 + 4 q_{h/2} + 1 \cdot q_h) \\ &\quad + 2a \cdot \frac{h}{6} \cdot (1 \cdot q_0 y_0 + 4 q_{h/2} y_{h/2} + 1 \cdot q_h y_h) \\ &= \mathfrak{Tr} + a^2 \cdot F + 2a \cdot M, \end{aligned}$$

falls man den Flächeninhalt durch F und das Moment der Fläche in Bezug auf I durch M bezeichnet.

Bezeichnet man das Trägheitsmoment für eine Achse durch den Schwerpunkt, parallel zu I (vergl. Fig. 259), durch $\mathfrak{Tr}_S$, so gilt

$$\mathfrak{Tr} = \mathfrak{Tr}_S + F \cdot \eta^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tr}_a = \mathfrak{Tr}_S + F(\eta + a)^2,$$

d. h.

$$\mathfrak{Tr}_a = \mathfrak{Tr} + a^2 \cdot F + 2a (F \cdot \eta).$$

Da $F \cdot \eta = M$ ist, so gilt auch hier, daß die Mittelschnittsformel für jede Achse, parallel zu I anwendbar ist, wenn sie für Achse I erlaubt ist.

Fig. 491.

Demgemäß läßt sich die Betrachtung auch hier auf Fig. 261 ausdehnen, wobei der Fehler dadurch bezeichnet wird, daß die Begrenzung $B_0 B_1 B_2$ der Fig. 261 jetzt durch $x = a_0 + a_1 y$ gegeben sein, d. h. geradlinig sein müßte.

Als Beispiel behandeln wir das Rechteck (vergl. Fig. 491), für welches $F = bh$, $M = F \cdot \frac{h}{2}$ und $\mathfrak{Tr}_S = \frac{bh^3}{12}$ ist. Man hat nach der Verschiebungsformel für I

$$\mathfrak{Tr} = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4}(bh) = \frac{bh^3}{3}$$

und für UV

$$\mathfrak{Tr}_a = \frac{bh^3}{12} + (bh)\left(a + \frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3} + a^2 \cdot F + 2a\left(F \cdot \frac{h}{2}\right).$$

Nach der Mittelschnittsformel ergiebt sich unmittelbar

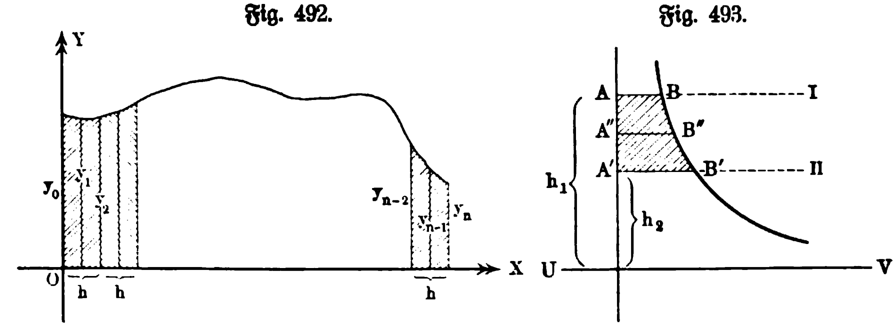
$$\mathfrak{Tr} = \frac{h}{6}\left(1 \cdot b \cdot o^2 + 4 \cdot b \cdot \frac{h^2}{4} + 1 \cdot b \cdot h^2\right) = \frac{bh^3}{3}$$

und

$$\mathfrak{Tr}_a = \frac{h}{6}\left[1 \cdot b \cdot a^2 + 4b \cdot \left(a + \frac{h}{2}\right)^2 + 1 \cdot b \cdot (a+h)^2\right]$$
$$= \frac{bh^3}{3} + a^2(bh) + 2a\left(\frac{bh^2}{2}\right).$$

Ebenso erhält man für das Dreieck und für das Trapez genaue Ergebnisse, da hier die Voraussetzung $q_y = a_0 + a_1 y$ erfüllt ist.

Fig. 492. Fig. 493.



Weitere Betrachtungen der angegebenen Art führen noch in Bezug auf Fig. 492 zu den brauchbaren Näherungsformeln für n als gerade Zahl

$$\mathfrak{Tr}_x = \frac{1}{18} h [1 \cdot y_0^3 + 1 \cdot y_n^3 + 2(y_2^3 + y_4^3 + \cdots y_{n-2}^3)$$
$$+ 4(y_1^3 + y_3^3 + \cdots y_{n-1}^3)]$$

$$\mathfrak{Tr}_y = \frac{1}{24} h^3 [0^2 . y_0 + 1^2 . 4 y_1 + 2^2 . 2 y_2 + 3^2 . 4 y_3$$
$$+ 4^2 . 2 y_4 + \cdots (n-1)^2 4 y_{n-1} + n^2 . y_n].$$

Ist das Trägheitsmoment eines unendlich-dünnen Streifens von der Breite d (vergl. Fig. 261) für die Achse I darstellbar als

$$(b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \cdots b_n y^n) d\delta,$$

so erhält man wieder durch eine einfache Grenzbetrachtung für die Fläche

$$\mathfrak{Tr} = \left(b_0 h + \frac{b_1}{2} h^2 + \frac{b_2}{3} h^3 + \cdots \frac{b_n}{n+1} h^{n+1}\right) \delta.$$

In diesem Falle giebt die Mittelschnittsformel natürlich genaue Ergebnisse (vergl. S. 437) für $b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3$.

Dies ist der Fall für alle Kurven von der Gleichung

$$xy^2 = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3.$$

Unter diesen befindet sich z. B. die Gleichung der Hyperbel $xy = b_1$ für $b_0 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$, welche Fig. 493 entspricht. Man hat nach der Mittelschnittsformel, da $AB = \frac{b_1}{h_1}$, $A'B' = \frac{b_1}{h_2}$, $A''B'' = \frac{b_1}{\frac{1}{2}(h_1 + h_2)}$ ist, für die Achse UV als Trägheitsmoment der schraffierten Fläche

$$\mathfrak{Tr} = \frac{h_1 - h_2}{6}\left[\frac{b_1}{h_1} \cdot h_1^2 + 4 \frac{b_1}{\frac{1}{2}(h_1 + h_2)} \cdot \frac{1}{4}(h_1 + h_2)^2 + \frac{b_1}{h_2} \cdot h_2^2\right]$$
$$= \frac{b_1}{2}(h_1^2 - h_2^2).$$

c) **Bemerkungen in Bezug auf die Trägheitsmomente von Körpern.** Bei der Übertragung der Untersuchungen der Nr. b) auf Körper ist zu beachten, daß einer Geraden der Ebene bei Übergängen von zwei auf drei Dimensionen im allgemeinen eine Ebene des Raumes entspricht.

Wie das Massenmoment (vergl. S. 410) in Bezug auf eine Ebene im Raume oder in Bezug auf eine Gerade der Ebene angesetzt werden kann, so bezieht sich auch der Ausdruck $\Sigma \mu x^2$, der sich in der Ebene auf die Abstände (x) von einer Geraden (Y-Achse) bezieht, in sachgemäßer Erweiterung im Raume auf die Abstände (x) von einer Ebene (YZ-Ebene). Demgemäß sind die Ausdrücke

$$E_{yz} = \Sigma \mu x^2, \quad E_{zx} = \Sigma \mu y^2, \quad E_{xy} = \Sigma \mu z^2 \quad . \quad . \quad . \quad 216)$$

welche als **Ebenenmomente**[1]) bezeichnet werden mögen, im Raume die sachgemäßen Erweiterungen der innerhalb einer Ebene gültigen Ausdrücke.

$$\mathfrak{Tr}_y = \Sigma \mu x^2, \quad \mathfrak{Tr}_x = \Sigma \mu y^2.$$

Die **Trägheitsmomente eines Körpers** sind dann mit Hülfe dieser Momente darstellbar als

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Tr}_x &= \Sigma \mu (y^2 + z^2) = E_{zx} + E_{xy} \\ \mathfrak{Tr}_y &= \Sigma \mu (z^2 + x^2) = E_{xy} + E_{yz} \\ \mathfrak{Tr}_z &= \Sigma \mu (x^2 + y^2) = E_{yz} + E_{zx} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 217)$$

[1]) Den Massenmomenten gegenüber sind sie als Momente zweiter Ordnung einzuführen.

Den Streifen der Ebene, welche gelegentlich der Mittelschnittsformel betrachtet wurden, entsprechen Schichten des Körpers, welche parallel zu einer der Ebenen des Koordinatenkreuzes sind, so daß die abgeleiteten Formeln in ihrer Erweiterung auf den Raum unmittelbar zu Ebenenmomenten führen und erst mittelbar zu Trägheitsmomenten.

Da ein Punkt des Körpers, welcher die Koordinaten (x, y, z) hat, von O den Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ hat, so gilt auch

$$P = \Sigma \mu r^2 = \Sigma \mu x^2 + \Sigma \mu y^2 + \Sigma \mu z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 218)$$

Man bezeichnet P als Polarmoment des Körpers, weil es sich auf die Abstände von einem Punkte oder Pole (0) bezieht [1]). Für die Berechnung von $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_x$, $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_y$, $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z$ ist es gelegentlich von Vorteil, auch die Beziehung

$$P = E_{yz} + E_{zx} + E_{xy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 219)$$

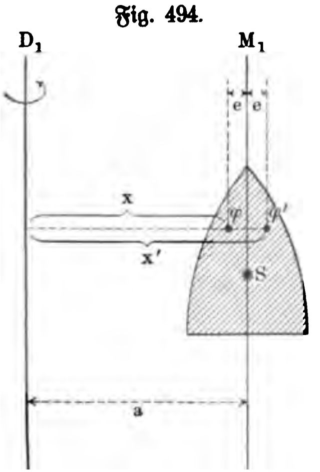
und deren Folgerungen, wie z. B. $P = E_{yz} + \mathfrak{T}\mathfrak{r}_x$, zu beachten.

Stellt man umgekehrt P und E_{xy}, E_{yz}, E_{zx} durch $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_x$, $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_y$, $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z$ dar, so gelangt man unter anderem zu dem Satze, daß man die Formel (vergl. S. 645)

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_a = \mathfrak{T}\mathfrak{r}_S + a^2 \cdot M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 220)$$

auch für P und E_{xy}, E_{yz}, E_{zx} umschreiben darf, d. h. das Polarmoment wächst um $a^2 \cdot M$, wenn der ursprünglich im Schwerpunkte gelegene Pol um die Strecke a verschoben wird, und die Ebenenmomente wachsen um $a^2 \cdot M$, wenn sie ursprünglich für Schwerebenen gelten und diese um die Strecke a verschoben werden.

Fig. 494.



Diese Beziehungen lassen sich auch unmittelbar durch eine Betrachtung ableiten, welche der Untersuchung auf S. 644 genau entspricht.

Auch die Betrachtungen auf S. 657 lassen sich hier unmittelbar übertragen.

In Bezug auf die besonderen Werte von C bezw. C' für die Auswahl der Trägheitsellipsoide ist zu bemerken, daß für $C = 1$ und $C' = 1$ die entsprechenden Erweiterungen für die Ebene auftreten.

Der Culmannschen Ellipse würde das Ellipsoid

$$\frac{\xi^2}{\varrho_\eta^2 \varrho_\zeta^2} + \frac{\eta^2}{\varrho_\zeta^2 \varrho_\xi^2} + \frac{\zeta^2}{\varrho_\xi^2 \varrho_\eta^2} = 1$$

entsprechen, für welches $C^2 = M \cdot \varrho_\xi^2 \varrho_\eta^2 \varrho_\zeta^2$ ist.

Durch reciproke Abbildung entsteht auch hier das Reciprokalellipsoid

$$\frac{\xi^2}{\varrho_\xi^2} + \frac{\eta^2}{\varrho_\eta^2} + \frac{\zeta^2}{\varrho_\zeta^2} = K^2,$$

[1]) Bei Verwendung von Vektoren ist es mit Rücksicht auf Formel Nr. 65) als Polarmoment zweiter Ordnung zu bezeichnen.

für welches, entsprechend der Betrachtung der Reciprokalellipse, gilt: Trägt man auf den Achsen durch O, von O aus die Trägheitsarme ab, so umhüllen die Normalebenen in den Endpunkten der Trägheitsarme das Reciprokalellipsoid.

Bei der Wichtigkeit der Rotationskörper für die Technik mag endlich noch der Satz von Townsend angeführt werden. Er lautet folgendermaßen (vergl. Fig. 494): Der Trägheitsarm für einen homogenen Rotationskörper, dessen Erzeugungsfläche eine zur Achse des Körpers $(D_1 D_2)$ parallele Symmetrale $(M_1 M_2)$ besitzt, hat in Bezug auf die Körperachse $(D_1 D_2)$ den Wert $\sqrt{a^2 + 3\varrho^2}$, wenn ϱ der Trägheitsarm der Erzeugungsfläche für die Symmetrale $(M_1 M_2)$ und a der Abstand beider Achsen ist.

Teilt man nämlich die Elemente der Erzeugungsfläche in Paare φ und φ', welche symmetrisch zur Symmetrale liegen, so liefern φ und φ' zum Trägheitsmomente des Körpers die Beiträge

$$(\varphi 2\pi x)x^2 . \delta \quad \text{und} \quad (\varphi 2\pi x')x'^2 . \delta,$$

weil jeder materielle Punkt eines der entstehenden materiellen Ringe denselben Abstand x bezw. x' von der Achse hat. Da $x = a - e$ und $x' = a + e$ ist, so ist

$$2\pi\varphi(x^3 + x'^3) = 4\pi\varphi(a^3 + 3ae^2).$$

Für das Trägheitsmoment des Körpers gilt also

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} = 4\pi a^3 \delta \Sigma\varphi + 12 a\pi\delta\Sigma\varphi e^2,$$

wobei sich die Summation aber nur auf den halben Querschnitt erstreckt.

Da der Körper das Volumen $4a\pi\Sigma\varphi$ hat, so ist $M = 4a\pi\delta\Sigma\varphi$ seine Masse, während $\Sigma\varphi e^2 = \frac{1}{2}\mathfrak{T}\mathfrak{r}_f = \varrho^2 . \Sigma\varphi$ das halbe Trägheitsmoment der Fläche für $M_1 M_2$ darstellt. Man hat also

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} = M(a^2 + 3\varrho^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 221)$$

d) Die entsprechenden Integralformeln. Will man Integralrechnung benutzen, so ist für Körper μ zu ersetzen durch $dv . \delta$, wobei $dv = dx\,dy\,dz$ das Volumenelement des Körpers bezeichnet.

Man berechnet dann zunächst E_{xy}, E_{yz}, E_{zx}.

Ist q_{xy} der Querschnitt des Körpers in der Höhe z, so ist

$$E_{xy} = \int z^2 . q_{xy} . dz . \delta.$$

Für Rotationskörper berechnet man, falls die Z-Achse der Achse des Körpers entspricht, E_{xy} und $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z$, indem man die Höhe (z) und den Abstand (ϱ) eines Punktes von der Achse $(\varrho^2 = x^2 + y^2)$, sowie die Lage φ des Meridians von $[\varrho]$ gegen einen Anfangsmeridian einführt.

Man hat dann $dv = \varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz$ und

$$E_{xy} = \int z^2 \varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz . \delta \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z = \int \varrho^3 d\varrho\,d\varphi\,dz . \delta.$$

Dabei ist die Erzeugungslinie der Rotationsfläche als $r = f(z)$ gegeben, so daß sich für einen homogenen Körper

$$E_{xy} = \pi\delta\int z^2 f^2_{(z)} dz \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z = \tfrac{1}{2}\pi\delta\int f^4_{(z)} dz$$

ergiebt. Für die Masse gilt ebenso

$$M = \pi\delta\int f^2_{(z)} dz.$$

Aus Formel Nr. 217) folgt

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_x + \mathfrak{T}\mathfrak{r}_y = 2 E_{xy} + E_{zx} + E_{yz} = 2 E_{xy} + \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z,$$

so daß für Rotationskörper

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_x = \mathfrak{T}\mathfrak{r}_y = E_{xy} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z$$

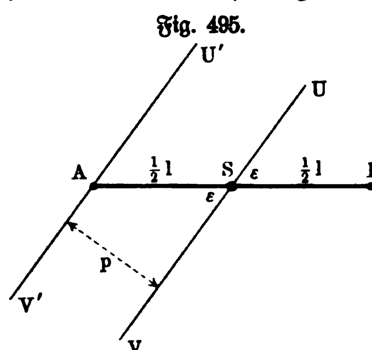
ist.

Für ebene Flächen ist das Element φ durch $dx\,dy$, also μ durch $dx\,dy\,\delta$ zu ersetzen.

Entsprechendes gilt für die Deviationsmomente.

e) Die Trägheitsmomente homogener Linien. α) Das Trägheitsmoment der homogenen Strecke. Um das Trägheitsmoment für die gleichmäßig (δ) belastete Strecke AB abzuleiten in Bezug auf eine Achse UV durch ihren Schwerpunkt, führen wir die Parallelachse $U'V'$ ein (vergl. Fig. 495). Ist T_1 das Trägheitsmoment von AB in Bezug auf $U'V'$ und T_2 das Trägheitsmoment von AS in Bezug auf $U'V'$, so hat man gemäß der Beziehung ähnlicher Systeme, da hier der Modul 2 : 1 ist,

Fig. 495.



$$T_1 : T_2 = 2^3 : 1.$$

Da die Achse $U'V'$ gegen UV um $p = \frac{1}{2} l \sin \varepsilon$ verschoben ist, so gilt für das gesuchte Trägheitsmoment $\mathfrak{T}\mathfrak{r}$ und für T_1 die Beziehung

$$T_1 = \mathfrak{T}\mathfrak{r} + p^2 \,.\, (l\delta).$$

Da SB und SA zu UV dieselbe relative Lage haben, wie AS zu $U'V'$, so ist ferner

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} = 2\, T_2.$$

Aus den drei aufgestellten Gleichungen folgt ohne weiteres

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \frac{p^2}{3} \cdot (l\delta) = \frac{l^2}{12} \cdot \sin^2 \varepsilon\, (l \,.\, \delta) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 222)$$

Für $\varepsilon = 90^0$ ist $\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \frac{l^2}{12}(l\delta)$, für $\varepsilon = 0$ ist $\mathfrak{T}\mathfrak{r} = 0$. Für $\delta = 1$ ist $\mathfrak{T}\mathfrak{r}$ das geometrische Trägheitsmoment der Strecke AB.

Betrachtet man AB als materielle Stange, so muß man diese als einen unendlich-dünnen Cylinder von der Länge l und der Masse $m = l \,.\, \delta$ auffassen, dessen materielle Punkte sich also in der Achse ($\mathfrak{T}\mathfrak{r} = 0$) befinden für $\varepsilon = 0$.

Das Centralellipsoid ist hier ein gerader Kreiscylinder, auf dessen Achse AB liegt.

β) Die Trägheitsmomente des homogenen regelmäßigen Stangenvielecks und der homogenen Kreislinie. Für eine Seite $AB = s$ eines regelmäßigen Vielecks hat das Trägheitsmoment für eine Achse durch S, senkrecht zur Ebene der Zeichnung, nach der vorigen Entwickelung ($\varepsilon = 90^0$) den Wert (vergl. Fig. 496)

$$\frac{s^2}{12}(s\delta).$$

Für eine Parallelachse durch O hat man also

$$\left(\frac{s^2}{12}+\varrho^2\right)s\delta.$$

Für das ganze Vieleck gilt demnach, falls man $ns = u$ setzt, für eine Achse durch O

$$\mathfrak{Tr}_z = \left(\frac{s^2}{12}+\varrho^2\right)u\delta,$$

oder auch, da $\frac{s^2}{4} = r^2 - \varrho^2$ ist,

$$\mathfrak{Tr}_z = \frac{u\delta}{3}(2\varrho^2 + r^2).$$

Ist das Trägheitsmoment des regelmäßigen Vielecks für irgend eine Achse durch O in der XY-Ebene bestimmt, so erhält man dasselbe Trägheitsmoment, wenn man die Achse um $\frac{360^0}{n}$, $\frac{2\,.\,360^0}{n}$, ... in der XY-Ebene dreht, weil alle diese Achsen zu dem ganzen Vielecke dieselbe relative Lage haben. Demnach ist die Trägheitsellipse hier ein Kreis, so daß auch $\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y$ ist. Man hat also

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{Tr}_z = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Tr}_x + \mathfrak{Tr}_y)$$

und

$$\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \frac{u\delta}{6}(2\varrho^2 + r^2).$$

Für $lim\, n = \infty$ geht das Vieleck in einen Kreis über, wobei $\varrho = r$ wird. Man hat also für die Kreislinie für $u\delta = m$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Tr}_x &= \mathfrak{Tr}_y = \frac{u\delta}{2}\cdot r^2 = \tfrac{1}{2}mr^2 = \delta\,.\,r^3\pi\\ \mathfrak{Tr}_z &= u\delta r^2 = mr^2 = 2\,\delta r^3\pi\end{aligned}\right\}\quad \dots \quad 223)$$

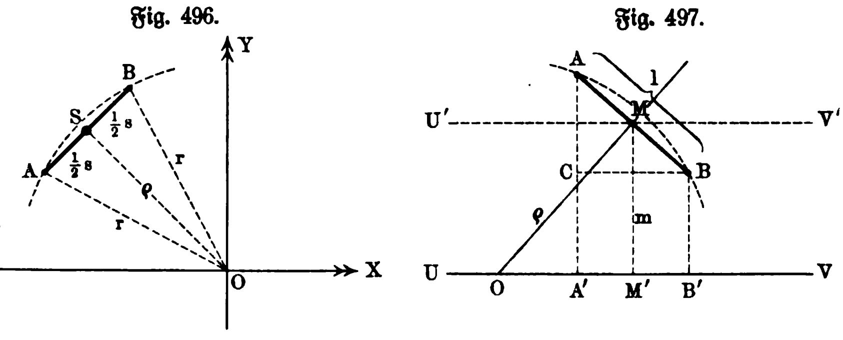


Fig. 496. Fig. 497.

γ) Die Trägheitsmomente des homogenen Kreisbogens. Für eine homogene Stange AB von der Länge l hat das Trägheitsmoment (vergl. Fig. 497) in Bezug auf die Achse $U'V'$, welche durch die Mitte M der Stange geht, für $\measuredangle\, V'MB = \varepsilon$ nach der vorigen Betrachtung den Wert

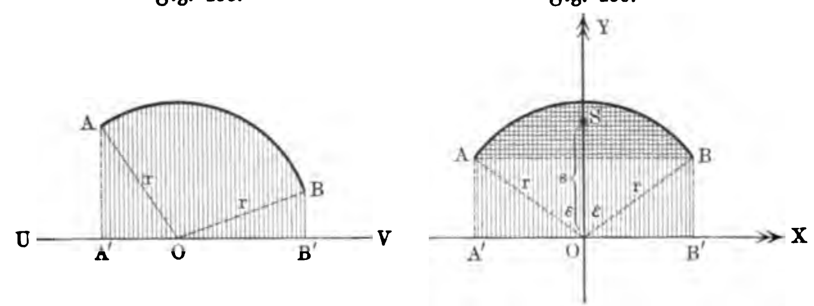
$$\frac{l^2}{12} \cdot \sin^2 \varepsilon \,.\, l\delta = \frac{l^3 \,.\, \delta}{12} \cdot \sin^2 \varepsilon.$$

Für die Parallelachse UV im Abstande m ist das Trägheitsmoment der Stange AB

$$\frac{l^3 \,.\, \delta}{12} \cdot \sin^2 \varepsilon + m^2 \,.\, l\delta.$$

Errichtet man das Mittellot für AB, welches die Achse UV in O schneidet und projiziert man ferner A und B auf UV, so ist $\triangle ABC \sim OMM'$ und man hat (vergl. S. 422) $m \,.\, l = A'B' \,.\, \varrho$, also $m^2 l = m \,.\, A'B' \,.\, \varrho = \varrho \,.\, f$, falls f die Fläche des Trapezes $A'ABB'$ bezeichnet.

Fig. 498. Fig. 499.



Für ein, oberhalb von UV gelegenes Polygon von n Stangen, für welche OM denselben Wert ϱ hat, ist also

$$\Sigma m^2 \,.\, l \,.\, \delta = \varrho \,.\, \delta \,.\, F,$$

falls F die Fläche bezeichnet, welche durch das Polygon, die Achse UV und durch die entsprechenden Lote begrenzt wird.

Um das Trägheitsmoment für das Polygon zu bilden, muß auch noch

$$\Sigma l^3 \,.\, \sin^2 \varepsilon$$

berechnet werden. Bezeichnet man den größten und den kleinsten Wert von $\sin \varepsilon$ bezw. durch $\sin \varepsilon_0$ und $\sin \varepsilon_u$, so ist für n Stangen von derselben Länge l

$$nl^3 \sin^2 \varepsilon_0 > \Sigma l^3 \sin^2 \varepsilon > nl^3 \sin^2 \varepsilon_u,$$

oder es gilt, nach Einführung der Länge L des Streckenzuges ($nl = L$) auch

$$Ll^2 \sin^2 \varepsilon_0 > \Sigma l^3 \sin^2 \varepsilon > Ll^2 \sin^2 \varepsilon_u.$$

Läßt man das Polygon in einen Kreisbogen vom Halbmesser r übergehen, so erhalten die beiden Grenzwerte für $\Sigma l^3 \sin^2 \varepsilon$ den Wert Null, so daß diese Größe selbst verschwindet, während ϱ durch r zu ersetzen ist. Man hat also als Trägheitsmoment des Bogens AB in Fig. 498 in Bezug auf die Achse UV

$$\mathfrak{T}r = \delta \,.\, r \,.\, F,$$

falls F die schraffierte Fläche der Fig. 498 bezeichnet.

Giebt man UV einmal die Lage OX und einmal die Lage OY in Fig. 499, so ist

$$\mathfrak{Tr}_x = \delta \,.\, r \,.\, F_x,$$

wobei F_x die Fläche bezeichnet, welche bei der Projektion von $\widehat{AB}$ auf die X-Achse entsteht, und es ist ferner

$$\mathfrak{Tr}_y = \delta \,.\, r \,.\, F_y,$$

wobei F_y die Fläche bezeichnet, welche bei der Projektion von $\widehat{AB}$ auf die Y-Achse entsteht. Man hat also

$$\mathfrak{Tr}_x = \delta \cdot \frac{r^3}{2}(arc\, 2\,\varepsilon + \sin 2\,\varepsilon) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tr}_y = \delta \cdot \frac{r^3}{2}(arc\, 2\,\varepsilon - \sin 2\,\varepsilon).$$

Fügt man nun noch in O die Z-Achse hinzu, senkrecht zur Ebene der Zeichnung, so ist

$$\mathfrak{Tr}_z = \mathfrak{Tr}_x + \mathfrak{Tr}_y = \delta \,.\, r^3 \,.\, arc\, 2\,\varepsilon.$$

Letzteres Ergebnis läßt sich auch unmittelbar gewinnen, da der volle Kreis für die Achse OZ das Trägheitsmoment $\delta \,.\, (2\,r\pi) \,.\, r^2 = \delta \,.\, r^3 \,.\, 2\pi$ hat, welches natürlich proportional zu dem Bogen bezw. zu dessen Centriwinkel wächst.

Da der Abstand s des Schwerpunktes S von O gegeben ist als $r\dfrac{\sin\varepsilon}{arc\,\varepsilon}$, so lassen sich die drei Trägheitsmomente für Parallelachsen durch S leicht bestimmen.

Es bleibt $\mathfrak{Tr}_y$ unverändert, während $\mathfrak{Tr}_x$ und $\mathfrak{Tr}_z$ je um $2\,\delta \,.\, r^3 \cdot \dfrac{\sin^2\varepsilon}{arc\,\varepsilon}$ verändert werden müssen, falls sie für die entsprechenden Achsen durch S gelten sollen.

Für den vollen Kreis ($\varepsilon = 180^0$) ist

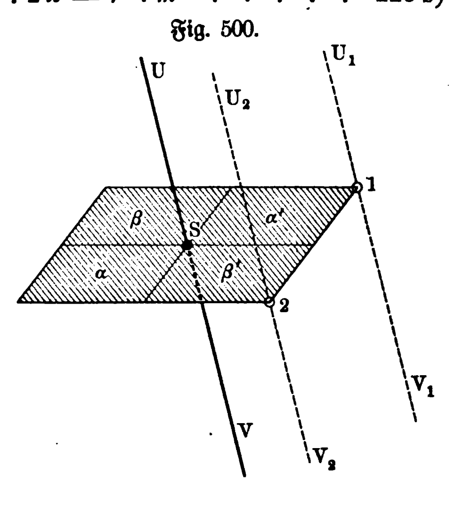
$$\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \frac{\delta \,.\, r^3}{2} \cdot 2\,\pi = \tfrac{1}{2} r^2 \,.\, m \quad . \; . \; . \quad 223\,\text{a})$$

falls man die Masse $(2\,r\pi)\,\delta$ durch m bezeichnet, und

$$\mathfrak{Tr}_z = \delta \,.\, r^3 \,.\, 2\,\pi = r^2 \,.\, m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 223\,\text{b})$$

Für $\delta = 1$ handelt es sich wieder um geometrische Beziehungen, während für $l\delta = m$ eine unendlich-dünne Stange in Form eines Kreisbogens von der Länge l vorliegt.

Fig. 500.



f) **Die Trägheitsmomente homogener Flächen.** α) **Die Trägheitsmomente des Parallelogramms.** Um das Trägheitsmoment eines gleichmäßig (δ) belegten Parallelogramms von der Fläche F für eine beliebige Achse UV durch dessen Schwerpunkt zu bestimmen, kann man es durch seine Mittellinien in vier Parallelogramme zerlegen, wie Fig. 500 zeigt. Zieht

man die Parallelen $U_1 V_1$ und $U_2 V_2$ zu UV, so bildet α und die Achse UV mit der ganzen Fläche und der Achse $U_1 V_1$ ein ähnliches System vom Modul 1 : 2 und ebenso bildet β und die Achse UV mit der ganzen Fläche und der Achse $U_2 V_2$ ein ähnliches System vom Modul 1 : 2.

Bezeichnet man die Trägheitsmomente von α, β, α', β' in Bezug auf die Achse UV bezw. durch T_α, T_β, $T_{\alpha'}$, $T_{\beta'}$, die Trägheitsmomente der ganzen Fläche in Bezug auf die Achsen $U_1 V_1$ und $U_2 V_2$ bezw. durch T_1 und T_2 und das gesuchte Trägheitsmoment der ganzen Fläche in Bezug auf die Achse UV durch $\mathfrak{Tr}$, so ist

$$1)\quad T_\alpha : T_1 = 1 : 2^4 \quad \text{und} \quad T_\beta : T_2 = 1 : 2^4.$$

Da α und α' einerseits und β und β' anderseits gegen UV dieselbe relative Lage haben, so ist $T_\alpha = T_{\alpha'}$ und $T_\beta = T_{\beta'}$ und man hat

$$2)\quad \mathfrak{Tr} = T_\alpha + T_{\alpha'} + T_\beta + T_{\beta'} = 2(T_\alpha + T_\beta).$$

Bezeichnet man die Entfernungen der Achsen $U_1 V_1$ und $U_2 V_2$ von UV bezw. durch p_1 und p_2, so ist

$$3)\quad T_1 = \mathfrak{Tr} + p_1^2 \,.\, F \,.\, \delta \quad \text{und} \quad T_2 = \mathfrak{Tr} + p_2^2 \,.\, F \,.\, \delta.$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) folgt unmittelbar

$$\mathfrak{Tr} = \tfrac{1}{6}(p_1^2 + p_2^2) \,.\, F \,.\, \delta \quad \ldots \quad 224\,\mathrm{a})$$

Fig. 501.

Für ein Rechteck von den Seiten a und b hat man (vergl. Fig. 501), falls UV mit SX zusammenfällt, für $U_1 V_1$ und $U_2 V_2$ die Lagen $M_1 X_1$ und $M_2 X_2$, also $p_1 = \frac{b}{2}$ und $p_2 = \frac{b}{2}$, d. h. es ist

$$\mathfrak{Tr}_x = \tfrac{1}{6}\left(\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) F \,.\, \delta = \frac{b^3 a}{12} \cdot \delta.$$

Ebenso ergiebt sich

$$\mathfrak{Tr}_y = \frac{b a^3}{12} \cdot \delta.$$

Endlich ist

$$\mathfrak{Tr}_z = \mathfrak{Tr}_x + \mathfrak{Tr}_y = \frac{ab(a^2 + b^2)}{12} \cdot \delta,$$

wobei noch $a^2 + b^2$ durch das Quadrat der Diagonale d ersetzt werden kann.

Bei geometrischen Betrachtungen ist $\delta = 1$ zu setzen.

Handelt es sich um eine unendlich-dünne Platte von der Masse m, so ist $m = F \,.\, \delta$ und man hat

$$\mathfrak{Tr}_x = \frac{m}{12} b^2, \quad \mathfrak{Tr}_y = \frac{m}{12} a^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tr}_z = \frac{m}{12} \cdot d^2.$$

Das Centralellipsoid ist damit gleichfalls bestimmt.

Für eine Seite a als Achse gilt: $\mathfrak{T}r = \frac{b^3 a}{3} \cdot \delta = \frac{m}{3} b^2$.

Für eine Diagonale als Achse gilt, falls der Winkel zwischen den Diagonalen durch ε bezeichnet wird: $\mathfrak{T}r = \frac{\delta}{48} d^4 \sin^3 \varepsilon = \frac{m}{24} d^2 \sin \varepsilon^2$.

Für ein beliebiges Parallelogramm, dessen Diagonalen d_1 und d_2 sich unter dem Winkel ε schneiden, gilt für d_1 als Achse: $\mathfrak{T}r = \frac{\delta}{48} d_1 d_2^3 \sin \varepsilon^3$ $= \frac{m}{24} d_2^2 \sin \varepsilon^2$; für den Rhombus ist im besondern $\varepsilon = 90^0$.

β) Die Trägheitsmomente des Dreiecks. Teilt man das Parallelogramm der Fig. 500 durch eine Diagonale, so ist das Trägheitsmoment eines Teildreiecks, wie es Fig. 502 darstellt, in Bezug auf UV die Hälfte des gefundenen Wertes von Formel Nr. 224 a), in welchem F die Fläche des Parallelogramms darstellt. Bezeichnet man jetzt die Fläche des Dreiecks, welche die Hälfte der Fläche des Parallelogramms ist, durch F, so gilt die Formel weiter, und zwar bezeichnen p_1 und p_2 noch immer die Abstände von UV und $U_1 V_1$ bezw. von UV und $U_2 V_2$. Man hat also für UV den Ansatz

Fig. 502.

$$\tfrac{1}{6}(p_1^2 + p_2^2) \cdot F \cdot \delta.$$

Führt man durch den Schwerpunkt S des Dreiecks eine Achse $U_0 V_0$ ein, parallel zu UV, so gilt für das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}r$ in Bezug auf diese Achse

$$\mathfrak{T}r + p_0^2 \cdot F\delta = \tfrac{1}{6}(p_1^2 + p_2^2) F \cdot \delta,$$

falls p_0 den Abstand von UV und $U_0 V_0$ bezeichnet.

Da $p_0 : p_2 = 1 : 3$ ist, so ist

$$\mathfrak{T}r = \tfrac{1}{18}(3 p_1^2 + p_2^2) F \cdot \delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 224\text{ b)}$$

Um diesen Ausdruck zweckmäßiger zu gestalten, projizieren wir $\triangle\, ABC$ auf eine Ebene, senkrecht zu $U_0 V_0$, so daß in dieser ein Dreieck $A'B'C'$ entsteht.

Man hat dann $p_1 = \frac{1}{2} c'$ und $p_2 = t'_c$, so daß

$$\mathfrak{T}r = \tfrac{1}{18}[\tfrac{3}{4} c'^2 + t_c'^2] F \cdot \delta$$

ist.

Da diese Formel in Geltung bleibt, wenn c' und t'_c durch a' und t'_a oder durch b' und t'_b ersetzt wird, so gilt auch

$$3\,\mathfrak{T}r = \tfrac{1}{18}[\tfrac{3}{4}(c'^2 + b'^2 + a'^2) + (t'_a + t_b'^2 + t_c'^2)] F \cdot \delta.$$

Da nun für jedes Dreieck

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)$$

ist, so hat man

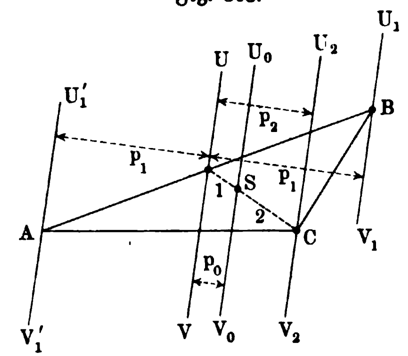
$$\mathfrak{Tr} = \tfrac{1}{36}(a'^2 + b'^2 + c'^2)F \,.\, \delta$$

oder auch

$$\mathfrak{Tr} = \tfrac{1}{27}(t_a'^2 + t_b'^2 + t_c'^2)F \,.\, \delta.$$

Steht $U_0 V_0$ senkrecht auf der Fläche des Dreiecks, so ist $a = a'$, $b = b'$ u. s. w.

Fig. 503.



Fällt $U_0 V_0$ in die Fläche des Dreiecks hinein, wie Fig. 503 zeigt, so bestimmt man unmittelbar p_1 und p_2 und rechnet nach Formel Nr. 224 b); dabei sind die Achsen $U_1 V_1$ und $U_1' V_1'$ gleichwertig. Ist z. B. $U_0 V_0 // AB$, so ist $p_1 = 0$ und $p_2 = h_c$, d. h. man hat $\mathfrak{Tr} = \frac{1}{18} h_c^2 . F . \delta = \frac{1}{36} c h_c^3 . \delta$. Dabei fällt UV mit AB zusammen, und man hat für UV als Achse

$$\mathfrak{Tr} = \tfrac{1}{6} h_c^2 \,.\, F \,.\, \delta = \tfrac{1}{12} c h_c^3 \,.\, \delta.$$

Am meisten werden gebraucht die achsialen Momente für die Achsen I, II, III der Fig. 504 a und die polaren Momente für die Achsen, senkrecht zur Ebene der Zeichnung durch S, B und B'. Man hat für $m = F\delta$

$$\mathfrak{Tr}_{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{4} b h_b^3 \delta = \tfrac{1}{2} m h_b^2$$

$$\mathfrak{Tr}_{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{36} b h_b^3 \delta = \tfrac{1}{18} m h_b^2$$

$$\mathfrak{Tr}_{\mathrm{III}} = \tfrac{1}{12} b h_b^3 \delta = \tfrac{1}{6} m h_b^2$$

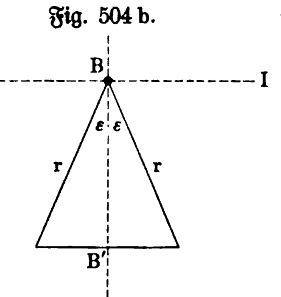
$$\mathfrak{Tr}_B = \frac{\delta}{4}\left[b h_b^3 + \tfrac{1}{3} h_b (b_1^3 + b_2^3)\right]$$

$$\mathfrak{Tr}_S = \left[\tfrac{1}{36} b h^3 + \tfrac{1}{12}(b_1^3 + b_2^3) h_b - \tfrac{1}{18} b h_b (2 b_1^2 + 2 b_2^2 - b^2)\right]\delta,$$

$$\mathfrak{Tr}_{B'} = \left[\tfrac{1}{12} b h_b^3 + \tfrac{1}{4}(b_1^3 + b_2^3) h_b - \tfrac{1}{24} b h_b (8 b_1^2 + 8 b_2^2 - 3 b^2)\right]\delta$$

Fig. 504 a.

Fig. 504 b.



Für gleichschenkelige Dreiecke (vergl. Fig. 504 b) ist im besonderen

$$\mathfrak{Tr}_{\mathrm{I}} = \frac{\delta}{8} r^4 \sin 2\varepsilon (1 + \cos 2\varepsilon)$$

$$\mathfrak{Tr}_B = \frac{\delta}{12} r^4 \sin 2\varepsilon (2 + \cos 2\varepsilon).$$

Für BB' als Achse folgt noch (vergl. $\mathfrak{Tr}_{III}$)

$$\mathfrak{Tr}_{BB'} = \frac{\delta}{24} r^4 \sin 2\varepsilon (1 - \cos 2\varepsilon).$$

Dabei ist natürlich $\mathfrak{Tr}_B = \mathfrak{Tr}_I + \mathfrak{Tr}_{BB'}$.

Außerdem ist $m = F\delta = \frac{\delta}{2} r^2 \sin 2\varepsilon$.

Bei einem beliebigen Viereck gilt für eine Diagonale d_1 als Achse, wenn für diese die Teildreiecke die Höhen h_1 und $\bar{h}_1$ haben,

$$\mathfrak{Tr} = \frac{\delta}{12} d_1 (h_1^3 + \bar{h}_1^3).$$

Dabei ist $m = F\delta = \frac{1}{2}\delta d_1 d_2 \sin\varepsilon$, wenn die andere Diagonale durch d_2 und der Winkel zwischen den Diagonalen mit ε bezeichnet wird.

γ) **Die Trägheitsmomente der homogenen regelmäßigen Vielecksfläche und der homogenen Kreisfläche.** Für das gleichschenkelige Dreieck der Fig. 505 gilt für eine Achse durch S, senkrecht zur Fläche eines Teildreiecks, nach S. 675

$$\frac{\delta}{6} \cdot f \cdot \left(\frac{p_2^2}{3} + p_1^2\right),$$

falls die Dreiecksfläche durch f bezeichnet wird; hier ist $p_1 = \frac{s}{2}$ und $p_2 = \varrho$, so daß obiger Ausdruck wird

$$\frac{\delta}{6} \cdot f \left(\frac{\varrho^2}{3} + \frac{s^2}{4}\right).$$

Fig. 505.

Für die Parallelachse durch O gilt

$$\frac{\delta}{6} \cdot f \cdot \left(\frac{\varrho^2}{3} + \frac{s^2}{4}\right) + \frac{4}{9}\varrho^2 f\delta = f\delta\left(\frac{1}{2}\varrho^2 + \frac{s^2}{24}\right) = \frac{f\delta}{6}(r^2 + 2\varrho^2).$$

Bei n solchen Dreiecken hat man für $nf = F$

$$\mathfrak{Tr}_z = \frac{F \cdot \delta}{6}(r^2 + 2\varrho^2).$$

Ist das Trägheitsmoment des regelmäßigen Vielecks für irgend eine Achse durch O in der XY-Ebene bestimmt, so erhält man dasselbe Trägheitsmoment, wenn man die Achse um $\frac{360^0}{n}, \frac{2 \cdot 360^0}{n}, \cdots$ in der XY-Ebene dreht, weil alle diese Achsen zu dem ganzen Vielecke dieselbe relative Lage haben. Demgemäß ist die Trägheitsellipse hier ein Kreis, so daß auch $\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y$ ist.

Man hat also $\frac{1}{2}\mathfrak{Tr}_z = \frac{1}{2}(\mathfrak{Tr}_x + \mathfrak{Tr}_y)$

$$\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \frac{F \cdot \delta}{12}(r^2 + 2\varrho^2).$$

Für $lim.n = \infty$ geht das Vieleck in einen Kreis über, wobei $\varrho = r$ wird. Man hat also für die **Kreisfläche**

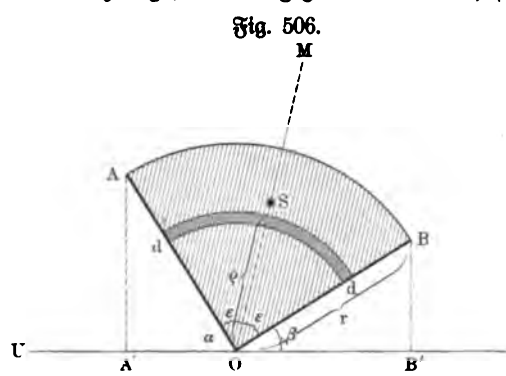
$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{T}_x = \mathfrak{T}_y = \frac{F.\delta}{4} \cdot r^2 = \tfrac{1}{4} m r^2 = \frac{\delta}{4} r^4 \pi \\ \mathfrak{T}_z = \frac{F.\delta}{2} \cdot r^2 = \tfrac{1}{2} m r^2 = \frac{\delta}{2} r^4 \pi\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 225)$$

Für die Fläche des Kreisringes von den Radien r_1 und r_2 ist ebenso

$$\mathfrak{T}_z = \tfrac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$$
$$\mathfrak{T}_x = \mathfrak{T}_y = \tfrac{1}{4} m (r_1^2 + r_2^2).$$

δ) **Die Trägheitsmomente des Kreisausschnittes.** Denkt man einen Kreisausschnitt durch konzentrische Bogen in n Ringstücke von gleicher Breite d zerlegt, wie es Fig. 506 andeutet, so läßt sich die Mittellinie jedes Ringstückes für $lim.n = \infty$ als ein entsprechend belasteter Bogen ansehen. Um das Trägheitsmoment des Ausschnittes zu bestimmen, hat man die Summe der entsprechenden Trägheitsmomente der n Bogen zu bilden und diese Summe für $lim\ n = \infty$ zu behandeln. Wählt man statt der Mittellinie des Ringstückes dessen äußere oder innere Begrenzung, so gelangt man in beiden Fällen zu demselben Ergebnisse, es kann also statt der Mittellinie auch eine dieser Begrenzungen gewählt werden.

Fig. 506.



Bezeichnet δ die Massenbelegung für die Flächeneinheit des Ausschnittes, so entspricht dem Kreisbogen, der ein Ringstück von den Radien ϱ und $\varrho - d$ und dem Centriwinkel 2ε ersetzt, die Belastung $\frac{1}{2} arc\, 2\varepsilon (\varrho^2 - \overline{\varrho - d}^2) . \delta = \delta . arc\, 2\varepsilon (\varrho d - \frac{1}{2} d^2)$.

Wählt man die äußere Begrenzung (ϱ) des Ringstückes als Träger der Belastung, so kommt auf die Bogeneinheit die Belastung

$$\frac{\delta . arc\, 2\varepsilon (\varrho d - \frac{1}{2} d^2)}{\varrho . arc\, 2\varepsilon} = \delta \cdot \frac{\varrho d - \frac{1}{2} d^2}{\varrho}.$$

In Bezug auf die Achse UV ist nun (vergl. S. 672) das Trägheitsmoment dieses Bogens

$$\delta . (\varrho d - \tfrac{1}{2} d^2) F_\varrho,$$

falls F_ϱ die $A'ABB'$ entsprechende Fläche der Fig. 506 für den Radius ϱ bezeichnet, deren Wert $\frac{1}{2}\varrho^2 [arc\, 2\varepsilon + \frac{1}{2} sin\, 2\alpha + \frac{1}{2} sin\, 2\beta]$ ist.

Dieses Trägheitsmoment hat also den Wert

$$C . [\varrho^3 d - \tfrac{1}{2} \varrho^2 d^2],$$

wobei $C = \frac{\delta}{2} [arc\, 2\varepsilon + \frac{1}{2} sin\, 2\alpha + \frac{1}{2} sin\, 2\beta]$ ist.

Da r in n gleiche Teile d zerfällt, so ist bei Wahl der äußeren Begrenzung der Ringstücke, für ϱ der Reihe nach zu setzen $d, 2d, 3d, \ldots nd = r$.

Für $\varrho = pd$ hat das aufgestellte Trägheitsmoment den Wert

$$C[p^3d^4 - \tfrac{1}{2}p^2d^4].$$

Demnach ist das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}\mathfrak{r}$ des Ausschnittes

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} = C[d^4\Sigma p^3 - \tfrac{1}{2}d^4\Sigma p^2]$$

für $p = 1, 2, \ldots n$.

Der Grenzübergang liefert ohne weiteres, nachdem $nd = r$ gesetzt ist, $\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \frac{1}{4}Cr^4$, so daß man also hat

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \frac{\delta}{8}r^4[arc\,2\varepsilon + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 2\beta] \quad . \; . \; . \quad 226)$$

Steht UV senkrecht auf der Symmetrale OM, so ist $\alpha = \beta = 90^0 - \varepsilon$ und man hat, entsprechend Fig. 499,

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_x = \frac{\delta}{8}r^4(arc\,2\varepsilon + \sin 2\varepsilon).$$

Fällt UV mit der Symmetralen OM zusammen, so ist $\beta = -\varepsilon$ und $\alpha = 180^0 - \varepsilon$ und man hat, entsprechend Fig. 499,

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_y = \frac{\delta}{8}r^4(arc\,2\varepsilon - \sin 2\varepsilon).$$

Ebenso ist

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z = \frac{\delta}{4}r^4\,arc\,2\varepsilon = \tfrac{1}{2}mr^2.$$

Da der Abstand des Schwerpunktes $OS = s = \frac{2}{3}r\frac{\sin\varepsilon}{arc\,\varepsilon}$ gegeben ist, so ist es wieder leicht, die Trägheitsmomente für die Hauptachsen des Schwerpunktes umzuschreiben.

Für den **vollen Kreis** ($\varepsilon = 180^0$) gilt für dessen Schwerpunkt

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_x = \mathfrak{T}\mathfrak{r}_y = \tfrac{1}{4}\delta r^4\pi \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z = \tfrac{1}{2}\delta r^4\pi.$$

Führt man die Masse $m = r^2\pi\delta$ ein, so ist wieder

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_x = \mathfrak{T}\mathfrak{r}_y = \tfrac{1}{4}mr^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z = \tfrac{1}{2}mr^2.$$

Für den **Ausschnitt eines Ringes** von den Radien r_1 und r_2 gilt ebenso für das Kreiscentrum

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z = \tfrac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2).$$

Fig. 507.

ε) **Die Trägheitsmomente des Kreisabschnittes.** Für die Achse durch O (Fig. 507), senkrecht zur Ebene der Zeichnung, ist das Trägheitsmoment des Abschnittes der Unterschied zwischen den Trägheitsmomenten des Ausschnittes und des entsprechenden Dreiecks (vergl. S. 676) für dieselbe Achse, d. h. man hat

$$\mathfrak{Tr}_z = \mathfrak{Tr}_0 = \frac{\delta}{4} r^4 arc\, 2\,\varepsilon - \frac{\delta}{12} r^4 \sin 2\,\varepsilon\,(2 + \cos 2\,\varepsilon)$$
$$= \frac{\delta}{24} r^4 [6\, arc\, 2\,\varepsilon - 4 \sin 2\,\varepsilon - \sin 4\,\varepsilon].$$

Ebenso ist

$$\mathfrak{Tr}_y = \frac{\delta}{8} r^4 (arc\, 2\,\varepsilon - \sin 2\,\varepsilon) - \frac{\delta}{24} r^4 \sin 2\,\varepsilon\,(1 - \cos 2\,\varepsilon)$$
$$= \frac{\delta}{48} r^4 [6\, arc\, 2\,\varepsilon - 8 \sin 2\,\varepsilon + \sin 4\,\varepsilon].$$

Ebenso ist

$$\mathfrak{Tr}_x = \frac{\delta}{8} r^4 (arc\, 2\,\varepsilon + \sin 2\,\varepsilon) - \frac{\delta}{8} r^4 \sin 2\,\varepsilon\,(1 + \cos 2\,\varepsilon)$$
$$= \frac{\delta}{16} r^4 (2\, arc\, 2\,\varepsilon - \sin 4\,\varepsilon).$$

Will man die Masse m einführen, so ist zu setzen

$$m = \frac{\delta}{2} r^2 (arc\, 2\,\varepsilon - \sin 2\,\varepsilon).$$

Will man das Kreuz verschieben, so daß es durch S geht, so bleibt T_y ungeändert, während die Verschiebungsstrecke für die anderen beiden Momente ist

$$OS = \frac{(2\,r \sin \varepsilon)^3}{12\,f}$$

und demnach

$$OS^2 \cdot f = \frac{(2\,r \sin \varepsilon)^6}{144\,f} = \frac{8\,r^4 \sin \varepsilon^6}{9\,(arc\, 2\,\varepsilon - \sin 2\,\varepsilon)}.$$

ζ) Die Trägheitsmomente von Ellipsenflächen. Da man für die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hat $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, während y für den entsprechenden Kreis vom Radius a der Wert $\sqrt{a^2 - x^2}$ ist, so stehen die Streifen beider Flächen, parallel zur Y-Achse im Verhältnis $b : a$, und es ist $\mathfrak{Tr}_y$ für die Ellipse $\frac{b}{a} \mathfrak{Tr}'_y$, falls man das Trägheitsmoment des Kreises für die Y-Achse durch $\mathfrak{Tr}'_y$ bezeichnet. Demnach gilt

$$\mathfrak{Tr}_y = \frac{b}{a} (\tfrac{1}{4} \pi a^4 \delta) = \frac{\delta}{4} \pi a^3 b = \frac{m}{4} \cdot a^2.$$

Ebenso ist

$$\mathfrak{Tr}_x = \frac{\delta}{4} \pi a b^3 = \frac{m}{4} \cdot b^2.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{Tr}_z = \mathfrak{Tr}_0 = \frac{\delta}{4} \pi a b (a^2 + b^2) = \frac{m}{4} (a^2 + b^2).$$

Für die Halbellipsen und Viertelellipsen, welche der Achsenteilung entsprechen, tritt die Hälfte bezw. ein Viertel obiger Werte ein.

Für andere Ausschnitte und für Abschnitte hat man auf die entsprechenden Kreisstücke zurückzugehen.

η) Die Trägheitsmomente von Parabelflächen. Für die obere Fläche der Fig. 508 findet man bei Zerlegung in Streifen durch Grenzübergang ($f = \frac{2}{3}ab$)

$$\mathfrak{Tr}_x = \frac{2\,\delta}{15} ab^3 = \frac{m}{5} b^2$$

$$\mathfrak{Tr}_y = \frac{2\,\delta}{7} a^3 b = \frac{3\,m}{7} a^2.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{Tr}_z = \mathfrak{Tr}_0 = m\left(\tfrac{1}{5} b^2 + \tfrac{3}{7} a^2\right).$$

Für die Verschiebung des Kreuzes nach S vergl. die Werte auf S. 432. Für die Doppelfläche der Fig. 508 gilt

$$\mathfrak{Tr}_x = \frac{4\,\delta}{15} ab^3, \quad \mathfrak{Tr}_y = \frac{4\,\delta}{7} a^3 b \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tr}_z = \mathfrak{Tr}_0 = 2\,m\left(\tfrac{1}{5} b^2 + \tfrac{3}{7} a^2\right).$$

Verschiebt man hier das Kreuz nach dem Schwerpunkte der Fläche, so bleibt $\mathfrak{Tr}_x$ ungeändert, während für $\mathfrak{Tr}_y$ und $\mathfrak{Tr}_0$ die Verschiebung $\frac{3}{5}a$ in Rechnung zu stellen ist.

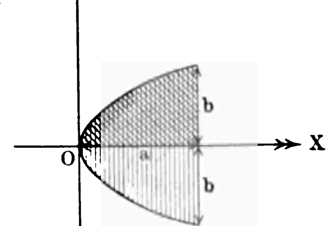


Fig. 508.

Für die Schwerpunktsachsen der Doppelfläche gilt also

$$\mathfrak{Tr}_x = \frac{4}{15}\delta ab^3 = \frac{1}{5} m b^2$$

$$\mathfrak{Tr}_y = \frac{16}{175}\delta a^3 b = \frac{12}{175} m a^2$$

$$\mathfrak{Tr}_z = \frac{m}{175}(12\,a^2 + 35\,b^2).$$

ϑ) Die Trägheitsmomente von Hyperbelflächen. Diese sind im allgemeinen (vergl. S. 667) auf elementarem Wege kaum darstellbar.

ι) Die Trägheitsmomente für den Mantel des geraden Cylinders. Um das Trägheitsmoment für die Cylinderachse OZ zu bestimmen, zerlegt man den Mantel durch Schnitte senkrecht zur Achse in n Cylindermäntel von der Höhe d und denkt sich jeden Mantel von der Belastung $2r\pi \,.\, d \,.\, \delta$ durch die Kreislinie $2r\pi$ seines Mittelschnittes ersetzt, deren Längeneinheit also durch $d\delta$ belastet ist.

Das Trägheitsmoment einer solchen Kreislinie für die Achse ist gemäß S. 673 $d\delta \,.\, r^3 \,.\, 2\pi$, beträgt also für n solche Kreislinien $nd \,.\, \delta \,.\, r^3 2\pi$.

Da $nd = h$ ist, falls man die Höhe des Cylindermantels durch h bezeichnet, so ist

$$\mathfrak{Tr}_z = \delta \,.\, h \,.\, r^3 \,.\, 2\pi = (2 r\pi h\delta) \,.\, r^2$$
$$= m \,.\, r^2.$$

Für eine Achse, senkrecht zur Cylinderachse durch den Mittelpunkt (Schwerpunkt), welche durch OX oder OY bezeichnet werden kann, betrachtet man eine der oben eingeführten Kreislinien, deren Abstand von O den Wert

$pd + \frac{1}{2}d$ hat, wofür aber, wie bereits mehrfach durchgeführt, pd bezw. $(p+1)d$ gesetzt werden darf. Das Trägheitsmoment für die Achse durch O ist dann

$$\frac{d\delta}{2} \cdot r^3 2\pi + (2r\pi d\delta) \cdot p^2 d^2.$$

Wählt man n gerade, so daß $n = 2q$ ist, so wird das Trägheitsmoment für die Hälfte des Cylindermantels durch

$$\frac{qd}{2}\delta r^3 2\pi + 2r\pi d^3 \delta \Sigma p^2$$

für $qd = \frac{h}{2}$ bestimmt, falls $lim. n = \infty$ ist. Man hat also für das halbe Trägheitsmoment

$$\frac{h}{4} r^3 2\pi\delta + \frac{2}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 r\pi\delta = 2r\pi h\delta\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{24}\right)$$

und also

$$\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = 2r\pi h\delta\left(\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{12}\right) = \frac{1}{2}m\left(r^2 + \frac{h^2}{6}\right).$$

$\varkappa$) **Die Trägheitsmomente für den Mantel des geraden Kegels.** Bezeichnet man Höhe und Grundkreisradius des Kegels bezw. mit h und r, so hat ein Schnittkreis im Abstande pd von der Spitze den Radius $\frac{r}{h} \cdot pd$. Entsprechend den vorangegangenen Betrachtungen findet man z. B.

$$\mathfrak{Tr}_z = \frac{1}{2} m r^2,$$

wobei $m = \delta r\pi s$ ist, unter s die Kegelseite verstanden.

Für den **Kegelstumpf** von den Radien r_1 und r_2 ist ebenso

$$\mathfrak{Tr}_z = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2),$$

wobei $m = \delta(r_1 + r_2)\pi s$ ist, unter s die Seite des Stumpfes verstanden.

λ) **Die Trägheitsmomente für die Kugelfläche.** Bezeichnet man den Kugelradius mit R, so hat ein Schnittkreis im Abstande pd vom Mittelpunkte den Radius $2R \cdot pd - p^2 d^2$. Entsprechend den vorigen Betrachtungen findet man für eine Achse durch den Mittelpunkt

$$\mathfrak{Tr} = \frac{2}{3} m R^2,$$

wobei $m = \delta \cdot 4R^2\pi$ ist.

μ) **Die Deviationsmomente (Centrifugalmomente) der betrachteten ebenen Flächen.** Bildet man für die Hauptachsen $\frac{1}{2}(\mathfrak{Tr}_y - \mathfrak{Tr}_x)$, so ist mit diesem Werte der Wert des maximalen Deviationsmomentes für das Kreuz XOY gegeben, aus dem sich die anderen Werte gemäß S. 653 u. 657 berechnen lassen.

g) **Die Trägheitsmomente homogener Körper.** α) **Die Trägheitsmomente des Rechtkants.** Das Kreuz der centralen Hauptachsen liegt wegen der symmetrischen Verhältnisse des Körpers parallel zu den Kanten a, b, c. Zu demselben Ergebnisse führt die Berechnung der Deviationsmomente für das Kreuz dreier anstoßenden Kanten und deren Übertragung auf das Parallelkreuz durch den Schwerpunkt. Vergl. S. 657.

Sind die Achsen OX, OY, OZ, für welche O der Schwerpunkt des Körpers ist, bezw. parallel zu den Kanten a, b, c, so berechnet man $\mathfrak{Tr}_z$ z. B. auf folgende Weise. Teilt man c in n gleiche Teile d, so hat eine Platte von der Dicke d, senkrecht zur Achse OZ, die Masse $(abd) \,.\, \delta$, welche, als Belegung der Rechtecksfläche ab aufgefaßt, für diese $d\delta$ als Belegung der Flächeneinheit giebt. Da die Achse OZ das Rechteck von der Fläche ab in dessen Schwerpunkt senkrecht schneidet, so ist das (polare) Trägheitsmoment dieses Rechtecks für OZ

$$\frac{ab(a^2 + b^2)}{12} d\delta,$$

so daß man für n Platten, da $nd = c$ ist, für $lim\, n = \infty$ erhält

$$\mathfrak{Tr}_z = \frac{abc}{12}(a^2 + b^2) \,.\, \delta = \tfrac{1}{12} M(a^2 + b^2) \quad . \quad . \quad . \quad 227)$$

Ebenso ist: $\mathfrak{Tr}_y = \frac{1}{12} M(c^2 + a^2)$ und $\mathfrak{Tr}_x = \frac{1}{12} M(b^2 + c^2)$.

Dieselben Ergebnisse lassen sich durch Berechnung von E_{xy} u. s. w. durch die Mittelschnittsformel erhalten.

Das Centralellipsoid hat die Gleichung

$$x^2 \,.\, \tfrac{1}{12} M(b^2 + c^2) + y^2 \,.\, \tfrac{1}{12} M(c^2 + a^2) + z^2 \,.\, \tfrac{1}{12} M(a^2 + b^2) = C^2.$$

Die Quadrate der Trägheitsarme sind für OX, OY, OZ bezw. $\frac{1}{12}(b^2 + c^2)$, $\frac{1}{12}(c^2 + a^2)$, $\frac{1}{12}(a^2 + b^2)$.

Das centrale Reciprokalellipsoid hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{\frac{1}{12}(b^2 + c^2)} + \frac{y^2}{\frac{1}{12}(c^2 + a^2)} + \frac{z^2}{\frac{1}{12}(a^2 + b^2)} = K^2.$$

β) Die Trägheitsmomente gerader Prismen bezw. Cylinder. Wir legen das Kreuz durch den Schwerpunkt des Körpers, so daß die Achse OZ einer Seite des Prismas bezw. Cylinders parallel ist. Wenn der Querschnitt von der Fläche f in Bezug auf die entsprechenden Achsen durch seinen Schwerpunkt die Trägheitsmomente $\overline{\mathfrak{Tr}}_x$, $\overline{\mathfrak{Tr}}_y$ und $\overline{\mathfrak{Tr}}_z = \mathfrak{Tr}_0$ für die Belegung 1 der Flächeneinheit hat, so ist, wie im Falle α), bei einer Höhe h des Prismas bezw. Cylinders

$$\mathfrak{Tr}_z = \mathfrak{Tr}_0 \,.\, h \,.\, \delta.$$

Um $\mathfrak{Tr}_x$ abzuleiten, betrachten wir eine der Hälften des Prismas bezw. Cylinders, welche die XY=Ebene bestimmt. Eine Platte, senkrecht zu OZ, von der Dicke d im Abstande pd von der XY=Ebene hat dann für die Achse OX das Trägheitsmoment

$$[\overline{\mathfrak{Tr}}_x + f \,.\, (pd)^2]\, d\delta.$$

Zerlegt man $\frac{h}{2}$ in n gleiche Teile d, so hat der halbe Körper für die Achse OX das Trägheitsmoment

$$n \,.\, \overline{\mathfrak{Tr}}_x \,.\, d\delta + fd^3\delta \Sigma p^2,$$

welches, da $nd = \frac{1}{2} h$ ist, für $lim\, n = \infty$ den Wert

$$\overline{\mathfrak{Tr}}_x \cdot \frac{h}{2}\delta + f\frac{h^3}{24}\delta$$

annimmt.

Demgemäß ist für den ganzen Körper

$$\mathfrak{Tr}_x = \overline{\mathfrak{Tr}}_x \,.\, h \,.\, \delta + \tfrac{1}{12} f h^3 \delta.$$

Ebenso ist

$$\mathfrak{Tr}_y = \overline{\mathfrak{Tr}}_y \,.\, h \,.\, \delta + \tfrac{1}{12} f h^3 \delta.$$

Mit diesen Formeln, die sich auch durch die Mittelschnittsformel u. s. w. ableiten lassen, kann man unter anderem auch die Ergebnisse unter α) wiedergewinnen.

Für den geraden Kreiscylinder vom Radius r ist $f = r^2\pi$ und $\mathfrak{Tr}_0 = \frac{1}{2}\pi r^4$ und $\overline{\mathfrak{Tr}}_x = \mathfrak{Tr}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$, so daß sich also in diesem Falle ergiebt

$$\mathfrak{Tr}_z = \tfrac{1}{2}\pi r^4 h\delta = \tfrac{1}{2} M \,.\, r^2$$
$$\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \tfrac{1}{4}\pi r^4 h\delta + \tfrac{1}{12} r^2 \pi h^3 \delta = \tfrac{1}{4} M(r^2 + \tfrac{1}{3}h^2).$$

Das centrale Trägheitsellipsoid ist ein Rotationsellipsoid, dessen Achse OZ ist. Für den Sonderfall $\mathfrak{Tr}_z = \mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y$, d. h. für $h = r\sqrt{3}$ geht es in eine Kugel über.

Im übrigen gelten entsprechende Bedingungen wie unter α).

Für den geraden Hohlcylinder von den Radien r_1 und r_2 gilt ebenso

$$\mathfrak{Tr}_z = \tfrac{1}{2} M(r_1^2 + r_2^2)$$
$$\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \tfrac{1}{4} M(r_1^2 + r_2^2 + \tfrac{1}{3}h^2).$$

γ) Die Trägheitsmomente gerader Pyramiden bezw. Kegel. Unter geraden Pyramiden bezw. Kegeln sollen hier pyramidale Körper verstanden werden, bei denen der Schwerpunkt der Grundfläche senkrecht unter der Spitze liegt. Wir legen das Kreuz durch den Schwerpunkt des Körpers, so daß die Achse OZ mit der Achse (h) des Körpers zusammenfällt. Wenn die Grundfläche von der Größe f in Bezug auf die entsprechenden Achsen durch ihren Schwerpunkt die Trägheitsmomente $\overline{\mathfrak{Tr}}_x$, $\overline{\mathfrak{Tr}}_y$ und $\overline{\mathfrak{Tr}}_z = \mathfrak{Tr}_0$ für die Belegung 1 der Flächeneinheit hat, so sind die entsprechenden Größen für eine Parallelfläche im Abstande pd, von der Spitze (Abbildung nach dem Modul $h : pd$)

$$f \cdot \frac{p^2 d^2}{h^2}, \quad \overline{\mathfrak{Tr}}_x \frac{p^4 d^4}{h^4}, \quad \overline{\mathfrak{Tr}}_y \frac{p^4 d^4}{h^4}, \quad \overline{\mathfrak{Tr}}_0 \frac{p^4 d^4}{h^4}.$$

Für ein Kreuz durch die Spitze des Kegels, welches dem oben eingeführten Kreuze durch den Schwerpunkt parallel ist, gilt dann zunächst in Bezug auf die Z-Achse der Ansatz $\mathfrak{Tr}_0 \cdot \frac{d^5}{h^4} \cdot \delta \,.\, \Sigma p^4$ für $lim \,.\, n = \infty$. Man hat also

$$\mathfrak{Tr}_z' = \tfrac{1}{5} h \,.\, \mathfrak{Tr}_0 \,.\, \delta.$$

Für $\mathfrak{Tr}_x'$ liefert die einzelne Platte, senkrecht zu OZ, den Beitrag

$$\overline{\mathfrak{Tr}}_x \frac{p^4 d^4}{h^4} + \frac{p^4 d^4}{h^2} f,$$

d. h. für die X-Achse gilt der Ansatz

$$\overline{\mathfrak{Tr}}_x \delta \cdot \frac{d^5}{h^4} \Sigma p^4 + \frac{d^5}{h^2} f \delta \Sigma p^4$$

für $lim\, n = \infty$. Man hat also

$$\mathfrak{Tr}'_x = \tfrac{1}{5} h \,.\, \overline{\mathfrak{Tr}}_x \,.\, \delta + \tfrac{1}{5} f h^3 \delta.$$

Ebenso ist

$$\mathfrak{Tr}'_y = \tfrac{1}{5} h \,.\, \overline{\mathfrak{Tr}}_y \,.\, \delta + \tfrac{1}{5} f h^3 \delta.$$

Für das Kreuz durch den Schwerpunkt bleibt $\mathfrak{Tr}'_z$ unverändert, während für $\mathfrak{Tr}'_x$ und $\mathfrak{Tr}'_y$ eine Verschiebung um $\frac{3}{4} h$ in Rechnung gestellt werden muß. Man hat also, da die Masse des Körpers $\frac{fh}{3} \cdot \delta$ ist,

$$\mathfrak{Tr}_z = \tfrac{1}{5} h \,.\, \mathfrak{Tr}_0 \,.\, \delta$$

$$\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}'_x - \tfrac{9}{16} h^2 \cdot \left(\frac{fh\delta}{3}\right) = \tfrac{1}{5} h \,.\, \overline{\mathfrak{Tr}}_x \,.\, \delta + \tfrac{1}{80} f \,.\, h^3 \,.\, \delta$$

$$\mathfrak{Tr}_y = \mathfrak{Tr}'_y - \tfrac{9}{16} h^2 \cdot \left(\frac{fh\delta}{3}\right) = \tfrac{1}{5} h \,.\, \overline{\mathfrak{Tr}}_y \,.\, \delta + \tfrac{1}{80} f \,.\, h^3 \,.\, \delta.$$

Für die gerade Pyramide mit rechteckiger Grundfläche (ab) ist z. B.

$$\mathfrak{Tr}_0 = \frac{ab(a^2 + b^2)}{12}, \quad \overline{\mathfrak{Tr}}_x = \frac{ab^3}{12}, \quad \overline{\mathfrak{Tr}}_y = \frac{a^3 b}{12},$$

d. h. man hat

$$\mathfrak{Tr}_z = \tfrac{1}{20} M(a^2 + b^2)$$
$$\mathfrak{Tr}_x = \tfrac{1}{20} M(b^2 + \tfrac{3}{4} h^2)$$
$$\mathfrak{Tr}_y = \tfrac{1}{20} M(a^2 + \tfrac{3}{4} h^2).$$

Für den geraden Kreiskegel ist

$$f = r^2 \pi, \quad \mathfrak{Tr}_0 = \tfrac{1}{2} r^4 \pi \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{Tr}}_x = \overline{\mathfrak{Tr}}_y = \tfrac{1}{4} r^4 \pi,$$

so daß hier gilt

$$\mathfrak{Tr}_z = \tfrac{1}{10} r^4 \pi h \delta = \tfrac{3}{10} M r^2$$
$$\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \tfrac{1}{20} r^4 \pi h \delta + \tfrac{1}{80} r^2 \pi h^3 \delta = \tfrac{3}{20} M(r^2 + \tfrac{1}{4} h^2).$$

Für den Kegelstumpf von den Radien r_1 und r_2 ist ebenso

$$\mathfrak{Tr}_z = \tfrac{3}{10} M \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}.$$

δ) **Trägheitsmomente für die Kugel, den Kugelausschnitt und den Kugelabschnitt.** Legt man ein rechtwinkeliges Kreuz durch den Mittelpunkt O der Kugel vom Radius R, so hat eine Platte von der Dicke d, senkrecht zu OZ, im Abstande pd von O das Trägheitsmoment $\frac{1}{2} r^4 \pi d \delta$ für $r^2 = R^2 - p^2 d^2$. Man hat also für $\mathfrak{Tr}_z$ den Ansatz

$$\Sigma \tfrac{1}{2} (R^2 - pd^2)^2 \pi d \delta$$
$$= \tfrac{1}{2} \Sigma (R^4 d - 2 R^2 p^2 d^3 + p^4 d^5) \pi \delta.$$

Dabei ist für die Halbkugel $nd = R$ für $lim\, n = \infty$. Für die Halbkugel gilt also

$$\mathfrak{Tr}_z = \tfrac{1}{2} \left(R^5 - \frac{2 R^5}{3} + \tfrac{1}{5} R^5\right) \delta = \tfrac{4}{15} R^5 \,.\, \delta.$$

Für die Kugel ist also

$$\mathfrak{Tr}_z = \mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \frac{8}{15} R^5 \delta = \frac{2}{5} M \,.\, R^2 \quad . \;\; . \;\; . \qquad 228)$$

Für die Hohlkugel von den Radien r_1 und r_2 gilt ebenso

$$\mathfrak{Tr}_z = \mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \frac{2}{5} M \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}.$$

Für den Kugelabschnitt von der Höhe h, der parallel zur XY-Ebene abgeschnitten ist, hat man die oben aufgestellte Formel für $\mathfrak{Tr}_z$ zunächst zu berechnen für $nd = R - h$ und zwar für $\lim n = \infty$, und dann diesen Wert vom Trägheitsmomente der Halbkugel abzuziehen. Man hat also hier abzuziehen

$$\frac{1}{2}[R^4(R - h) - \frac{2}{3} R^2 (R - h)^3 + \frac{1}{5}(R - h)^5]\pi\delta$$

und findet

$$\mathfrak{Tr}_z = \frac{1}{3}\pi\delta h^3 [2 R^2 - \frac{3}{2} Rh + \frac{3}{10} h^2] = M \,.\, h \cdot \frac{2 R^2 - \frac{3}{2} Rh + \frac{3}{10} h^2}{3 R - h}.$$

Um für den Kugelabschnitt $\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y$ für Achsen durch den Schwerpunkt zu bestimmen, berechnet man E_{xy}, E_{yz}, E_{zx}.

Entsprechendes gilt für Kugelschichten.

Für den Kugelausschnitt, dessen Kalotte die Höhe h hat, findet man ebenso

$$\mathfrak{Tr}_z = \frac{1}{5} M (3 Rh - h^2).$$

ε) Trägheitsmoment für das Ellipsoid und dessen Stücke. Für ein Rotationsellipsoid von den Achsen a, a, c läßt sich zunächst das Trägheitsmoment für die Hauptachse OZ, welche $[c]$ parallel ist, leicht bestimmen, falls man die konzentrische Kugel vom Radius c einführt. Eine unendlichdünne Platte des Ellipsoides senkrecht zu OZ, von der Dicke d, verhält sich zu der entsprechenden Platte der Kugel wie $a^2 : c^2$, ihr Trägheitsmoment also, da beide Platten kreisförmig sind, wie $a^4 : c^4$. Demgemäß muß das Trägheitsmoment der Kugel $\frac{2}{5}(\frac{4}{3}\delta c^3 \pi) c^2$ im Verhältnisse $a^4 : c^4$ verändert werden, um das entsprechende Trägheitsmoment für das Ellipsoid zu liefern. Man hat also für dieses

$$\mathfrak{Tr}_z = \frac{2}{5}(\frac{4}{3}\delta a^2 c \pi) \,.\, a^2 = \frac{2}{5} M \,.\, a^2.$$

Entsprechende Schlüsse führen für eine der anderen Achsen zu

$$\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \frac{1}{5} M (a^2 + c^2).$$

Für das dreiachsige Ellipsoid von den Halbachsen a, b, c, dessen Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ist, hat ein Schnitt in der Höhe z senkrecht zur Achse OZ die Halbachsen $\frac{a}{c}\sqrt{c^2 - z^2}$ und $\frac{b}{c}\sqrt{c^2 - z^2}$, so daß das (polare) Trägheitsmoment dieses Schnittes (für OZ) den Wert

$$\frac{1}{4}\pi \frac{ab}{c^4}(a^2 + b^2)(c^2 - z^2)^2$$

hat.

Faßt man diesen Schnitt als Träger der Belastung einer Platte von der Dicke d auf, so ist für $z = pd$ das entsprechende Trägheitsmoment

$$\tfrac{1}{4}\pi\frac{ab}{c^4}(a^2+b^2)[c^4d-2c^2p^2d^3+p^4d^5]\,\delta.$$

Demnach ist für das halbe Ellipsoid, falls $nd = c$ für $\lim n = \infty$ gilt,

$$\mathfrak{Tr}'_z = \tfrac{2}{15}\pi abc(a^2+b^2)\,\delta.$$

Für das ganze Ellipsoid ist also

$$\mathfrak{Tr}_z = \tfrac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2)\,\delta = \tfrac{1}{5}M(a^2+b^2).$$

Ebenso folgt

$$\mathfrak{Tr}_y = \tfrac{1}{5}M(c^2+a^2)$$
$$\mathfrak{Tr}_x = \tfrac{1}{5}M(b^2+c^2).$$

Für Abschnitte und Schichten u. s. w. von Ellipsoiden geht man auf die betreffenden Formeln für die Kugel zurück.

ζ) Trägheitsmomente für das Umdrehungsparaboloid. Für die Drehungsachse OZ findet man bei einer Begrenzung, wie in Fig. 508

$$\mathfrak{Tr}_z = \tfrac{1}{3}Mb^2.$$

Für eine Schwerpunktsachse, senkrecht zu OZ, gilt

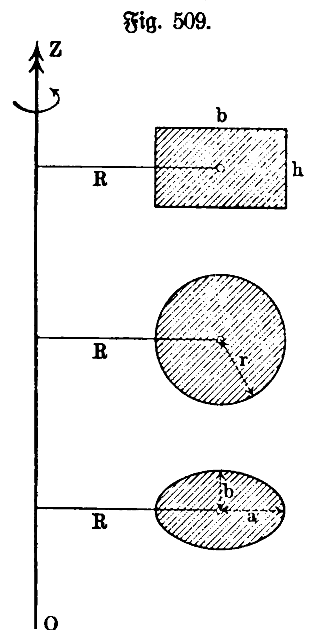
$$\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \tfrac{1}{6}M(b^2+\tfrac{1}{3}a^2).$$

η) Trägheitsmomente für Hyperboloide. Gemäß S. 457 sind die entsprechenden Formeln leicht herzustellen, zunächst für Umdrehungskörper, dann auch für dreiachsige.

ϑ) Trägheitsmomente für Ringe. Gemäß S. 668 findet man für den Ring des Rechtecks der Fig. 509

$$\mathfrak{Tr}_z = M(R^2+\tfrac{1}{4}b^2).$$

Fig. 509.



Ebenso gilt für den Kreis der Fig. 509

$$\mathfrak{Tr}_z = M(R^2+\tfrac{3}{4}r^2),$$

und für die Ellipse der Fig. 509

$$\mathfrak{Tr}_z = M(R^2+\tfrac{3}{4}a^2).$$

Für eine Schwerpunktsachse, senkrecht zu OZ, gilt für den Ring des Rechtecks

$$\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \tfrac{1}{8}M(4R^2+b^2+\tfrac{2}{3}h^2),$$

für den Kreis

$$\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \tfrac{1}{8}M(4R^2+5r^2),$$

und für die Ellipse

$$\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \tfrac{1}{8}M(4R^2+5b^2).$$

Fig. 510.

ι) Die Centrifugalmomente für einen rechteckigen Keil des geraden Kreiscylinders. Man findet bei einer Höhe h über der schraffierten Grundfläche der Fig. 510 (a. v. S.) ohne weiteres

$$D_y = D_x = \frac{2}{3\pi} M \,.\, rh.$$

Ferner ist

$$D_z = \frac{1}{2\pi} M \,.\, r^2.$$

101. Der elementare Bewegungszustand eines starren Körpers innerhalb einer beliebigen Bewegung. In der Phoronomie wurde nachgewiesen, daß sich jede Bewegung eines starren Körpers auf Folgen elementarer Verschiebungen und Drehungen bezw. elementarer Schraubungen zurückführen läßt. Wir wollen nun den elementaren Bewegungszustand eines starren Körpers (vergl. § 95) in dynamischer Hinsicht untersuchen. Behandelt man das System der Bewegungsgrößen $\mu[v]$, welches den einzelnen Punkten eines materiellen Systemes entspricht, wie ein System von Kräften $\mu[j_G]$, welches in den einzelnen Punkten des materiellen Systemes angreift, so erhält man auch hier für einen beliebigen Zurückführungspunkt O eine Resultante, welche $[R_B]$ heißen, und ein resultierendes Moment, das $[Mo(B)]$ genannt werden mag. Die Vereinigung von $[R_B]$ und $[Mo(B)]$, wofür wir, solange keine Verwechselungen zu befürchten sind, auch kurz $[R]$ und $[Mo]$ schreiben, führt dann ferner zu einer Centralachse und dem ihr entsprechenden Momente $[\mathfrak{Mo}(B)]$. Für den Fall, daß $R = 0$ ist, bestimmt schon $[Mo(B)]$ die Centralachse [1]).

1. Handelt es sich bloß um eine elementare Verschiebung, so ist bereits in § 48 auch für endliche Verschiebungen nachgewiesen, daß hier der Satz gilt: Die Bewegungsgröße eines starren materiellen Körpers ist bei Verschiebungen gleich der Bewegungsgröße seines Massen-

[1]) Dabei mag darauf aufmerksam gemacht werden, daß man von den Momenten von Vektoren in Bezug auf einen Punkt O sprechen darf, auch wenn diese Vektoren nicht in einer, auch den Punkt O enthaltenden Ebene liegen. Für einen Vektor $[AB]$ ist das Moment in Bezug auf O bestimmt, wenn man ihn in der Ebene betrachtet, welche durch ihn und durch O gelegt werden kann, es ist dem Werte nach gegeben durch die doppelte Fläche des Dreiecks OAB (vergl. Fig. 13) und hat in der Ebene einen bestimmten Drehungssinn. Errichtet man nun in O auf der Ebene OAB ein Lot vom Werte des Momentes und in dem Sinne, als wenn es sich um ein Kräftepaar handelte, so wird das Moment durch eine Richtungsstrecke dargestellt. Für n Vektoren bilden sich in O also n solche Richtungsstrecken. Diese sind genau dieselben, als wenn es sich um die entsprechenden Vektorenpaare handelte, die für O als Zurückführungspunkt auftreten würden. Ihre Vereinigung durch geometrische Addition ist erlaubt, wenn sie für die entsprechenden Vektorenpaare erlaubt ist, da diese ja stets so verschoben werden dürfen, daß für jedes Paar ein Vektor durch O geht und also keinen Beitrag für die Berechnung des Momentes liefert. Bildet man z. B. für O die Momente der Kräfte eines, einen starren Körper angreifenden Kräftesystemes und vereinigt man ferner die Richtungsstrecken dieser Momente durch geometrische Addition, so stimmt die so gewonnene Resultante überein mit dem Achsenmomente des resultierenden Paares, falls für dessen Bildung O als Zurückführungspunkt gedient hat.

mittelpunktes, in dem stets die gesamte Masse des Körpers verdichtet zu denken ist.

2. Handelt es sich bloß um eine elementare Drehung, so kann man die Achse der Drehung, für welche φ die Winkelgeschwindigkeit sein mag, als Z-Achse nehmen und senkrecht zu ihr eine XY-Ebene einführen, um $[R]$ und $[Mo]$ zu berechnen. Diese Rechnung können wir in Bezug auf die Betrachtung, welche Fig. 216 entspricht, ersparen, wenn wir in den dort gewonnenen Formeln erst $\varphi = 0$ setzen und dann φ für ι einführen, da in unserem Falle $K_N = 0$ und $K_T = \mu v = \mu r \varphi$ ist. Man hat dann für das System, gemäß den Gleichungen Nr. 107 a) und 107 b)

$$\begin{array}{ll} X = -\varphi M \eta & M_x = +\varphi D_y \\ Y = +\varphi M \xi & M_y = +\varphi D_x \\ Z = 0 & M_z = -\varphi \mathfrak{T} r_z . \end{array}$$

Demgemäß ist $R = \varphi M \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \varphi M \varrho$, falls man den Abstand des Massenmittelpunktes von der Achse wieder mit ϱ bezeichnet.

Demgemäß ist ferner $Mo = \varphi \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + \mathfrak{T} r_z^2}$.

Der Winkel ω zwischen $[R]$ und $[Mo]$ ist gegeben durch

$$\cos \omega = \frac{+\xi D_x - \eta D_y}{\varrho \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + \mathfrak{T} r_z^2}}$$

und also $\mathfrak{Mo}$ durch

$$\mathfrak{Mo} = \frac{\varphi}{\varrho}(+\xi D_x - \eta D_y).$$

Man sieht, daß $[R]$ auf der Ebene senkrecht steht, welche durch die Achse und durch den Massenmittelpunkt geht; der Wert von $[R]$ stimmt überein mit der Bewegungsgröße des Massenmittelpunktes, so daß R nur verschwindet ($\varrho = 0$), wenn der Schwerpunkt auf der Achse liegt. Würde man $[R]$ nach dem Massenmittelpunkte verschieben, so stellte es dessen, der gegebenen Drehung entsprechende Bewegungsgröße dar.

Der Neigungswinkel ν von $[Mo]$ gegen die Z-Achse wird bestimmt durch

$$\cos \nu = -\frac{\mathfrak{T} r_z}{\sqrt{D_x^2 + D_y^2 + \mathfrak{T} r_z^2}}.$$

Dieser Winkel ν wird nur 0^0 bezw. 180^0, wenn $D_x = 0$ und $D_y = 0$ ist, d. h. wenn die Deviationsmomente (Centrifugalmomente) bezw. für die YZ-Ebene und für die XZ-Ebene verschwinden, so daß also die Z-Achse, um welche die Drehung erfolgte, eine Hauptachse ist.

Soll sich nun der einmal gegebene elementare Bewegungszustand, welcher eine elementare Drehung um die Z-Achse ist, erhalten, so muß die $[R]$ entsprechende Verschiebung fortfallen und es muß außerdem $[Mo]$ um die Z-Achse drehen.

Zur Erhaltung des gegebenen Bewegungszustandes, in welchem schon infolge der Massenverteilung im allgemeinen die Bedingungen seiner Veränderung liegen, ist also erforderlich, daß die Drehungsachse durch den Massenmittelpunkt ($\varrho = 0$) geht und eine Hauptachse ($D_x = 0$,

$D_y = 0$) ist, d. h. sie muß eine Hauptachse des Massenmittelpunktes sein. Da $[R]$ auf der Ebene senkrecht steht, welche durch die Achse und den Massenmittelpunkt geht, so steht auch die Centralachse, welcher die, sich aus dem gegebenen Bewegungszustande entwickelnde elementare Schraubung entspricht, auf dieser Ebene senkrecht. Das Moment für die Centralachse wird Null, abgesehen von dem Sonderfalle $\xi D_x = \eta D_y$, falls zugleich $D_x = 0$ und $D_y = 0$ ist, ohne daß zugleich $R = 0$ ist, d. h. bei der Drehung um eine Hauptachse, welche nicht durch den Schwerpunkt geht. Ist $D_x = 0$, $D_y = 0$ und $\varrho = 0$, so erscheint Mo in der Form $\frac{0}{0}$, während sein wahrer Wert $M_z = -\varphi \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z$ ist.

Die XY-Ebene kann man sich stets durch den Massenmittelpunkt gelegt denken und zwar so, daß eine Achse, etwa die X-Achse (positiv), durch den Massenmittelpunkt geht. Führt man noch im Massenmittelpunkte die Gegenkräfte $[R_0]$ und $[\overline{R_0}]$ vom Werte R ein, so tritt für den Massenmittelpunkt als Zurückführungspunkt $[R_0]$ auf neben einem Momente $[Mo_0]$. Letzteres setzt sich zusammen aus dem Momente $[Mo]$ und aus dem Momente vom Werte $\varrho \,.\, R$, welches in der XY-Ebene der gegebenen Drehung entgegen wirkt. Setzt man die Komponente $[M_z]$ von $[Mo]$ mit $[\varrho \,.\, R]$ zusammen, so erhält man $-\varphi \,.\, \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z + \varrho \,.\, R = -\varphi(\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z - M\varrho^2) = -\varphi \,.\, (\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z)_0$, falls man das Trägheitsmoment für die Gerade durch den Massenmittelpunkt, welche der Drehungsachse parallel ist, durch $(\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z)_0$ bezeichnet (vergl. Formel Nr. 198). Legt man durch den Massenmittelpunkt ein Koordinatenkreuz $X'Y'Z'$, welches eine Verschiebung des zuerst benutzten darstellt, so bleiben z und y unverändert, während x in $x' + \varrho$ übergeht. Für das neue System bleibt also D_x ungeändert, während

$$D_y = \Sigma \mu x z = \Sigma \mu z (x' + \varrho) = \Sigma \mu x' z + \varrho \Sigma \mu z = \Sigma \mu x' z$$

ist, so daß also die anderen beiden Komponenten von $[Mo]$ ebensowohl durch $+\varphi D_y$ und $+\varphi D_x$ als auch durch $+\varphi (D_y)_0$ und $+\varphi (D_x)_0$ bezeichnet werden dürfen, wenn letztere Größen sich wieder auf das Achsenkreuz durch den Schwerpunkt beziehen. Demnach ist $[Mo_0]$ genau so aus den Komponenten $-\varphi(\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z)_0$, $+\varphi(D_x)_0$, $+\varphi(D_y)_0$ zu bilden, wie $[Mo]$ aus den Komponenten $-\varphi \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z$, $+\varphi D_x$, $+\varphi D_y$. Legt man also durch den Massenmittelpunkt eine Gerade, parallel zur Drehungsachse, so ist das Moment für den Massenmittelpunkt als Zurückführungspunkt genau so zu berechnen, als wenn die Gerade durch ihn Achse wäre für eine, der gegebenen Drehung entsprechende Drehung (vergl. dazu Fig. 71 a). Rechnet man für diese Achse, so erhält man keine Resultante, da jetzt $\varrho = 0$ ist; dafür hat aber die Achsenverlegung schon die Verschiebung, entsprechend $[R_0]$, geliefert.

3. Handelt es sich endlich um eine elementare Schraubung, für welche die Geschwindigkeit in Richtung der Achse $[c]$ und die Winkelgeschwindigkeit um die Achse φ ist, so kommt zu den Größen $[R]$ und $[Mo]$ der vorigen Nummer noch die Größe $M[c]$ gemäß der Nr. 1 hinzu. Da diese im Massenmittelpunkte haftet, so ist es zweckmäßig, ihn in diesem Falle von vornherein als Zurückführungspunkt zu wählen. Man hat dann $[Mo_0]$ nach Nr. 2 zu bilden, während sich $[R]$ vom Werte $\varphi M \varrho$ und $M[c]$ zu $[M\sqrt{\varphi^2 \varrho^2 + c^2}]$ zusammensetzen, d. h. zu einer Resultante, welche der Schrau-

bung (c, φ) des Massenmittelpunktes entspricht. Diese Resultante liegt in der Ebene durch den Massenmittelpunkt, welche senkrecht zur Ebene durch die Achse und den Massenmittelpunkt verläuft.

Setzt man die gewonnenen Ergebnisse nach dem Vorgange von Poinsot zu dem Centralellipsoide in Beziehung, wobei man von vornherein den Massenmittelpunkt als Zurückführungspunkt zu wählen hat, so erhält man ein anschauliches Bild des ganzen Vorganges.

Zerlegt man $[\varphi]$ nach den Achsen des Centralellipsoides

$$\xi^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_\xi + \eta^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_\eta + \zeta^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_\zeta = C^2$$

in die Komponenten $[\varphi_\xi]$, $[\varphi_\eta]$, $[\varphi_\zeta]$, so haben die Deviationsmomente für die Drehungen, welche diesen Komponenten entsprechen, den Wert Null. Zerlegt man auch $[Mo_0]$ nach den Achsen in die Komponenten $[Mo_\xi]$, $[Mo_\eta]$, $[Mo_\zeta]$, so gilt also $Mo_\xi = \varphi_\xi \,.\, \mathfrak{Tr}_\xi$, $Mo_\eta = \varphi_\eta \,.\, \mathfrak{Tr}_\eta$, $Mo_\zeta = \varphi_\zeta \,.\, \mathfrak{Tr}_\zeta$, falls $[\varphi]$ und $[Mo_0]$ mit den positiven Halbachsen des Ellipsoides spitze Winkel bilden. Demnach läßt sich die Lage von $[Mo_0]$, dessen Wert durch $Mo_0^2 = M_\xi^2 + M_\eta^2 + M_\zeta^2$ bestimmt ist, gegen diese Halbachsen darstellen durch die Cosinus

$$\frac{Mo_\xi}{Mo_0} = \frac{\varphi_\xi \mathfrak{Tr}_\xi}{Mo_0}, \quad \frac{Mo_\eta}{Mo_0} = \frac{\varphi_\eta \mathfrak{Tr}_\eta}{Mo_0}, \quad \frac{Mo_\zeta}{Mo_0} = \frac{\varphi_\zeta \mathfrak{Tr}_\zeta}{Mo_0}.$$

Eine Gerade in der Richtung von $[\varphi]$, welche durch den Massenmittelpunkt geht, schneidet das Centralellipsoid in einem Punkte P, dessen Koordinaten $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ sich als

$$\frac{r\varphi_\xi}{\varphi}, \quad \frac{r\varphi_\eta}{\varphi}, \quad \frac{r\varphi_\zeta}{\varphi}$$

darstellen, falls sein Abstand vom Massenmittelpunkte durch r bezeichnet wird. Die Tangentialebene in P hat dann die Gleichung

$$\xi \varphi_\xi \mathfrak{Tr}_\xi + \eta \varphi_\eta \mathfrak{Tr}_\eta + \zeta \varphi_\zeta \mathfrak{Tr}_\zeta = \frac{C^2 \varphi}{r},$$

so daß die Cosinus der entsprechenden Normale in P für

$$\varphi_\xi^2 \mathfrak{Tr}_\xi^2 + \varphi_\eta^2 \mathfrak{Tr}_\eta^2 + \varphi_\zeta^2 \mathfrak{Tr}_\zeta^2 = Mo_0^2$$

durch

$$\frac{\varphi_\xi \mathfrak{Tr}_\xi}{Mo_0}, \quad \frac{\varphi_\eta \mathfrak{Tr}_\eta}{Mo_0}, \quad \frac{\varphi_\zeta \mathfrak{Tr}_\zeta}{Mo_0}$$

gegeben sind. Demnach hat $[Mo_0]$ die Richtung dieser Normalen, während die Ebene von $[Mo_0]$ der Tangentialebene parallel ist.

Fällt man von dem Massenmittelpunkte ein Lot (l) auf die Tangentialebene, so ist dieses bestimmt durch

$$l = \frac{C^2 \varphi}{r} \cdot \frac{1}{Mo_0},$$

d. h. man hat

$$Mo_0 = \frac{C^2 \varphi}{r l}.$$

Beachtet man noch, daß $[r]$ und die Tangentialebene in P einander konjugiert sind, so gelangt man also zu dem Ergebnisse: Die Ebene des Momentes $[Mo_0]$ ist parallel zu der Mittelebene des Centralellip-

soides, welche zur Richtung der gegebenen Drehungsachse konjugiert ist.

Trägt man im Massenmittelpunkte den Vektor $[\varphi]$ ein, so ist die Richtung von $[Mo_0]$ durch das Lot vom Massenmittelpunkte auf die Tangentialebene im Schnittpunkte des Ellipsoides mit $[\varphi]$ bestimmt. Der Wert des Momentes $[Mo_0]$ ist proportional zu der gegebenen Winkelgeschwindigkeit (φ) und umgekehrt proportional zu dem Produkte aus dem Abstande (l) des Massenmittelpunktes von jener Tangentialebene und dem Abstande (r) des Massenmittelpunktes von dem Berührungspunkte.

Soll die gegebene Drehungsachse dauernd Drehungsachse sein, so muß $[Mo_0]$ die Richtung der gegebenen Achse haben, d. h. der im Massenmittelpunkte eingetragene Vektor $[\varphi]$ muß Normale des Centralellipsoides sein, so daß die gegebene Drehungsachse eine Hauptachse des Ellipsoides ist. Nennt man den äußeren Vorgang, welcher der Erzeugung einer Bewegungsgröße entspricht, einen Stoß, so kann man den Kern der ganzen Betrachtung auch so ausdrücken: Ein Stoß muß durch den Massenmittelpunkt gehen, wenn eine Verschiebung entstehen soll; ein Stoßpaar (entsprechend einem Kräftepaare) muß senkrecht zu einer Hauptachse liegen, wenn die Achse der Drehung auf seiner Ebene senkrecht stehen soll.

Denkt man sich Kräfte aus unendlich-kleinen Stößen, welche den einzelnen aufeinander folgenden Zeitelementen entsprechen, zusammengesetzt und dehnt man diese Anschauung auch auf Kräftepaare aus, so sieht man, daß Entsprechendes auch für Kräfte und Kräftepaare gilt.

102. Allgemeine Sätze über die Bewegung eines materiellen Systems. Für die weitere Untersuchung der Bewegungen eines starren Körpers sind noch einige Sätze von Bedeutung, die überhaupt für materielle Systeme gelten, also auch im besondern für Systeme starrer Körper.

Da nämlich nach dem Principe der Paarwirkung die inneren Kräfte jedes materiellen Systems in jedem Zeitpunkte im Gleichgewichte stehen, so heben sich diese in jedem Zeitpunkte auf, mag das System ein starrer Körper sein oder nicht.

Da das System der inneren Kräfte im besondern aus Paaren von Gegenkräften besteht, so steht es übrigens nicht bloß im Gleichgewichte, wenn jede seiner Kräfte an dem Punkt wirkt, an dem sie thatsächlich zur Geltung kommt, sondern auch dann, wenn man alle Kräfte des Systems als Vektoren an einen Punkt versetzt denkt.

Dieser Satz, dessen Verallgemeinerung leicht zu übersehen ist, läßt sich natürlich nicht umkehren.

Solange man die Betrachtung auf einen bestimmten Zeitpunkt beschränkt, ist also die besondere Art der Verbindung der Atome zu Körpern ohne Einfluß auf die Betrachtung. Man giebt dieser Einsicht wohl auch den Ausdruck, daß man sich jedes materielle System für einen Augenblick erstarrt denken und nun auf dieses starre System die Gesetze starrer Körper anwenden darf.

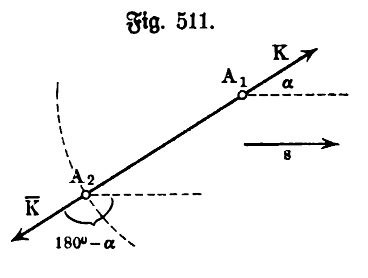
Sobald man aber die Betrachtung auf ein Zeitelement ausdehnt oder auf eine endliche Zeitdauer, wird die besondere Art der Verbindung der Atome zu Körpern von großem Einflusse.

Dies tritt z. B. bei der Berechnung der Arbeit ein, in welcher die Betrachtung zum mindesten auf ein Zeitelement ausgedehnt werden muß. In diesem Falle verschwindet die Arbeit der inneren Kräfte, obwohl diese für jeden Zeitpunkt in Paare von Gegenkräften zerfallen, im allgemeinen durchaus nicht für ein Zeitelement, weil sich in diesem sowohl die Angriffspunkte jedes Paares gegeneinander verschieben können, als auch Änderungen nach Wert und Richtung eintreten können.

Das Verschwinden der Arbeit der inneren Kräfte ist also an besondere Bedingungen über den Bau des Systems gebunden, nur für einen starren Körper verschwindet sie stets.

Betrachtet man nämlich zwei Punkte A_1 und A_2 eines starren Körpers bei irgend einer Bewegung desselben, so kann man diese Bewegung darstellen als eine, auf A_1 bezogene Verschiebung und als eine Drehung um eine durch A_1 gehende Achse. Da sich die Länge $A_1A_2 = l$ nicht ändert, so ist die Arbeit von veränderlichen Gegenkräften in A_1 und A_2 für eine Verschiebung Null, weil sie, wie Fig. 511 zeigt, stets als $Ks[\cos\alpha + \cos(180^0 - \alpha)]$ erscheint. Ebenso ist sie für die Drehung Null, weil $[K]$ stets durch A_1 geht und $\bar{K}$ stets senkrecht zu seiner Bahn steht.

Fig. 511.



Diese Betrachtung gilt für je zwei Punkte des starren Körpers, falls man dessen Bewegung, immer dem gewählten Punktpaare entsprechend, als Verschiebung und Drehung darstellt.

Im folgenden sollen nun vier Sätze abgeleitet werden, bei welchen die Eigenart der inneren Kräfte eines beliebigen materiellen Systems (als Gegenkräfte) eine Rolle spielt.

Vorher aber muß noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß auch das Princip von d'Alembert, welches im § 66 abgeleitet wurde, ganz allgemein für materielle Systeme gilt, da bei seiner Ableitung nur vorausgesetzt wurde, daß die inneren Kräfte im Gleichgewichte stehen.

Dieses Princip sagt aus, daß die Effektivkräfte, welche aus der Bewegung berechnet werden müssen, und die äußeren, das materielle System angreifenden Kräfte, stets gleichwertig sind in Bezug auf die Bildung einer Resultante und eines Kräftepaares.

Ersetzt man die Kräfte des einen Systems durch ihre Gegenkräfte, so steht dieses System der Gegenkräfte natürlich mit dem anderen Systeme im Gleichgewichte, so daß auf dieses zusammengesetzte System alle Sätze des Gleichgewichtes angewandt werden können, unter anderem auch das Princip der virtuellen Verrückungen (vergl. S. 482).

Es zeigt sich hier wieder, daß der Kernpunkt des Principes von d'Alembert die Anerkennung der Thatsache ist, daß statische Kraft nichts anderes ist als ge-

hemmte kinetische Kraft bezw. daß kinetische Kraft nichts anderes ist als entwickelte oder frei gewordene statische Kraft, d. h. es weist hin auf die Gleichwertigkeit kinetischer und statischer Kräfte (vergl. S. 10 u. f.).

1. **Der Massenmittelpunkt als kinetisches Centrum.** Die Gleichungen Nr. 66), welche zur Bestimmung der Koordinaten des Massenmittelpunktes dienen, lassen sich auch bei einem in Bewegung befindlichen Körper in jedem Zeitpunkte in Bezug auf die augenblickliche Stellung des Körpers anwenden.

Zur Zeit t mögen die Koordinaten der einzelnen materiellen Punkte durch x_p, y_p, z_p und die des Schwerpunktes durch x, y, z bezeichnet werden, zur Zeit $t' = t - \tau$ bezw. durch x'_p, y'_p, z'_p und x', y', z'.

In Bezug auf die YZ-Ebene z. B. gelten dann für die Zeitpunkte t' und t bezw. die Gleichungen

$$\mu_1 x'_1 + \mu_2 x'_2 + \cdots = M \,.\, x'$$
$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots = M \,.\, x.$$

Die Differenz beider Gleichungen giebt nach Division durch τ

$$\mu_1 \frac{x_1 - x'_1}{\tau} + \mu_2 \frac{x_2 - x'_2}{\tau} + \cdots = M \frac{x - x'}{\tau}.$$

Bezeichnet man die Komponenten der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte nach den Achsen zur Zeit t durch $v_p^{(x)}$, $v_p^{(y)}$, $v_p^{(z)}$ und die des Schwerpunktes durch $v^{(x)}$, $v^{(y)}$, $v^{(z)}$, so gilt für $\lim \tau = 0$

$$\mu_1 v_1^{(x)} + \mu_2 v_2^{(x)} + \cdots = M \,.\, v^{(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 229)$$

Entsprechende Gleichungen gelten in Bezug auf die ZX-Ebene und die XY-Ebene. Faßt man die Bewegungsgrößen wieder als Vektoren auf, so sprechen diese Gleichungen den Satz aus: **Die (algebraische) Summe der Komponenten der Bewegungsgrößen der einzelnen materiellen Punkte nach einer bestimmten Richtung ist gleich der, dieser Richtung entsprechenden Komponente der Bewegungsgröße des Massenmittelpunktes, falls man in diesem die gesamte Masse vereinigt denkt.**

Um diese (algebraische) Summe zu bilden, kann man sich die Bewegungsgrößen der einzelnen Punkte als Vektoren an *einen* Punkt versetzt denken und sie an diesem wie Kräfte behandeln: die Resultante dieser Vektoren liefert die drei Komponenten in Richtung der Achsen, welche bezw. $M \,.\, v^{(x)}$, $M \,.\, v^{(y)}$, $M \,.\, v^{(z)}$ darstellen.

Versetzt man also die Bewegungsgrößen der einzelnen Punkte als Vektoren an *einen* bestimmten Punkt, zu dem man auch den Massenmittelpunkt wählen kann, so giebt ihre geometrische Summe (Resultante) die Bewegungsgröße des Massenmittelpunktes als Vektor.

Betrachtet man die Beziehung der Gleichung Nr. 229) für zwei Zeitpunkte $t' = t - \tau$ und t, so führt ein Grenzübergang, unter Einführung der Beschleunigungen, weiter zu der Gleichung

$$\mu_1 j_1^{(x)} + \mu_2 j_2^{(x)} + \cdots = M \,.\, j^{(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 230)$$

und zu den entsprechenden Gleichungen für die ZX- und die XY-Ebene.

Jetzt stehen auf der linken Seite die Komponenten der Effektivkräfte der einzelnen materiellen Punkte nach den Achsen, auf der rechten Seite die entsprechenden Komponenten der Effektivkraft des Massenmittelpunktes. Da für jeden materiellen Punkt (vergl. S. 233) die Effektivkraft aus der Vereinigung der Resultante $[A_p]$ der an ihm wirkenden äußeren Kräfte und der Resultante $[J_p]$ der an ihm wirkenden inneren Kräfte erwächst, so ist

$$\mu_p j_p^{(x)} = A_p^{(x)} + J_p^{(x)},$$

d. h. man hat auch

$$(A_1^{(x)} + A_2^{(x)} + \cdots) + (J_1^{(x)} + J_2^{(x)} + \cdots) = M \,.\, j^{(x)}.$$

Da sich nun bei jedem Körper die inneren Kräfte gegenseitig zerstören, so gilt auch noch

$$A_1^{(x)} + A_2^{(x)} + \cdots = M \,.\, j^{(x)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 231)$$

und die entsprechenden Gleichungen für die ZX-Ebene und für die ZY-Ebene.

Demnach spricht Gleichung Nr. 231) den Satz aus: Die (algebraische) Summe der Komponenten der äußeren, an den einzelnen materiellen Punkten angreifenden Kräfte nach einer bestimmten Richtung ist gleich der, dieser Richtung entsprechenden Komponente der Effektivkraft des Massenmittelpunktes.

Um diese (algebraische) Summe zu bilden, kann man sich die äußeren Kräfte der einzelnen Punkte als Vektoren an einen Punkt versetzt denken und sie an diesem zusammensetzen: die Resultante dieser Kräfte liefert dann drei Komponenten in Richtung der Achsen, welche bezw. $M \,.\, j^{(x)}$, $M \,.\, j^{(y)}$, $M \,.\, j^{(z)}$ darstellen.

Versetzt man also die äußeren Kräfte der einzelnen Punkte als Vektoren an einen bestimmten Punkt, zu dem man auch den Massenmittelpunkt wählen kann, so giebt ihre geometrische Summe (Resultante) die Effektivkraft $M \,.\, [j]$ des Massenmittelpunktes, d. h. die Beschleunigung des Massenmittelpunktes ist stets so gebildet, als wenn die äußeren Kräfte der einzelnen materiellen Punkte an ihm wirkten.

Hiermit sind die Sätze, in denen der Massenmittelpunkt bei Verschiebungen starrer Körper als dynamisches Centrum auftrat, sehr erweitert.

Benutzt man den Massenmittelpunkt als Zurückführungspunkt für das System der Bewegungsgrößen und für das System der äußeren Kräfte, welche den Körper angreifen, so bestimmen deren Resultanten die Bewegung des Massenmittelpunktes, während die resultierenden Paare die Schwenkung um den Massenmittelpunkt bestimmen.

Man zerlegt infolgedessen bei kinetischen Betrachtungen die Bewegung eines Körpers meist in die Bewegung seines Massenmittelpunktes und in die Schwenkung um diesen.

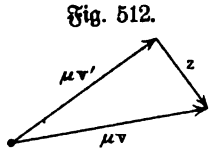
2. Die Bewegungsgröße und der Kraftantrieb. Die Bewegung des Massenmittelpunktes eines materiellen Systems ist durch die Betrachtungen der Nr. 1 bestimmt, er bewegt sich so, als wenn die Bewegungsgrößen der einzelnen materiellen Punkte und die, an diesen wirkenden äußeren Kräfte an ihm aufträten. Damit ist die Möglichkeit gegeben, die Formeln

für die Bewegung eines materiellen Punktes auf die Bewegung des Massenmittelpunktes anzuwenden. Unter diesen hat die Formel für die Beziehung zwischen der Bewegungsgröße und dem Kraftantrieb nicht bloß für die Bewegung des Massenmittelpunktes, sondern auch für die Bewegung des ganzen Systems Bedeutung.

Jene Beziehung, bei welcher nur die Werte der Bewegungsgröße und des Antriebes der tangentialen Kraftkomponente berücksichtigt wurden, lautete (vergl. S. 247): Die Änderung der Bewegungsgröße ist gleich dem entsprechenden tangentialen Kraftantriebe.

Sie läßt sich erweitern, wenn man die Bewegungsgröße als Vektor auffaßt, wobei auch der Kraftantrieb als Vektor erscheint. Stellen nämlich in Fig. 512 die Vektoren $[\mu v']$ und $[\mu v]$ die Bewegungsgröße eines materiellen Punktes bezw. zur Zeit $t' = t - \tau$ und zur Zeit t dar, so ist der Vektor $[z]$ der entsprechende Kraftantrieb für $lim\, \tau = 0$, weil für $\mu = 1$ die Beziehung $lim \left[\frac{z}{\tau}\right] = [j_G]$ besteht. Dehnt man die Betrachtung der Fig. 512 auf eine Reihe von Zeitelementen aus, so vereinigen sich die Kraftantriebe $[z]$ durch geometrische Addition, d. h. es gilt: **Die Änderung der Bewegungsgröße als Vektor ist gleich dem entsprechenden Kraftantriebe als Vektor.**

Fig. 512.



Projiziert man Fig. 512 auf irgend eine Achse, so treten statt $[\mu v']$, $[\mu v]$ und $[z]$ deren Komponenten in Richtung dieser Achse auf, d. h. es gilt: **Die Änderung der Bewegungsgröße in Richtung irgend einer Achse ist gleich dem entsprechenden Kraftantriebe.**

Ist der betrachtete Punkt der Massenmittelpunkt eines materiellen Systems, so ist die Kraft der Bewegung die Resultante A aus den äußeren, an den Massenmittelpunkt versetzten Kräften des Systems. Bezeichnet man deren Komponente nach irgend einer Achse, die wir als X-Achse bezeichnen wollen, durch $A^{(x)}$, so ist der Kraftantrieb in Richtung der Achse für die Zeit t durch $t \,.\, A^{(x)}$ gegeben, falls $A^{(x)}$ innerhalb dieser Zeit konstant ist, sonst durch $\Sigma A^{(x)} \,.\, \tau$. Sind nun die Komponenten der Geschwindigkeiten des Massenmittelpunktes nach jener Achse zur Zeit o und zur Zeit t bezw. $v_0^{(x)}$ und $v^{(x)}$, so gilt also

$$Mv^{(x)} - Mv_0^{(x)} = \Sigma A^{(x)} \,.\, \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 232)$$

Da $Mv^{(x)}$ nach Nr. 1 darstellbar ist als $\mu_1 v_1^{(x)} + \mu_2 v_2^{(x)} + \cdots$, so läßt sich die Formel Nr. 232) folgendermaßen in Worte fassen: **Die Änderung der (algebraischen) Summe der Komponenten der Bewegungsgrößen der einzelnen materiellen Punkte nach einer bestimmten Richtung ist gleich dem, dieser Richtung entsprechenden Antriebe der Resultante der, an den Massenmittelpunkt versetzten äußeren Kräfte.**

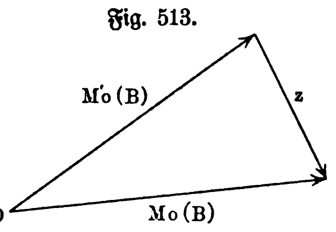
Man darf hier nicht von der Änderung der Bewegungsgröße des Systems sprechen, weil die Bewegungsgrößen in den einzelnen Punkten als Vektoren haften, während sie für die Berechnung der Komponentensummen an einen Punkt, z. B. an den Massenmittelpunkt, versetzt erscheinen.

Man kann dem abgeleiteten Satze auch die folgende Veranschaulichung geben. Projiziert man ein materielles System auf eine Achse, indem man der Projektion eines Punktes von der Masse μ gleichfalls die Masse μ giebt (vergl. S. 247), so gilt für die geradlinige Bewegung des projizierten Systems: Die (algebraische) Summe der Bewegungsgrößen der einzelnen Punkte ist gleich dem Antriebe der Resultante der, an den Massenmittelpunkt versetzten äußeren Kräfte.

Für den Sonderfall, daß keine äußeren Kräfte wirken, hat die (algebraische) Summe der Komponenten der Bewegungsgrößen der einzelnen materiellen Punkte nach einer bestimmten Richtung den Wert Null.

3. Das Moment der Bewegungsgröße und der Antrieb des Kraftmomentes. Bei der Zurückführung eines Kräftesystems auf eine Resultante und auf ein Paar für einen bestimmten Zurückführungspunkt O, konnte die Resultante so bestimmt werden, als wenn alle Kräfte an dem Punkte O in Wirkung wären, während bei der Bestimmung des Paares jede Kraft an ihrem thatsächlichen Angriffspunkte betrachtet werden mußte.

Fig. 513.



Die Sätze Nr. 1 und Nr. 2 entsprechen jener Resultantenbestimmung, sowohl in Bezug auf die Bewegungsgröße als Vektor, als auch in Bezug auf die Kraft als Vektor.

Jetzt soll noch ein äußerst wichtiger Satz abgeleitet werden, welcher der Bestimmung des resultierenden Paares entspricht, insofern als die Bewegungsgröße jedes materiellen Punktes dabei durchaus als ein, an ihm haftender Vektor angesehen und Gleiches auch für die auftretenden Kräfte vorausgesetzt wird.

Behandelt man das System der als Vektoren dargestellten Bewegungsgrößen wie ein System von Kräften, so entspricht dem Achsenmomente des resultierenden Kräftepaares ein Vektor, welcher das Moment der Bewegungsgröße des Systems als Richtungsgröße darstellt [1]) — für den Sonderfall eines starren Körpers ist er bereits als $[Mo(B)]$ in § 101 verwendet worden [2]).

Bildet man nun für ein beliebiges materielles System in den Zeitpunkten $t' = t - \tau$ und t die Momente der Bewegungsgröße des Systems, welche bezw. mit $[Mo'(B)]$ und $[Mo(B)]$ bezeichnet werden mögen, so stellt $[z]$ in Fig. 513 den Zusatz dar, welcher für die Überführung von $[Mo'(B)]$ in $[Mo(B)]$ innerhalb der Zeit τ erforderlich ist. Man wird $\frac{z}{\tau}$ als die mittlere Erzeugungsgeschwindigkeit des Momentes für die Zeit τ bezeichnen können, um ferner demgemäß die Erzeugungsgeschwindigkeit selbst für $lim\, \tau = 0$ zu bilden.

---

[1]) In ihrer „Theorie des Kreisels“ bezeichnen ihn die Herren Klein und Sommerfeld als „Impulsvektor“.

[2]) Vergl. dazu die Anmerkung auf S. 688.

Es liegt nahe, zu vermuten, daß diese Erzeugungsgeschwindigkeit in enger Beziehung zu dem Momente der wirkenden Kräfte steht.

Um diese Vermutung zu prüfen, wollen wir zunächst voraussetzen, daß sich alle Punkte des materiellen Systems in einer Ebene befinden.

Bezeichnet man für eine ebene Bewegung die Geschwindigkeiten eines Punktes zur Zeit $t' = t - \tau$ und zur Zeit t bezw. mit $[v']$ und $[v]$, die Lote auf diese Geschwindigkeiten (Arme) von irgend einem Punkte O der Ebene aus bezw. mit p' und p, die Beschleunigung zur Zeit t mit $[j_G]$ und den Arm für O mit q, so gilt gemäß Fig. 65

$$\frac{pv - p'v'}{\tau} = q \cdot j_G + \delta,$$

wobei δ eine Korrektur bedeutet, die für $\lim \tau = 0$ verschwindet.

Durch Multiplikation mit μ geht diese Gleichung über in

$$\frac{p(\mu v) - p'(\mu v')}{\tau} = q(\mu j_G) + \mu \delta.$$

Gehört der betrachtete Punkt einem System materieller Punkte an, so entsteht die Effektivkraft $\mu[j_G]$ durch Zusammensetzung aus der Resultante $[A]$ der äußeren Kräfte und der Resultante $[J]$ der inneren Kräfte, deren Arme bezw. a und b sein mögen, d. h. man hat in diesem Falle

$$\frac{p(\mu v) - p'(\mu v')}{\tau} = aA + bJ + \mu \delta.$$

Dabei bedeuten $p'(\mu v')$ und $p(\mu v)$ die Momente der Bewegungsgröße bezw. für die Zeitpunkte $t - \tau$ und t, so daß die linke Seite der Gleichung also die mittlere Erzeugungsgeschwindigkeit dieses Momentes für die Zeit τ darstellt.

Für $\lim \tau = 0$ erhält man, falls man die Erzeugungsgeschwindigkeit des Momentes der Bewegungsgröße mit $v_{Mo(B)}$ bezeichnet, die Beziehung

$$v_{Mo(B)} = aA + bJ \quad \ldots\ldots\ldots \quad 233)$$

Wendet man diese Gleichung auf ein System materieller Punkte an, welche in einer Ebene liegen, so hat die linke Seite der Gleichung zunächst die Gestalt

$$\frac{1}{\tau}[p_1(\mu_1 v_1) + p_2(\mu_2 v_2) + \cdots] - \frac{1}{\tau}[p'_1(\mu'_1 v'_1) + p'_2(\mu'_2 v'_2) + \cdots].$$

In jeder Klammer steht die (algebraische) Summe der Momente der Bewegungsgrößen der einzelnen Punkte, welche kurz als das Moment der Bewegungsgröße für das System bezeichnet werden mag, und zwar bezw. für die Zeitpunkte t und $t - \tau$.

Beim Grenzübergange bildet sich also für das System die Erzeugungsgeschwindigkeit des Momentes, welche mit $V_{Mo(B)}$ bezeichnet werden mag, d. h. man hat die Beziehung

$$V_{Mo(B)} = \Sigma a_p A_p + \Sigma b_p J_p.$$

Auf der rechten Seite steht die Momentensumme der äußeren Kräfte,

vermehrt um die Momentensumme der inneren Kräfte. Da letztere im Gleichgewichte stehen, so ist ihre Momentensumme Null, d. h. man hat

$$V_{Mo(B)} = \Sigma a_p A_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 234)$$

Für ein ebenes System hat die Größe $V_{Mo(B)}$ gemäß den Betrachtungen von Fig. 65 noch eine weitere Bedeutung, da $pv = 2V$ und $q \, . \, j_G = 2J$ ist, falls man durch V und J bezw. Flächengeschwindigkeit und Flächenbeschleunigung bezeichnet. Bildet man noch μV und μJ und nennt man diese Größen bezw. Massen-Flächengeschwindigkeit und Massen-Flächenbeschleunigung für den Punkt von der Masse μ, so kann man $\Sigma \mu_p V_p$ und $\Sigma \mu_p J_p$ bezw. als Massen-Flächengeschwindigkeit und Massen-Flächenbeschleunigung für das System bezeichnen, so daß also $V_{Mo(B)}$ zugleich die doppelte Massen-Flächenbeschleunigung für das System darstellt.

Die Gleichung Nr. 234) stellt nun für ebene Systeme den Satz vom Momente der Bewegungsgröße dar, welcher, namentlich in gewissen Sonderfällen, auch als Flächensatz bezeichnet werden kann. Er lautet in Worten: Die Erzeugungsgeschwindigkeit des Momentes der Bewegungsgröße, welche zugleich die doppelte Massen-Flächenbeschleunigung darstellt, ist in jedem Zeitpunkte gleich dem Momente der äußeren Kräfte.

Der gegebene Beweis gilt zunächst für ein System von abzählbaren Atomen, d. h. für ein Molekül, während seine Ausdehnung auf unendlich viele Atome noch die, bereits des öfteren angewandten weiteren Betrachtungen erfordert.

Um den Satz auf räumliche materielle Systeme auszudehnen, braucht man nur das betrachtete ebene System als Projektion eines räumlichen Systems aufzufassen; man muß dabei wieder (vergl. S. 247) der Projektion eines Punktes von der Masse μ gleichfalls die Masse μ zuschreiben und außerdem den Punkt O, welcher für die Ebene als Drehpunkt gewählt war, als Projektion eine Achse ansehen, die auf der Ebene senkrecht steht.

Projiziert man ein räumliches materielles System auf die drei Ebenen eines (rechtwinkeligen) Koordinatenkreuzes vom Anfangspunkte O, so liefern die Momente der Bewegungsgröße in den Projektionsebenen die Komponenten des Vektors, welcher das Moment der Bewegungsgröße des Systems für O als Zurückführungspunkt darstellt, ebenso wie die Kraftmomente in den Projektionsebenen die Komponenten des Vektors liefern, welcher das Moment des Systems der wirkenden Kräfte für O als Zurückführungspunkt darstellt.

Man kann dem abgeleiteten Satze, der für einen bestimmten Zeitpunkt gilt, auch leicht einen entsprechenden, für eine endliche Zeit geltenden Satz zur Seite stellen, gemäß den Betrachtungen auf S. 69 u. f., falls man den Begriff des Antriebes einer Kraft auf ein Kraftmoment Mo ausdehnt und darunter $\tau \, . \, [Mo]$ bezw. $\Sigma \tau \, . \, [Mo]$ versteht. Man erhält dann ohne weiteres die Beziehung: Die Änderung des Momentes der Bewegungsgröße innerhalb einer endlichen Zeit stimmt überein mit dem entsprechenden Antriebe des Momentes der äußeren Kräfte.

Die Bedeutung des abgeleiteten Satzes besteht darin, daß er eine Verallgemeinerung der bekannten Formel $\iota = \frac{Mo}{\mathfrak{Tr}}$ darstellt.

Sind die Winkelgeschwindigkeiten bei der Drehung um eine feste Achse für $t' = t - \tau$ und t bezw. φ' und φ, so gilt für die Bestimmung der Beschleunigung ι der Ansatz

$$lim \left[\frac{\varphi - \varphi'}{\tau}\right] = \iota.$$

Für einen Punkt im Abstande r von der Drehungsachse sind die entsprechenden Geschwindigkeiten bezw. $v' = r\varphi'$ und $v = r\varphi$. Wählt man nun die Drehungsachse des Körpers als Achse im Sinne des abgeleiteten Satzes, so ist $p = p' = r$, d. h. man hat hier

$$v_{Mo(B)} = lim \left[\frac{\mu r^2 \varphi' - \mu r^2 \varphi}{\tau}\right]_{\tau=0} = \mu r^2 \iota$$

und

$$V_{Mo(B)} = \Sigma \mu r^2 \iota = \iota \Sigma \mu r^2 = \iota \mathfrak{Tr}.$$

Da $V_{Mo(B)} = \Sigma a_p A_p$ ist, so gelangt man für $\Sigma a_p A_p = Mo$ zurück zu der Gleichung $\iota \,.\, \mathfrak{Tr} = Mo$.

Für Anwendungen ist es noch zweckmäßig, unter allen Ebenen durch einen Punkt O die Ebene zu bestimmen, für welche die Projektion eines räumlichen Systems materieller Punkte das größte Moment der Bewegungsgröße liefert.

Um diese Ebene zu bestimmen, betrachten wir zunächst die Momente eines Vektors $[AB]$ für Achsen, die durch einen Punkt O gehen, gemäß der ursprünglich (vergl. S. 316) für das Moment einer Kraft in Bezug auf eine Achse gegebenen Erklärung. Unter diesen Momenten entspricht offenbar das größte der Normalen derjenigen Ebene durch O, welche den Vektor in sich aufnimmt, und zwar wird der Wert dieses Maximalmomentes dargestellt durch die doppelte Fläche F des Dreiecks OAB, d. h. durch $2F$. Bildet eine andere Ebene durch O mit der Ebene des Maximalmomentes den Winkel α, so ist das Moment für ihre Normale $2F\cos\alpha$. Trägt man auf den Normalen beider Ebenen, welche den Winkel α bilden, die Richtungsstrecken auf, welche den Normalen entsprechen, so entsteht die zweite $(2F \,.\, \cos\alpha)$ durch Projektion der ersten $(2F)$. Denkt man also auf den Normalen aller Ebenen durch O die Richtungsstrecke der zugehörigen Momente von O aus aufgetragen, so bilden deren freie Endpunkte eine Kugel vom Durchmesser $2F$, für welche die Ebene durch O und $[AB]$ Tangentialebene ist. Kehrt man den Sinn des Vektors $[AB]$ um, so erhält man eine zweite Kugel, welche bezw. auf der anderen Seite jener Ebene liegt.

Bildet man nun in einem bestimmten Zeitpunkte für einen bestimmten Punkt O als Zurückführungspunkt das Moment der Bewegungsgröße eines materiellen Systems, dargestellt durch einen Vektor, so ist die Normalebene dieses Vektors durch O unter allen Ebenen durch O die Ebene des Maximalwertes jenes Momentes, d. h. unter den Projektionen des materiellen Systems auf die Ebenen durch O hat für O als Drehpunkt die Projektion

auf jene Ebene das größte Moment der Bewegungsgröße. Da aber das Moment der Bewegungsgröße der Massen-Flächengeschwindigkeit proportional ist, so ist auch diese für jene Ebene ein Maximum, d. h. in einem Zeitelemente, welches dem betrachteten Zeitpunkte entspricht, ist die erzeugte Massenfläche für jene Ebene ein Maximum.

Dieses Ergebnis kann man sich dadurch veranschaulichen, daß man O mit den einzelnen Punkten P des materiellen Systems verbunden denkt, so daß jeder Vektor OP in einem bestimmten Zeitelemente ein bestimmtes Flächenelement ω beschreibt, dem das Massen-Flächenelement $\mu\omega$ entspricht. Unter den Projektionen der Gesamtheit dieser Massen-Flächenelemente auf die Ebenen durch O ist die Projektion auf jene ausgezeichnete Ebene für das betrachtete Zeitelement ein Maximum. Vorausgesetzt ist dabei, daß der Sinn der Flächenerzeugung für jeden projizierten Punkt, entsprechend den Momenten, genau beachtet wird, so daß etwa bei einer Erzeugung, welche der Uhrzeigerbewegung entspricht, die Fläche als positiv angesetzt wird, bei der umgekehrten Erzeugung als negativ. Hat im besondern das Moment der äußeren Kräfte für O den Wert Null, was z. B. eintritt, wenn diese eine durch O gehende Resultante haben, wie es bei der Centralbewegung der Fall ist, so hat auch die Erzeugungsgeschwindigkeit des Momentes bezw. die Massen-Flächenbeschleunigung den Wert Null. In diesem Falle ist das Moment der Bewegungsgröße, das zugleich die Massen-Flächengeschwindigkeit darstellt, für jede bestimmte Ebene durch O eine Konstante, d. h. die Massenfläche selbst wächst proportional zur Zeit. In diesem Falle wechselt die oben bestimmte Maximalebene durch O nicht von Zeitpunkt zu Zeitpunkt ihre Lage, da ja jetzt der Vektor, welcher das Moment der Bewegungsgröße darstellt, unveränderlich ist, sie beharrt vielmehr durchaus im Raume, weshalb sie die unveränderliche Ebene des materiellen Systems (nach Laplace) für den Punkt O genannt wird.

Steht das System der äußeren Kräfte im Gleichgewichte, so gilt die für O durchgeführte Betrachtung für jeden Punkt des Raumes, d. h. für jeden bestimmten Punkt des Raumes als Drehpunkt giebt es ein bestimmtes konstantes Moment der Bewegungsgröße und eine bestimmte unveränderliche Ebene.

Wählt man verschiedene Punkte des Raumes als Drehpunkte, so gelangt man im allgemeinen für das Moment der Bewegungsgröße zu verschiedenen Ergebnissen, so daß auch die Lage der unveränderlichen Ebene im allgemeinen von Punkt zu Punkt wechselt.

Ruht der Massenmittelpunkt des Systems, so ist dieser Wechsel ausgeschlossen, d. h. in diesem Falle giebt es eine Richtung im Raume, deren Normalebenen sämtlich für jeden ihrer Punkte die Rolle einer unveränderlichen Ebene spielen.

Dasselbe ist für die Relativbewegung gegen den Massenmittelpunkt der Fall, falls sich dieser in Urbewegung befindet.

Wählt man nämlich zwei Punkte O und O' als Drehpunkte und legt durch sie parallele Kreuze, so daß für irgend einen Punkt des Systems $x = x' + a$, $y = y' + b$, $z = z' + c$ gilt, so ist z. B. die Komponente

des Momentes für die Z-Achse des ersten Kreuzes $M_z = \Sigma\mu(xv_y - yv_x)$ und für die des zweiten Kreuzes $M_z' = \Sigma\mu(x'v_y' - y'v_x')$.

Da $x = x' + a$ und $y = y' + b$ ist, so ist $v_x = v_x'$ und $v_y = v_y'$, d. h. man hat

$$xv_y - yv_x = x'v_y' - y'v_x' + av_y - bv_x$$

und demnach

$$M_z = M_z' + a\Sigma\mu v_y - b\Sigma\mu v_x.$$

Ist der Massenmittelpunkt in Ruhe, so ist seine Bewegungsgröße Null, d. h. $\Sigma\mu v_x$ und $\Sigma\mu v_y$ verschwinden und man hat $M_z = M_z'$ u. s. w. Ist der Massenmittelpunkt in Urbewegung, so ist seine Bewegungsgröße konstant, d. h. $\Sigma\mu v_x$ und $\Sigma\mu v_y$ sind Konstanten.

Man nennt den Satz über das Moment der Bewegungsgröße in dem besonderen Falle, in welchem das Moment der äußeren Kräfte verschwindet, wohl auch den „Satz von der Erhaltung der Flächen", weil hier in der Ebene, für welche die Betrachtung gilt, in gleichen Zeiten gleiche Massenflächen beschrieben werden.

4. Energie und Arbeit. Die Erweiterung des Satzes über Energie und Arbeit führt, gemäß den im Eingange gemachten Bemerkungen, zu einem wesentlich anderen Ergebnisse.

Für die Bewegung eines materiellen Punktes gilt (vergl. S. 247) der Satz: Die Änderung der Energie ist bei jeder Bewegung gleich der entsprechenden Arbeit.

Gehört der Punkt einem materiellen Systeme an, so ist seine Effektivkraft zusammengesetzt aus der Resultante $[A]$ der äußeren Kraft und der Resultante der inneren Kraft $[J]$. Bezeichnen wir die entsprechenden Arbeiten für die Zeit τ durch $\mathfrak{A}_A$ und $\mathfrak{A}_J$ und die Geschwindigkeiten zur Zeit $t - \tau$ und t bezw. durch $\bar{v}$ und v, so gilt demnach

$$\tfrac{1}{2}\mu v^2 - \tfrac{1}{2}\mu\bar{v}^2 = \mathfrak{A}_A + \mathfrak{A}_J$$

für die Zeit τ von beliebiger Dauer. Wendet man diesen Satz auf die materiellen Punkte eines Systems an, so erhält man

$$\Sigma\tfrac{1}{2}\mu_p v_p^2 - \Sigma\tfrac{1}{2}\mu_p\bar{v}_p^2 = \Sigma\mathfrak{A}_A + \Sigma\mathfrak{A}_J.$$

Nennt man die Summe linker Hand kurz die Energie des Systems bezw. zur Zeit $t - \tau$ und t und bezeichnet man sie dementsprechend durch E und $\bar{E}$, so gilt also allgemein:

$$E - \bar{E} = \Sigma\mathfrak{A}_A + \Sigma\mathfrak{A}_J \quad \ldots\ldots \quad 235)$$

Wird $\Sigma\mathfrak{A}_J = 0$, wie es für einen starren Körper stets der Fall ist, so gilt im besondern

$$E - \bar{E} = \Sigma\mathfrak{A}_A \quad \ldots\ldots\ldots \quad 236)$$

d. h. die Änderung der Energie für eine bestimmte Zeit ist gleich der, inzwischen von den äußeren Kräften geleisteten Arbeit.

Für das Zeitgebiet $0 \ldots t$ lautet die Formel

$$E - E_0 = \Sigma\mathfrak{A}_A.$$

Läßt sich $\Sigma\mathfrak{A}_A$ darstellen als Differenz zweier Potentialwerte, d. h. als

$-(U - U_0)$, wo U der Zeit t und U_0 der Zeit 0 entspricht, so gilt wieder (vergl. S. 252)

$$E + U = E_0 + U_0,$$

d. h. die Summe von Bewegungsenergie und Spannungsenergie ist eine Konstante (Satz von der Erhaltung der Energie).

Für beliebige Körper, bei denen gelegentlich auch $\Sigma \mathfrak{A}_J = 0$ sein kann, ist die letzte Betrachtung natürlich im allgemeinen nur gültig, falls sich $\Sigma \mathfrak{A}_A + \Sigma \mathfrak{A}_J$ als $-(U - U_0)$ darstellen läßt.

103. Allgemeine Charakteristik der Bewegung eines materiellen Systems. Während innerhalb der Phoronomie für die Darstellung der freien Bewegung eines starren Körpers die Auswahl des Körperpunktes, dessen Bahn die Leitlinie der Verschiebung bestimmt, durchaus gleichgültig ist, fordern die Betrachtungen der Dynamik, hierzu den Massenmittelpunkt zu wählen (vergl. S. 250), und zwar überhaupt für materielle Systeme. Will man eine möglichst klare Anschauung der freien Bewegung eines materiellen Systems in phoronomischer und in dynamischer Hinsicht gewinnen, so hat man den Massenmittelpunkt auszuzeichnen und dessen Bahn als Leitlinie für die Verschiebung des Körpers zu betrachten, so daß außerdem nur noch Drehungen um Achsen zu betrachten sind, welche durch den Massenmittelpunkt gehen.

Das System der Bewegungsgrößen, welche einem bestimmten Zeitpunkte entsprechen, giebt, an den Massenmittelpunkt versetzt, dessen augenblickliche Bewegungsgröße an, während das System der äußeren Kräfte, an ihn versetzt, seine Beschleunigung bestimmt. Dabei tritt der Massenmittelpunkt durchaus als ein materieller Punkt zweiter Art auf, in welchem die Masse des Systems vereinigt zu denken ist, so daß damit die Lehre vom materiellen Punkte unmittelbar auf ihn anwendbar ist.

Für die Beurteilung der Drehungen um den Massenmittelpunkt und der relativen Verrückungen der Atome gegen diesen leistet dann die Beziehung zwischen dem Momente der Bewegungsgröße und dem Momente der Kräfte (Flächensatz) ausgezeichnete Dienste.

Auch die Energie des materiellen Systems entspricht stets der angegebenen Zerlegung der Bewegung.

Bei solchen Untersuchungen, die sich nicht lediglich auf den Massenmittelpunkt beziehen, ist es zweckmäßig, in diesen ein Koordinatenkreuz zu legen und es mit ihm beweglich zu denken.

Bezieht man die Bewegung des Massenmittelpunktes auf ein unbeweglich gedachtes Koordinatenkreuz, so kann man das bewegliche Kreuz, dessen Anfangspunkt im Massenmittelpunkte liegt, stets zu dem unbeweglichen Kreuze parallel gelagert annehmen, so daß es gegen dieses eine Verschiebung ausführt, für welche die Bahn des Massenmittelpunktes Leitlinie ist.

Außer der Relativbewegung gegen das bewegliche Kreuz kommen dann nur dessen Verschiebungen in Frage, so daß hier die dritte Komponente der Beschleunigung, welche dem Satze von Coriolis entspricht (vergl. § 38), niemals auftritt.

Handelt es sich also nicht um eine gleichförmige Verschiebung mit gerader Führung, bei der ja für die Relativbewegung überhaupt keine besondere Beschleunigung einzuführen ist, so hat man (vergl. § 51) für jeden Punkt des Systems

$$[j_r] \overset{\times}{=} [j_G] \overset{\times}{+} [\overline{j_f}]$$

zu setzen, um dessen Relativbeschleunigung zu bestimmen. Dabei bedeutet $[j_G]$ die absolute Beschleunigung des Punktes und $[\overline{j_f}]$ die Gegenbeschleunigung der Führung, d. h. hier die Gegenbeschleunigung des Massenmittelpunktes. Bezeichnet $[j_M]$ die augenblickliche Beschleunigung des Massenmittelpunktes, so ist also in jedem Punkte die Ergänzungskraft $\mu [j_M]$ anzubringen, d. h. alle Ergänzungskräfte bilden in jedem Zeitpunkte ein System von Parallelkräften, dessen Resultante durch den Massenmittelpunkt geht. Nach Einführung dieser Kräfte darf man die Relativbewegung behandeln, als wenn sie eine absolute Bewegung wäre, also auch unter anderem die oben abgeleiteten Sätze auf sie anwenden.

Die Beziehungen zwischen der absoluten und der relativen Bewegung lassen sich (vergl. S. 144) in der Form

$$x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0, \quad z = \zeta + z_0$$

darstellen, wobei sich x, y, z auf das feste und ξ, η, ζ auf das bewegliche System beziehen, während x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Massenmittelpunktes sind.

Für die Berechnung der Bewegungsgröße bezw. des Kraftantriebes für die relative Bewegung gilt zunächst Folgendes. Bezeichnen ξ' und ξ die Stellungen eines materiellen Punktes in der X-Richtung bezw. zur Zeit $t - \tau$ und t, so entsteht die entsprechende Geschwindigkeit v_ξ durch einen Grenzübergang aus $\dfrac{\xi - \xi'}{\tau}$. Da aber $\Sigma \mu \xi = 0$ und $\Sigma \mu \xi' = 0$ ist, weil die X-Achse durch den Massenmittelpunkt geht, so ist auch $\Sigma \mu v_\xi = 0$, d. h. die Bewegungsgröße, bezogen auf das relative System, ist stets Null. Dasselbe gilt auch für den Kraftantrieb, der sich aus dem Kraftantriebe A für die absolute Bewegung und aus dem Kraftantriebe des Systems der Kräfte $\mu [\overline{j_M}]$ zusammensetzt. Ersterer ist, da der Massenmittelpunkt dynamisches Centrum ist, $M v_{x_0} - M v_{x_0}$, falls dessen Geschwindigkeiten für die X-Achse zur Zeit t und $t - \tau$ bezw. durch v_{x_0} und $\bar{v}_{x_0}$ bezeichnet werden; letzterer ist aber, falls die Beschleunigung des Schwerpunktes für die X-Achse mit j_{x_0} bezeichnet wird, durch $-\Sigma \mu j_{x_0} \tau$ gegeben. Da $j_{x_0} = lim \left[\dfrac{v_{x_0} - \bar{v}_{x_0}}{\tau}\right]_{\tau = 0}$ ist, so erhält er den Wert $-M v_{x_0} + M \bar{v}_{x_0}$.

Für die Berechnung des Momentes der Bewegungsgröße bezw. des Antriebes des Kraftmomentes müssen die Kräfte $\mu [\overline{j_M}]$ hinzugefügt werden, als wenn sie äußere Kräfte wären. Da es sich aber meist um Drehungsachsen handelt, welche durch den Massenmittelpunkt gehen und da das System der zugefügten Kräfte in jedem Zeitpunkte eine Resultante hat, welche durch den Massenmittelpunkt geht, so ist der Zusatz meist entbehrlich.

Dasselbe gilt stets für die Berechnung der relativen Arbeit, da die

Resultante der Ergänzungskräfte durch den Massenmittelpunkt geht, welcher ja für die Relativbewegung stets in Ruhe ist.

Für die weitere Berechnung dienen folgende Betrachtungen:

Das Moment der Bewegungsgröße ist z. B. in Bezug auf die Z-Achse bei der absoluten Bewegung

$$\Sigma \mu (x v_y - y v_x) = M_z.$$

Da aber $v_x = v_\xi + v_{x_0}$ ist u. s. w., so ist jedes Glied dieses Ausdruckes darstellbar als

$$(\xi + x_0)(v_\eta + v_{y_0}) - (\eta + y_0)(v_\xi + v_{x_0})$$

und man hat

$$M_z = \Sigma \mu (\xi v_\eta - \eta v_\xi) + (x_0 v_{y_0} - y_0 x_{x_0}) \, . \, \Sigma \mu$$
$$+ v_{y_0} \Sigma \mu \xi - v_{x_0} \Sigma \mu \eta + x_0 \Sigma \mu v_\eta - y_0 \Sigma \mu v_\xi.$$

Die letzten vier Glieder verschwinden, da ξ, η sich auf den Massenmittelpunkt beziehen, so daß man für $\Sigma \mu = M$ erhält

$$M_z = \Sigma \mu (\xi v_\eta - \eta v_\xi) + M (x_0 v_{y_0} - y_0 v_{x_0}),$$

d. h. das Moment der Bewegungsgröße im absoluten Systeme ist gleich dem Moment der Bewegungsgröße im relativen Systeme, falls man dieses um das entsprechende Moment des Massenmittelpunktes vermehrt.

Für die Energie gilt ebenso

$$\tfrac{1}{2} \mu v_x^2 = \tfrac{1}{2} \mu (v_\xi + v_{x_0})^2 = \tfrac{1}{2} \mu (v_\xi^2 + 2 v_\xi v_{x_0} + v_{x_0}^2)$$

und

$$\Sigma \tfrac{1}{2} \mu v_x^2 = \Sigma \tfrac{1}{2} \mu v_\xi^2 + v_{x_0} \Sigma \mu v_\xi + \tfrac{1}{2} v_{x_0}^2 \Sigma \mu.$$

Das Mittelglied ist wieder Null, so daß man für $\Sigma \mu = M$ erhält

$$\Sigma \tfrac{1}{2} \mu v_x^2 = \Sigma \tfrac{1}{2} \mu v_\xi^2 + \tfrac{1}{2} v_{x_0}^2 M.$$

Bildet man $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ und $w^2 = v_\xi^2 + v_\eta^2 + v_\zeta^2$ und auch $v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2 + v_{z_0}^2 = v_0^2$, so gilt also

$$\Sigma \tfrac{1}{2} \mu v^2 = \Sigma \tfrac{1}{2} \mu w^2 + \tfrac{1}{2} v_0^2 M,$$

d. h. die Energie im absoluten Systeme ist gleich der Energie im relativen Systeme, falls man diese um die Energie des Massenmittelpunktes vermehrt.

Ist das materielle System im besondern ein starrer Körper, so ist die Energie der Drehung um die betreffende Achse des Massenmittelpunktes $\frac{1}{2} \varphi^2 \mathfrak{T}\mathfrak{r}$, falls φ die entsprechende Winkelgeschwindigkeit und $\mathfrak{T}\mathfrak{r}$ das entsprechende Trägheitsmoment bezeichnen. Hat die Verschiebung die Geschwindigkeit $[c]$, so ist die gesamte Energie also

$$E = \tfrac{1}{2} M c^2 + \tfrac{1}{2} \varphi^2 \mathfrak{T}\mathfrak{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 237)$$

Unter die materiellen Systeme, auf welche sich unsere Sätze beziehen, gehören auch die Systeme von Körpern, die miteinander verbunden sind. Handelt es sich im besondern um die absolute oder relative Bewegung solcher Körpersysteme, so muß in Bezug auf die Verbindungsreaktionen und in Bezug auf die Reibungen stets von Fall

zu Fall überlegt werden, ob die Bedingungen für die inneren Kräfte, welche bei der Ableitung obiger Sätze eingeführt wurden, erfüllt sind oder nicht.

Den diesbezüglichen, beim Principe der virtuellen Verrückungen dargestellten Überlegungen fügen wir hier nur noch hinzu, daß die Reaktionen von festen Linien und Oberflächen, welche sich relativ bewegen, auf die Bewegung der Körper, zu welchen sie dabei relativ in Ruhe sind, keinen Einfluß haben.

104. Beispiele zu den Entwickelungen der §§ 102 und 103. Wenn alle Punkte eines materiellen Systems, welches nur inneren Kräften unterworfen ist, für ein Zeitelement in Ruhe sind, so bleibt der Massenmittelpunkt des Systems dauernd in Ruhe, denn er hat in Bezug auf jenes Zeitelement die Anfangsgeschwindigkeit Null und wird durch keine äußeren Kräfte angetrieben.

Die Bewegung des Systems um seinen Massenmittelpunkt läßt sich des weiteren folgendermaßen erläutern: Da das Moment der Bewegungsgröße für jeden Punkt als Zurückführungspunkt in einem Zeitelemente den Wert Null hat, so behält er für jeden Punkt dauernd den Wert Null. Projiziert man das System auf eine beliebige Ebene, so ist die Summe der Massenflächengeschwindigkeiten für jeden Punkt dieser Ebene als Drehpunkt dauernd Null, d. h. jeder Punkt der Ebene wird in jedem Zeitelemente von einem Teile der projizierten Punkte im Sinne des Uhrzeigers umlaufen, von einem Teile im umgekehrten Sinne und zwar so, daß obige Beziehung besteht.

Haben die Punkte eines Systems, das nur inneren Kräften unterworfen ist, zur Zeit t eine Bewegung, für welche das Moment der Bewegungsgröße nicht den Wert Null hat, so ist der Massenmittelpunkt des Systems entweder dauernd in Ruhe oder er befindet sich in Urbewegung.

Im ersten Falle ist das Moment der Bewegungsgröße für jeden Zurückführungspunkt ein Vektor von derselben Richtung und demselben Werte, so daß für das ganze System eine unveränderliche Ebene vorhanden ist.

Im zweiten Falle gilt dasselbe, falls man die Bewegung des Systems auf ein Kreuz bezieht, welches im Massenmittelpunkte haftet, d. h. wenn man die Bewegung des Systems betrachtet, relativ zur Bewegung des Massenmittelpunktes.

Treten äußere Kräfte hinzu, welche durch einen Punkt O im Endlichen gehen, so bestimmen diese, parallel mit sich an den Massenmittelpunkt des Systems versetzt, im Verein mit dessen Geschwindigkeit dessen Bewegung. Für den Punkt O ist das Moment der Bewegungsgröße eine Konstante, so daß für ihn eine unveränderliche Ebene vorhanden ist.

Rückt O ins Unendliche, so wird das System durch Parallelkräfte angegriffen, deren Moment für jede Achse, die der Richtung der Kräfte parallel ist, verschwindet. Hier ist also das Moment der Bewegungsgröße für jeden bestimmten Punkt eine bestimmte Konstante, solange man die Betrachtung auf Achsen beschränkt, welche den äußeren Kräften parallel sind. Projiziert man das System auf eine Ebene, senkrecht zur Richtung der äußeren Kräfte,

so ist das Moment der Bewegungsgröße demnach für jeden Drehpunkt in einer solchen Ebene eine Konstante. Beim Wechsel des Drehpunktes tritt wieder (vergl. S. 705) die Bewegungsgröße des Massenmittelpunktes bestimmend auf. Ist dessen Projektion auf die Ebene in Ruhe, so ändert sich das Moment der Bewegungsgröße in dieser nicht, d. h. dieses Moment ist konstant, falls der Massenmittelpunkt ruht oder sich parallel zu der Richtung der äußeren Kräfte bewegt.

Besteht die Bewegungskomponente des Massenmittelpunktes, senkrecht zur Richtung der äußeren Kräfte, in einer Urbewegung, so gilt die Betrachtung auch noch für die gesamte Bewegung, relativ zum Massenmittelpunkte.

Da für alle Körper in der Nähe der Erdoberfläche die gegenseitige Einwirkung mit der Erde nicht vernachlässigt werden kann, so passen für solche Körper im allgemeinen erst die zuletzt gemachten Annahmen über materielle Systeme, freilich auch dann nur, falls man alle Reibungen, die auftreten, vernachlässigt.

Beispiele für die zunächst besprochenen einfacheren Annahmen über materielle Systeme lassen sich nur gewinnen, wenn man Himmelskörper betrachtet, angenähert auch, wenn man irdische Körper heranzieht, die im Luftraume oder auf dem Wasser schwimmen oder auf wagerechten, absolut glatten Stützflächen ruhen. Ruht z. B. ein Wagen auf horizontalen Schienen oder ein Schiff auf dem Wasser oder ein Ballon im Luftmeere, so läßt sich der Massenmittelpunkt nicht durch innere Kräfte bewegen. Wirft man Ballast, z. B. Ziegelsteine bei einem damit vollgepackten Wagen, in bestimmter Richtung aus, so bewegt sich der Wagen in entgegengesetzter Richtung, weil der Massenmittelpunkt ruht. Beim Abfeuern eines Geschützes bleibt (abgesehen von den Vorgängen an der Zündmasse und dem Pulver) der Massenmittelpunkt von Geschütz und Geschoß in Ruhe, so daß dem Vorwärtsfliegen des Geschosses der Rückprall des Geschützes entspricht. Entsprechendes tritt bei dem Abbrennen einer Rakete ein, bei welcher die Masse des unten am Mundloche austretenden Zündsatzes einen Rückstoß des Raketenkörpers nach oben bewirkt.

Projiziert man die Bewegungsgrößen von Geschütz und Geschoß auf die Achse des Rohres, so hat diese Summe vor dem Abfeuern den Wert Null und muß also diesen Wert auch nach dem Abfeuern beibehalten, falls man alle Reibungen vernachlässigt. Für den Massenmittelpunkt von Geschütz (m_1) und Geschoß (m_2) bleibt also die Gleichung $m_1 v_1 + m_2 v_2$ bestehen, falls man die Massen von Zündkörper und Pulverladung vernachlässigt, so daß unter dieser Annahme die der Richtung nach entgegengesetzten Geschwindigkeiten [v_1] und [v_2] von Geschütz und Geschoß den Massen umgekehrt proportional sind. Thatsächlich ist der Rückstoß für das Geschütz etwas größer.

Handelt es sich um ein Sprenggeschoß, so verfolgt dessen Schwerpunkt auch nach dem Zerspringen seine parabolische Bahn. Erst in dem Augenblicke, in dem das erste Sprengstück aufschlägt, wird durch die Reaktion des Aufschlagens eine äußere Kraft in das System eingeführt, welche auch die Bahn des Schwerpunktes beeinflußt.

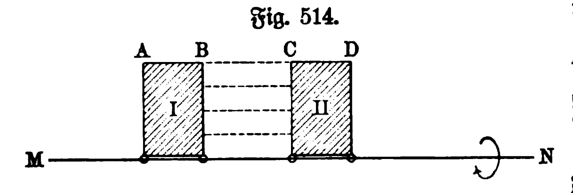
Solange das nicht der Fall ist, gilt für die Bewegungen der Spreng-

stücke, relativ zum Schwerpunkte, auch der Satz vom Momente der Bewegungsgröße.

Der Massenmittelpunkt unseres Sonnensystems muß, solange man das System der äußeren Kräfte, welches durch die Einwirkung der Fixsterne dargestellt wird, vernachlässigen darf, entweder in Ruhe sein oder sich gleichförmig bewegen. Da die Achsendrehung der Sonne und die Bewegungen der einzelnen Körper um die Sonne für den Mittelpunkt der Sonne als Zurückführungspunkt Bewegungen gleichen Sinnes darstellen, so ist das Moment der Bewegungsgröße für das System jedenfalls nicht Null, es ist entweder an und für sich oder wenigstens, relativ zu dem, im Inneren der Sonne gelegenen Massenmittelpunkte des Systems, eine Konstante. Senkrecht zu dem entsprechenden Vektor liegt die unveränderliche Ebene.

Wenn ein Körper des Systems sich infolge Abkühlung zusammenzieht, so wird das Moment der Bewegungsgröße für dessen Mittelpunkt als Zurückführungspunkt kleiner, so daß also gleichzeitig innerhalb des Systems Veränderungen auftreten müssen, durch welche dieser Verlust wieder ausgeglichen wird. Tritt der Ausgleich an demselben Körper auf, so steigert sich dessen Winkelgeschwindigkeit; bei einer Abkühlung der Erde würde sich also z. B. die Dauer des Tages vermindern.

Fig. 514.



Ein starrer Körper kann dem Flächensatze zufolge, falls nur innere Kräfte in Wirkung treten, wie z. B. bei einem Sprenggeschosse, keine Drehung um eine Achse beginnen, weil der Drehung einzelner Teile eine Gegendrehung anderer Teile entsprechen müßte, welche durch die Starrheit ausgeschlossen ist.

Bei einem System von zwei starren, durch elastische Schnüre verbundenen Körpern an einer Achse, wie es Fig. 514 andeutet, ist eine dem Flächensatze entsprechende Bewegung möglich, wenn sich zugleich z. B. I vor die Ebene der Zeichnung und II hinter die Ebene der Zeichnung dreht, wobei sich die Schnüre schraubenartig winden.

Betrachtet man Fig. 514 als das Schema eines fallenden Tieres, für welches I den Vorderkörper und II den Hinterkörper, MN den Rücken und $ABCD$ die Linie der Füße darstellen, so würde das Tier die Erde mit den Beinen erreichen können, wenn es sich in dem erläuterten Sinne schraubenartig zu verdrehen imstande wäre.

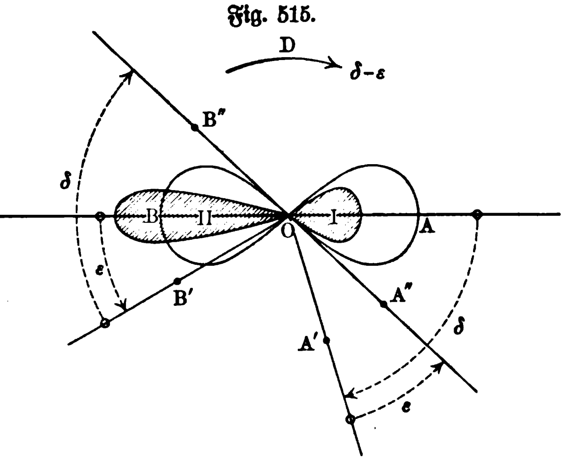
Auf Anregung der Pariser Akademie der Wissenschaften ist seit 1894 die Frage der Umdrehung fallender Tiere studiert [1]) worden. Katzen, die mit den Beinen nach oben an Schnüren aufgehangen wurden, kamen nach deren Zerstörung beim Fallen in einem dunklen Raume bei wechselnder Fallhöhe stets mit den Füßen auf den Boden. Da hierbei die Möglichkeit eines Abstoßes von festen Körpern ausgeschlossen wurde, so konnte die Bewegung der

[1]) Dabei hat die Aufnahme von Augenblicksbildern sehr gute Dienste geleistet.

fallenden Katze nicht mit einer, durch den Abstoß eingeleiteten Drehung beginnen, wie man früher angenommen hatte.

Den Vorgang der Drehung mag Fig. 515 erläutern, in der I und II zwei miteinander verbundene Körper darstellen, welche dem Vorderkörper und dem Hinterkörper eines Tieres entsprechen mögen. Wird bei der Drehung um eine Achse, die in O auf der Ebene der Zeichnung senkrecht steht, I auf den schraffierten Raum zusammengezogen, während zugleich II auf den schraffierten Raum ausgedehnt wird, so beschreibt die Gerade OA von I nach dem Flächensatze einen größeren Winkel als die Gerade OB von II, so daß die Teile I und II nach Ablauf einer gewissen Zeit die Stellung $A'OB'$ gegeneinander haben, wobei $\measuredangle AOA' > \measuredangle BOB'$ ist. Wird jetzt II zusammengezogen und I gedehnt, so geht bei Umkehr des Bewegungssinnes unter übrigens gleichen Umständen OB' in die Lage OB'' und OA' in die Lage OA'' über. Durch beide Bewegungen ist demnach die Gerade AOB in die Lage $A''OB''$ gelangt, d. h. der Körper hat im Sinne des Drehungspfeiles D eine Drehung um $\delta - \varepsilon$ vollführt.

Fig. 515.



Durch die Aneinanderreihung solcher Doppelbewegungen läßt sich natürlich eine halbe Umdrehung erzielen.

Ist durch einen Abstoß eine Drehung im Sinne des Pfeiles D eingeleitet, so läßt sich die Winkelgeschwindigkeit durch obiges Verfahren verstärken. Solche Beziehungen zeigt z. B. der salto mortale der Gymnastiker (Anziehen der Arme und Einziehen des Kopfes mit gleichzeitigem Strecken der Beine).

Vorstehendes erläutert die Drehung der Katze um eine Achse, welche auf der Symmetralebene des Körpers senkrecht steht.

Die Wendung kann aber auch durch eine Drehung der Symmetralebene selbst erfolgen.

Wenn die Katze ihren Schwanz mit großer Geschwindigkeit immer in demselben Sinne herumdreht, so muß der übrige Körper sich mit geringerer Geschwindigkeit im umgekehrten Sinne um seine Längsachse drehen.

Ein Gymnastiker, der auf einer horizontalen (reibungslos aufgelagerten) Drehscheibe stände, würde diese im Sinne eines Uhrzeigers drehen, wenn er mit einem Säbel oder Stabe über seinem Kopfe relativ rasche horizontal gelagerte Kreisbewegungen im umgekehrten Sinne ausführte und sich im übrigen ruhig verhielte.

Entsprechendes gilt für die Wendung eines Schiffes oder eines Ballons.

Mit vorstehendem sind die Möglichkeiten der Drehungen von Körpern unter dem Einflusse innerer Kräfte durchaus nicht erschöpft.

Dreht sich z. B. ein, in seiner Gondel stehender Luftschiffer rasch um seine Achse, so dreht sich der Ballon im umgekehrten Sinne; dasselbe ist der Fall, wenn er in der Gondel im Kreise umherläuft; statt des eigenen Körpers könnte er auch ein Rad mit senkrechter Achse benutzen.

Entsprechendes gilt für Fahrzeuge auf dem Wasser (geradlinige und kreisförmige Bewegung der Mannschaft).

Theorie der Schaukel, Einfluß der Meeresströmungen bei gleichem Sinne auf die Drehung der Erde u. s. w.

Die Ergebnisse der Betrachtungen bleiben auch bei Berücksichtigung der Reibung der Körper an Luft und Wasser bestehen, wenn auch in entsprechender Abschwächung.

Die Erläuterung dieser Vorgänge durch Versuche geschieht zweckmäßig an den Modellen von Elektromotoren, wie sie für den Unterricht in der Physik gebräuchlich sind [1]).

Innerhalb der Technik ist die Beachtung der vorstehenden allgemeinen Sätze namentlich wichtig bei der Bewegung von Maschinenteilen, wie sie bei Lokomotiven (Kompensation an den Triebrädern) und bei Schiffsmaschinen (Schlick scher Ausgleich) vorkommt, wo der entsprechende Rückstoß und das entsprechende Schwanken des Hauptkörpers möglichst vermieden werden muß.

105. **Die Schwenkung (Punktdrehung) eines starren Körpers.** Der Satz über das Moment der Bewegungsgröße (Flächensatz) gestattet nun, die Darstellung einer beliebigen Bewegung eines starren Körpers formell zum Abschlusse zu bringen, da er über die Schwenkung eines Körpers, d. h. die Drehung eines Körpers um wechselnde, durch einen bestimmten Punkt O des Körpers (z. B. dessen Massenmittelpunkt) gehende Achsen, die nötigen Aufschlüsse giebt.

Da sich jener Satz aber auf eine unbewegliche Achse (bezw. auf deren Normalebene) bezieht, so muß das, für eine bewegliche Achse berechnete Moment der Bewegungsgröße, stets für eine unbewegliche Achse umgerechnet werden. Denkt man das Moment als Vektor dargestellt, so hat man also stets den Vektor, welcher der beweglichen Achse entspricht, auf die unbewegliche Achse zu projizieren.

Wir wollen nun zunächst einen starren Körper betrachten, der sich um einen festen Punkt O bewegen kann, wie es etwa ein Kugelgelenk veranschaulicht.

Dreht sich der Körper in den Zeitpunkten t und $\bar{t} = t + \tau$ bezw. um die Achsen OA und $O\bar{A}$, die wir uns im Körper verzeichnet denken wollen, so haben diese Achsen im allgemeinsten Falle nur den Körperpunkt O gemeinsam.

Berechnet man das Moment der Bewegungsgröße zur Zeit t für die Achse OA und zur Zeit $t + \tau$ für die Achse $O\bar{A}$, um die Erzeugungsgeschwindigkeit des Momentes festzustellen, so kann man die Gerade ON im Raume,

[1]) Vergl. dazu Mach, Grundlinien der Lehre von den Bewegungsempfindungen.

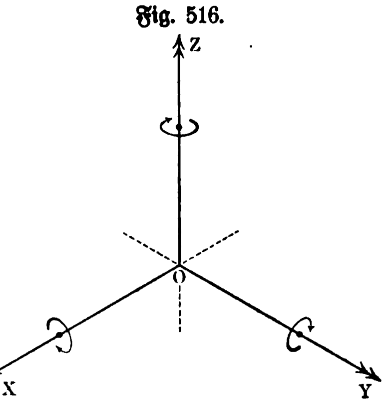
mit welcher OA zur Zeit t zusammenfällt, als unbewegliche Achse ansehen, muß aber dann das für $O\bar{A}$ berechnete Moment, da $O\bar{A}$ zur Zeit $t + \tau$ mit einer anderen Geraden $O\bar{N}$ im Raume zusammenfällt, auf jene Achse ON beziehen. Bezeichnet man die beiden Werte durch $Mo(B)$ und $\overline{Mo}(B)$ und den Winkel zwischen OA und $O\bar{A}$ mit α, so ist also

$$V_{Mo(B)} = lim \left[\frac{\overline{Mo}(B) \,.\, cos\,\alpha - Mo(B)}{\tau}\right]_{\tau = 0}.$$

Die Berechnung dieses Ausdruckes wird am einfachsten, wenn man die Momente $\overline{Mo}(B)$ und $Mo(B)$ als Vektoren auffaßt und sie nach drei Achsen zerlegt, welche im Körper fest sind.

Man muß dann die Stellung dieser Achsen zur Zeit t von der Stellung zur Zeit $t + \tau$ unterscheiden, in erster Hinsicht sollen sie, OA entsprechend, OX, OY, OZ heißen, in zweiter Hinsicht, $O\bar{A}$ entsprechend, $O\bar{X}$, $O\bar{Y}$, $O\bar{Z}$.

Fig. 516.



Wir betrachten diese Lagenänderung unter der Voraussetzung, daß τ ein Zeitelement ist.

Ist φ die Winkelgeschwindigkeit für die Achse OA zur Zeit t, so geht die zweite Lage des Körpers aus der ersten hervor, indem man das mit OA fest verbundene Kreuz $O(XYZ)$ um OA dreht, und zwar der thatsächlichen Drehung entsprechend, um den Arcus $\varphi\tau$. Zerlegt man diese unendlich-kleine Drehung in die Drehungen $\varphi_x\tau$, $\varphi_y\tau$, $\varphi_z\tau$ bezw. um OX, OY, OZ, so ist die gesuchte Lagenänderung leicht darstellbar.

Wählen wir im Kreuze $O(XYZ)$ diejenigen Halbachsen als positiv, für welche die thatsächliche Drehung um OA lauter positive Drehungen (im Sinne des Uhrzeigers) liefert, so gilt gemäß Fig. 516:

I. Bei der Drehung um OX als Achse:
   1. OX bleibt liegen,
   2. OY dreht sich in der YZ-Ebene um $\varphi_x\tau$ auf die negative Z-Achse zu,
   3. OZ dreht sich in der YZ-Ebene um $\varphi_x\tau$ auf die positive Y-Achse zu.

II. Bei der Drehung um OY als Achse:
   1. OY bleibt liegen,
   2. OZ dreht sich in der XZ-Ebene um $\varphi_y\tau$ auf die negative X-Achse zu,
   3. OX dreht sich in der XZ-Ebene um $\varphi_y\tau$ auf die positive Z-Achse zu.

III. Bei der Drehung um OZ als Achse:
   1. OZ bleibt liegen,

2. OX dreht sich in der XY-Ebene um $\varphi_z\tau$ nach der negativen Y-Achse zu,

3. OY dreht sich in der XY-Ebene um $\varphi_z\tau$ nach der positiven X-Achse zu.

Die neue Lage des Kreuzes $O(\overline{X}\overline{Y}\overline{Z})$ ist aus dieser Tabelle unmittelbar abzulesen.

Gegen OX ist $O\overline{X}$ gedreht gemäß II, 3 und III, 2, d. h. die Drehung besteht aus zwei aufeinander senkrechten Komponenten $[\varphi_y\tau]$ und $[\varphi_z\tau]$, so daß die gesamte Drehung, deren Lage durch II, 3 und III, 2 ohne weiteres gegeben ist, $\tau\sqrt{\varphi_y^2 + \varphi_z^2}$ beträgt.

Gegen OX ist $O\overline{Y}$ gedreht gemäß III, 3, d. h. die Drehung $\varphi_z\tau$ vermindert den Winkel YOX, der $\frac{\pi}{2}$ beträgt.

Gegen OX ist $O\overline{Z}$ gedreht gemäß II, 2, d. h. die Drehung $\varphi_y\tau$ vergrößert den Winkel ZOX, der $\frac{\pi}{2}$ beträgt.

Ebenso ergeben sich die (je drei) Drehungen gegen OY und OZ.

Das Moment der Bewegungsgröße $Mo(B)$ für die Achse OA, welches der Winkelgeschwindigkeit φ entspricht, erwächst aus den Momenten für die Achsen OX, OY, OZ folgendermaßen:

Nach § 101 liefert die φ_z entsprechende Drehung um die Z-Achse die Momente $M_x = \varphi_z D_y$, $M_y = \varphi_z D_x$, $M_z = -\varphi_z \,.\, \mathfrak{Tr}_z$, und Entsprechendes gilt für die anderen beiden Achsen.

Der Bau dieser Ausdrücke zeigt, daß es zweckmäßig ist, das Kreuz $O(XYZ)$, welches ja im Körper fest ist, mit den Hauptachsen des Punktes O zusammenfallen zu lassen.

In diesem Falle liefert die φ_z entsprechende Drehung um die Z-Achse nur das eine Moment $M_z = -\varphi_z \,.\, \mathfrak{Tr}_z$, weil die Deviationsmomente D_x und D_y dann den Wert Null haben; dabei bezieht sich das Zeichen von M_z auf den im § 101 gewählten Drehungssinn, während in unserem Falle zu setzen ist $M_z = +\varphi_z \,.\, \mathfrak{Tr}_z$. Entsprechendes gilt für die X-Achse und für die Y-Achse.

Das Moment $Mo(B)$ setzt sich also zusammen aus den drei Komponenten $M_x = \varphi_x \,.\, \mathfrak{Tr}_x$, $M_y = \varphi_y \,.\, \mathfrak{Tr}_y$, $M_z = \varphi_z \,.\, \mathfrak{Tr}_z$, so daß es stets nach Wert und Lage bestimmt werden kann.

Bezeichnet man die Winkelgeschwindigkeit für die Achse $O\overline{A}$, welche der Zeit $t + \tau$ entspricht, durch $\overline{\varphi}$, so erwächst das Moment $\overline{Mo}(B)$ ebenso aus den drei Komponenten $\overline{M}_x = \overline{\varphi}_x \,.\, \mathfrak{Tr}_x$, $\overline{M}_y = \overline{\varphi}_y \,.\, \mathfrak{Tr}_y$, $\overline{M}_z = \overline{\varphi}_z \,.\, \mathfrak{Tr}_z$.

Da sich die Momente $\overline{M}_x$, $\overline{M}_y$, $\overline{M}_z$ auf die Achsen $O\overline{X}$, $O\overline{Y}$, $O\overline{Z}$ beziehen, welche gegen die Achsen OX, OY, OZ um die vorher bestimmten Arcus gedreht sind, so muß nun $\overline{Mo}(B)$ für das Kreuz $O(XYZ)$ umgerechnet werden.

Diese Umrechnung entspricht der Projektion des auf $O\overline{A}$ abgetragenen Vektors $\overline{Mo}(B)$ auf OA bezw. auf die zu OA gehörigen Achsen OX, OY, OZ.

Statt dessen kann man auch die Komponente von $\overline{Mo}(B)$ nach den Achsen $O\overline{X}$, $O\overline{Y}$, $O\overline{Z}$ auf OA bezw. auf die zu OA gehörigen Achsen OX, OY, OZ projizieren.

Für die Projektion auf OX erhält man, gemäß der oben aufgestellten Tabelle der Arcus, zunächst

$$\overline{M}_x \,.\, \cos(\tau\sqrt{\varphi_y^2 + \varphi_z^2}) + \overline{M}_y \,.\, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_z\tau\right) + \overline{M}_z \,.\, \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_y\tau\right).$$

Da die ganze Entwickelung einer ersten Annäherung entspricht, so darf man noch $\cos(m\tau) = 1 - \frac{m^2\tau^2}{2} + \cdots$ und $\sin(m\tau) = m\tau - \frac{m^3\tau^3}{6} + \cdots$ in erster Annäherung einführen, ohne die einmal gewählte Genauigkeit zu stören.

Man erhält dann für obige Projektion

$$\overline{M}_x \,.\, 1 + \overline{M}_y \,.\, \varphi_z\tau - \overline{M}_z \,.\, \varphi_y\tau,$$

d. h.

$$\overline{\varphi}_x \,.\, \mathfrak{Tr}_x + \overline{\varphi}_y\varphi_z \,.\, \mathfrak{Tr}_y \,.\, \tau - \overline{\varphi}_z\varphi_y \,.\, \mathfrak{Tr}_z\tau.$$

Entsprechende Werte ergeben sich für die Projektion auf OY und auf OZ.

Für die Komponente des Momentes der Bewegungsgröße, welche in die Achse OX fällt, ist demnach die Erzeugungsgeschwindigkeit gegeben als

$$\lim\left[\frac{(\overline{\varphi}_x \,.\, \mathfrak{Tr}_x + \overline{\varphi}_y \,.\, \varphi_z \,.\, \mathfrak{Tr}_y \,.\, \tau - \overline{\varphi}_z\varphi_y\mathfrak{Tr}_z\tau) - \varphi_x\mathfrak{Tr}_x}{\tau}\right]_{\tau=0}$$

$$= \mathfrak{Tr}_x \,.\, \lim\left[\frac{\overline{\varphi}_x - \varphi_x}{\tau}\right]_{\tau=0} + \overline{\varphi}_y \,.\, \varphi_z \,.\, \mathfrak{Tr}_y - \overline{\varphi}_z \,.\, \varphi_y \,.\, \mathfrak{Tr}_z.$$

Bezeichnet man die Winkelbeschleunigung für die Drehung um die Achse OX durch ι_x und beachtet man, daß $\overline{\varphi}_x$ und φ_x, $\overline{\varphi}_y$ und φ_y, $\overline{\varphi}_z$ und φ_z für $\lim\tau = 0$ übereinstimmen, so erhält man schließlich für die Komponente in der Achse OX

$$\iota_x \,.\, \mathfrak{Tr}_x + \varphi_y\varphi_z(\mathfrak{Tr}_y - \mathfrak{Tr}_z).$$

Bezeichnet man nun die Komponente des Momentes der äußeren Kräfte für die Achse OX, welche mit der einen Hauptachse des Körpers zusammenfällt, durch $M_A^{(x)}$, so erhält man, unter Beifügung der entsprechenden Gleichungen für die Achsen OY und OZ,

$$\left.\begin{aligned} \iota_x \,.\, \mathfrak{Tr}_x + \varphi_y\varphi_z(\mathfrak{Tr}_y - \mathfrak{Tr}_z) &= M_A^{(x)} \\ \iota_y \,.\, \mathfrak{Tr}_y + \varphi_z\varphi_x(\mathfrak{Tr}_z - \mathfrak{Tr}_x) &= M_A^{(y)} \\ \iota_z \,.\, \mathfrak{Tr}_z + \varphi_x\varphi_y(\mathfrak{Tr}_x - \mathfrak{Tr}_y) &= M_A^{(z)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 239)$$

Vorstehende Gleichungen werden die Eulerschen Gleichungen genannt.

Bestimmt man die Komponenten des Momentes der äußeren Kräfte stets für die augenblickliche Lage der Hauptachsen des Körpers, mit denen das benutzte Kreuz $O(XYZ)$ ja zusammenfällt, so gelten die Betrachtungen in jedem Zeitpunkte t für die Zeitdauer von t bis $t + \tau$, d. h. allgemein.

Ist $\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = \mathfrak{Tr}_z = \mathfrak{Tr}$, so gehen die Eulerschen Gleichungen über in

$$\iota_x = \frac{M_A^{(x)}}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}, \quad \iota_y = \frac{M_A^{(y)}}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}, \quad \iota_z = \frac{M_A^{(z)}}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

Man hat also in diesem Falle, in welchem das Trägheitsellipsoid eine Kugel ist

$$\iota = \frac{M_A}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}},$$

d. h. man kommt zurück zu der Gleichung, welche für feste Achsen gilt.

Ist $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_x = \mathfrak{T}\mathfrak{r}_y$, so entspricht die dritte der Eulerschen Gleichungen der Gleichung für feste Achsen.

Haben in diesem Falle, in welchem das Trägheitsellipsoid ein Drehkörper mit der Achse OZ ist, die Momente der äußeren Kräfte den Wert Null, so daß also entweder gar keine Kräfte an dem Körper wirken oder nur solche, deren Resultante durch O geht, so vereinfachen sich die Eulerschen Gleichungen bedeutend.

Für $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_x = \mathfrak{T}\mathfrak{r}_y = A$ nehmen sie unter dieser Voraussetzung die Form an

$$1) \quad \iota_x A + \varphi_y \varphi_z (A - \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z) = 0$$

$$2) \quad \iota_y A + \varphi_z \varphi_x (\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z - A) = 0$$

$$3) \quad \iota_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z = 0.$$

Aus 3) folgt hier zunächst, daß $\iota_z = 0$ und daß also φ_z eine Konstante γ ist, d. h. die Winkelgeschwindigkeit für die Z-Achse ändert sich nicht.

Setzt man $\frac{A - \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}{A}\gamma = m$, so gehen die Gleichungen Nr. 1) und 2) über in

$$4) \quad \iota_x = -m\varphi_y,$$

$$5) \quad \iota_y = +m\varphi_x.$$

Für $A > \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z$, d. h. für ein verlängertes Umdrehungsellipsoid ist m positiv, für $A < \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z$, d. h. für ein verkürztes Umdrehungsellipsoid ist m negativ, für $A = \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z$, d. h. für eine Kugel als Umdrehungsellipsoid ist $m = 0$.

Denkt man sich φ_x und φ_y als Funktionen der Zeit t gegeben, so daß $\varphi_x = \varphi_x(t)$ und $\varphi_y = \varphi_y(t)$ geschrieben werden kann, so stellen die Ableitungen $\varphi_x'(t)$ und $\varphi_y'(t)$ bezw. die Größen ι_x und ι_y dar, d. h. man hat, entsprechend Nr. 4) und 5)

$$6) \quad \varphi_x' = -m\varphi_y,$$

$$7) \quad \varphi_y' = +m\varphi_x.$$

Bezeichnet man die Ableitungen von φ_x' und φ_y', d. h. die sogenannten zweiten Ableitungen von φ_x und φ_y bezw. durch φ_x'' und φ_y'', so ist auch gemäß Nr. 6) und 7)

$$8) \quad \varphi_x'' = -m\varphi_y' = -m^2\varphi_x,$$

$$9) \quad \varphi_y'' = +m\varphi_x' = -m^2\varphi_y.$$

Faßt man nun φ_x'' und φ_x bezw. als Beschleunigung und Stellung einer geradlinigen Bewegung auf, so ist für diese die Beschleunigung der Stellung proportional und zu ihr entgegengesetzt gerichtet, d. h. wir gelangen zu den Beziehungen, welche die harmonische Schwingung darbot. Dieser entsprechen nach den früheren Entwickelungen (vergl. S. 172) die Gleichungen

$$s = r \sin(mt) \quad \text{oder} \quad s = \bar{r} \cos(mt),$$

oder auch, bei einem anderen Anfangspunkte für die Zählung der Stellung, die Gleichung

$$s = r \sin(mt) + \bar{r} \cos(mt).$$

Demnach stellt diese Gleichung auch hier eine Lösung dar, und man hat entsprechend

$$10) \quad \varphi_y = a \sin(mt) + b \cos(mt),$$
$$11) \quad \varphi_x = c \sin(mt) + d \cos(mt).$$

Daß diese Lösung zugleich die allein mögliche ist, läßt sich durch weitergehende Betrachtungen zeigen, auf die wir hier verzichten.

Die Winkelgeschwindigkeiten für die X-Achse und für die Y-Achse sind also periodisch-veränderlich und zwar beträgt die Zeit T, welche einer vollen Schwingung entspricht, dem Anwachsen der Arcus mt um 2π, d. h. man hat $m(t + T) = mt + 2\pi$, so daß $T = \frac{2\pi}{m}$ oder

$$12) \quad T = \frac{2\pi}{\gamma} \cdot \frac{A}{A - \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}$$

ist.

Trägt man φ_x auf OX von O aus als Vektor auf, so beschreibt dessen Spitze eine harmonische Schwingung von der Dauer T, und Gleiches gilt für φ_y.

Trägt man φ_x und φ_y von O aus bezw. auf OX und auf OY auf, so beschreibt die Spitze des Vektors $[\varphi_x] \overset{\times}{+} [\varphi_y]$ demnach eine Ellipse, die im besonderen auch ein Kreis sein kann. Dieser Sonderfall liegt hier vor, wie die weitere Betrachtung zeigt.

Da $m = -\frac{\varphi_x'}{\varphi_y} = +\frac{\varphi_y'}{\varphi_x}$ ist, gemäß Nr. 6) und 7), so gilt auch

$$13\text{a}) \quad \varphi_y \varphi_y' + \varphi_x \varphi_x' = 0.$$

Stellt man

$$\varphi_y' = ma \cos(mt) - mb \sin(mt) \quad \text{und} \quad \varphi_x' = mc \cos(mt) - md \sin(mt)$$

her und bildet man 13a), so erhält man

$$13\text{b}) \quad \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2} \cdot \sin(2mt) + (ab + cd) \cdot \cos(2mt) = 0.$$

Soll diese Gleichung für jeden Wert von t erfüllt sein, so muß

$$14) \quad a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0 \quad \text{und} \quad ab + cd = 0$$

sein.

Wählt man a und b willkürlich, so muß man demnach $c = \pm b$ und $d = \mp a$ setzen. Für $c = -b$ und $d = +a$ hat man demnach

$$15) \quad \varphi_y = a \sin(mt) + b \cos(mt),$$
$$16) \quad \varphi_x = -b \sin(mt) + a \cos(mt).$$

Es ist zweckmäßig, a und b durch zwei andere Konstanten α und ε zu ersetzen und zwar folgendermaßen. Es geht

$$\varphi_y = a\left[sin(mt) + \frac{b}{a}\, cos(mt)\right]$$

für $\frac{b}{a} = tg\,\varepsilon$ über in $\varphi_y = \frac{a}{cos\,\varepsilon} \cdot sin(mt + \varepsilon)$.

Ebenso hat man

$$\varphi_x = a\left[cos(mt) - \frac{b}{a}\, sin(mt)\right] = \frac{a}{cos\,\varepsilon} \cdot cos(mt + \varepsilon).$$

Für $\frac{a}{cos\,\varepsilon} = \alpha$ ist also

$$17)\quad \varphi_y = \alpha\,.\, sin(mt + \varepsilon),$$

$$18)\quad \varphi_x = \alpha\,.\, cos(mt + \varepsilon).$$

Hätte man $c = +b$ und $d = -a$ gewählt, so hätte man entsprechende Ergebnisse erhalten.

Die Ellipse, welche dem Vektor $[\varphi_x] \overset{\times}{+} [\varphi_y]$ entspricht, ist hier also thatsächlich ein Kreis, da $\varphi_y^2 + \varphi_x^2 = \alpha^2$ ist.

Es ist also sowohl $\varphi_x^2 + \varphi_y^2$ als auch φ_z^2 konstant und demnach auch φ^2, da $\varphi^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 = \alpha^2 + \gamma^2$ ist.

Trägt man in O auf den Achsen bezw. φ_x, φ_y, φ_z von O aus ab, so bildet deren Resultante $[\varphi]$ mit OZ stets denselben Winkel λ, denn man hat

$$[\varphi_x] \overset{\times}{+} [\varphi_y] \triangleq [\alpha] \quad \text{und} \quad [\alpha] + [\gamma] \triangleq [\varphi].$$

Der Vektor $[\varphi]$, welcher zugleich die augenblickliche Drehungsachse darstellt, beschreibt also um die Achse OZ bei der Bewegung einen Kegel, dessen Öffnung λ gegeben ist durch $tg\,\lambda = \frac{\alpha}{\gamma}$.

Die Bewegung des Vektors ist gleichförmig, da der Endpunkt von $[\alpha]$ eine gleichförmige Kreisbewegung vollführt, wie Nr. 17) und 18) zeigen, deren Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\pi}{T} = \gamma\,\frac{A - \mathfrak{Tr}_z}{A}$ ist gemäß Nr. 12).

Der Kegel, den $[\varphi]$ beschreibt, schneidet das Trägheitsellipsoid in lauter gleichen Achsen, so daß $\mathfrak{Tr}$ für die Drehung einer jeden Achse konstant ist.

Dasselbe liefert auch die Gleichung für die Energie, da diese hier, wo die äußeren Kräfte eine durch O gehende Resultante haben, falls sie nicht ganz verschwinden, konstant ist und da man ihr den Wert $\frac{1}{2}\varphi^2\mathfrak{Tr}$ geben kann.

Da die Momente der äußeren Kräfte verschwinden, so hat hier das Moment der Bewegungsgröße $Mo(B)$ als Vektor eine feste Stellung im Raume und demnach ist auch eine unveränderliche Ebene vorhanden. Die Komponenten dieses Vektors sind hier $\varphi_x\mathfrak{Tr}_x = \varphi_x A$, $\varphi_y\mathfrak{Tr}_y = \varphi_y A$ und $\varphi_z\mathfrak{Tr}_z = \gamma\mathfrak{Tr}$, so daß seine Neigung gegen das Kreuz $O(XYZ)$ bestimmt wird durch die Cosinus

$$\frac{\varphi_x A}{Mo(B)},\quad \frac{\varphi_y A}{Mo(B)},\quad \frac{\gamma\mathfrak{Tr}_z}{Mo(B)}.$$

Geht man von diesem unbeweglichen Vektor aus, auf dem die unveränderliche Ebene senkrecht steht, so ist damit umgekehrt die Lage des Körpers $O(XYZ)$ gegen ihn bestimmt. Da der Cosinus des Winkels zwischen OZ

und diesem Vektor konstant ist, so beschreibt die Achse OZ im Raume einen gewöhnlichen Kegel, dessen Achse jener Vektor ist.

Der Winkel ω, den die augenblickliche Achse der Drehung mit diesem Vektor bildet, ist bestimmt durch

$$\cos\omega = \frac{\varphi_x}{\varphi}\cdot\frac{\varphi_x A}{Mo(B)} + \frac{\varphi_y}{\varphi}\cdot\frac{\varphi_y A}{Mo(B)} + \frac{\gamma}{\varphi}\cdot\frac{\gamma\mathfrak{Tr}_z}{Mo(B)}$$
$$= \frac{A(\varphi_x^2+\varphi_y^2)+\gamma^2\mathfrak{Tr}_z}{\varphi\,.\,Mo(B)} = \frac{A\alpha^2+\mathfrak{Tr}_z\gamma^2}{\varphi\,.\,Mo(B)},$$

d. h. ω ist konstant, so daß auch die augenblickliche Drehungsachse im Raume einen gewöhnlichen Kegel beschreibt, dessen Achse Normale der unveränderlichen Ebene ist. Die ganze Bewegung hat also folgenden Charakter: Der Körper dreht sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit φ um augenblickliche Drehungsachsen, welche im Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $\gamma\cdot\frac{A-\mathfrak{Tr}_z}{A}$ einen Kreiskegel beschreiben, dessen Achse OZ ist, und zwar sind beide Bewegungen gleichen Sinnes für $A > \mathfrak{Tr}_z$, d. h. für ein verlängertes und entgegengesetzten Sinnes für $A < \mathfrak{Tr}_z$, d. h. für ein verkürztes Umdrehungsellipsoid als Trägheitsellipsoid. Die augenblickliche Drehungsachse beschreibt im Raume gleichförmig einen Kreiskegel, dessen Achse auf der unveränderlichen Ebene senkrecht steht, und ein Gleiches gilt für OZ.

Geht man von der Kegelbewegung aus, die OZ im Raume beschreibt, so hat man aus der Bewegung von OZ und aus einer Drehung des Körpers um OZ auf die Lage der augenblicklichen Drehungsachse in diesem zu schließen.

Bezeichnet man den Winkel zwischen OZ und der Drehungsachse kurz durch $\sphericalangle(Z, D)$, den Winkel zwischen der Drehungsachse und der Normalen der unveränderlichen Ebene durch $\sphericalangle(D, N)$ und den Winkel zwischen dieser Normalen und OZ durch $\sphericalangle(N, Z)$, so ist

$$\cos(Z, D) = \frac{\gamma}{\varphi},\quad \cos(D, N) = \frac{A\alpha^2+\mathfrak{Tr}_z\gamma^2}{\varphi\,.\,Mo(B)},\quad \cos(N, Z) = \frac{\gamma\mathfrak{Tr}_z}{Mo(B)}.$$

Man sieht sofort, daß für $A > \mathfrak{Tr}_z$ $\cos(Z, D) > \cos(N, Z)$ und demnach $\sphericalangle(Z, D) < \sphericalangle(N, Z)$ ist, ebenso, daß sich $\cos(N, Z) < \cos(D, N)$ und demnach $\sphericalangle(N, Z) > \sphericalangle(D, N)$ ergiebt u. s. w.

Durch diese Betrachtung ist es leicht, die Schnitte der betrachteten Kegel in der unveränderlichen Ebene zu zeichnen, und dementsprechend die Bewegung übersichtlich darzustellen, wobei die Fälle $A > \mathfrak{Tr}_z$ und $A < \mathfrak{Tr}_z$ zu scheiden sind.

Man gelangt so zu dem Ergebnisse, daß der Körper sich um OZ gleichförmig dreht, während OZ einen gewöhnlichen Kegelmantel beschreibt, dessen Achse auf der unveränderlichen Ebene senkrecht steht. Dabei ist die augenblickliche Drehungsachse stets gemeinsame Seite zweier gewöhnlicher Kegel, deren einer im Raume fest ist, während der andere, dem Körper angehörige, auf ihm abrollt. Die Schnitte dieser Kegel in der unveränderlichen Ebene bezw. mit dem Trägheitsellipsoid stellen zwei Kurven dar, deren Abrollen die Bewegung gleichfalls darstellt, falls die unveränderliche Ebene als Berührungsebene des Ellipsoides konstruiert wird.

Schon die Behandlung dieses sehr einfachen Falles zeigt, daß die Auswertung der Eulerschen Gleichungen für bestimmte Aufgaben große Schwierigkeiten darbietet.

Hierzu kommt noch das Bedürfnis, die Bewegung ein für allemal auf ein festes Koordinatensystem zu beziehen, damit auch die Stellung des Körpers im Raume zu jeder Zeit t dargestellt werden kann.

Euler selbst hat dazu den Schnitt (Knotenlinie) einer Hauptebene des Centralellipsoides mit einer festen Ebene eingeführt und einmal den Winkel dieser beiden Ebenen bezw. ihrer Normalen und dann die Stellung der Knotenlinie zu einer festen und zu einer beweglichen Achse als Stellungsgrößen genommen.

Um diese Darstellung zu übersehen, legt man am besten durch O ein festes Kreuz $O(\Xi H Z)$, welches dem Kreuze $O(XYZ)$ kongruent ist, so daß beide Systeme Rechtssysteme (oder beide Linkssysteme) sind. Wählt man die Hauptebene YOX des Centralellipsoides als bewegliche Ebene und die entsprechende Ebene $HO\Xi$ als feste Ebene, so ist deren Schnitt OK die Knotenlinie, deren Winkel η_1 und η_2 etwa gegen OH und OY gemessen werden müssen, während außerdem noch der Winkel ϑ zwischen OZ und OZ benutzt wird.

Der Sinn der Drehungen, welche durch η_1, η_2 und ϑ bestimmt werden, mag folgendermaßen festgestellt werden: Nachdem eine Halbachse der Knotenlinie willkürlich als positiv bezeichnet worden ist, denken wir uns das bewegliche System mit dem unbeweglichen System zur Deckung gebracht. Dreht man nun das bewegliche System um OZ, das mit OZ zusammenfällt, im Sinne des Uhrzeigers, bis die positive Halbachse OY mit der positiven Halbachse der Knotenlinie zusammenfällt, so entsteht der Winkel η_1 und zwar in bestimmtem Sinne. Dreht man ferner das bewegliche System um die positive Halbachse der Knotenlinie im Sinne des Uhrzeigers, bis die Achse ihre richtige Lage erhält, so entsteht der Winkel ϑ und zwar im bestimmten Sinne. Dreht man endlich das bewegliche System um die jetzt gegebene Lage der Achse OZ im Sinne der Uhrzeigerbewegung, bis die XY-Ebene, welche bereits als Ganzes ihre richtige Stellung hat, in die richtige Achsenlage (OX und OY) gelangt, so entsteht der Winkel η_2 und zwar im bestimmten Sinne.

Sind η_1, ϑ, η_2 als Funktionen der Zeit t gegeben, so kann man ihre Werte für einen bestimmten Zeitpunkt berechnen, und dann diesen Werten gemäß durch die eben beschriebenen drei Bewegungen die Lage des beweglichen Hauptachsenkreuzes $O(XYZ)$ gegen das feste Kreuz $O(\Xi H Z)$ feststellen.

Nennt man die Erzeugungsgeschwindigkeiten der Winkel η_1, ϑ, η_2 bezw. η_1', ϑ', η_2', so findet man durch eine Betrachtung, welche der im Eingange dieses Paragraphen angewandten durchaus entspricht,

$$\left.\begin{aligned}\varphi_x &= -\vartheta' \sin\eta_2 + \eta_1' \cos\eta_2 \sin\vartheta \\ \varphi_y &= +\vartheta' \cos\eta_2 + \eta_1' \sin\eta_2 \sin\vartheta \\ \varphi_z &= \eta_2' + \eta_1' \cos\vartheta\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 240)$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen gehen die Eulerschen Gleichungen in ein

System von Gleichungen für η_1, ϑ, η_2 über, falls auch noch $M_A^{(x)}$, $M_A^{(y)}$, $M_A^{(z)}$ durch η_1, ϑ, η_2 ausgedrückt werden.

Lassen sich diese Größen aus den so erhaltenen Gleichungen bestimmen, so daß sie als Funktionen von t erscheinen, so ist die Stellung des Hauptachsenkreuzes des Körpers zu jeder Zeit im Raume bestimmt.

Die Gleichungen Nr. 240) geben dann φ_x, φ_y, φ_z und damit $[\varphi]$, so daß dann also auch die Lage der Drehungsachse im Körper und damit auch im Raume zu jeder Zeit bestimmt ist.

In dem besonderen Falle, den wir oben behandelten, wo eine unveränderliche Ebene vorhanden ist, empfiehlt es sich, gegen diese die Knotenlinie OK zu bestimmen. Die Normale dieser Ebene (OZ) ist parallel zu dem Vektor, welcher das Moment der Bewegungsgröße darstellt, dessen Komponenten mit den beweglichen Achsen $\varphi_x \mathfrak{T}\mathfrak{r}_x$, $\varphi_y \mathfrak{T}\mathfrak{r}_y$, $\varphi_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z$ sind, so daß die Neigung dieser Achsen OX, OY, OZ gegen OZ bezw. durch $\frac{\varphi_x \mathfrak{T}\mathfrak{r}_x}{Mo(B)}$, $\frac{\varphi_y \mathfrak{T}\mathfrak{r}_y}{Mo(B)}$, $\frac{\varphi_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}{Mo(B)}$ gegeben wird.

Stellt man diese Cosinus durch η_1, ϑ, η_2 dar, so ist

$$\varphi_x \mathfrak{T}\mathfrak{r}_x = Mo(B) \,.\, \cos\eta_2 \,.\, \sin\vartheta, \quad \varphi_y \mathfrak{T}\mathfrak{r}_y = Mo(B) \,.\, \sin\eta_2 \sin\vartheta,$$
$$\varphi_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z = Mo(B) \,.\, \cos\vartheta,$$

d. h. man hat

$$\cos\vartheta = \frac{\varphi_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}{Mo(B)} \quad \text{und} \quad tg\,\eta_2 = \frac{\varphi_y \mathfrak{T}\mathfrak{r}_y}{\varphi_x \mathfrak{T}\mathfrak{r}_x}.$$

Um η_1 zu bestimmen, bildet man aus den beiden ersten Gleichungen der Nr. 240)

$$\varphi_x \cos\eta_2 + \varphi_y \sin\eta_2 = \eta_1' \sin\vartheta,$$

d. h.

$$\eta_1' = \frac{\varphi_x \cos\eta_2 + \varphi_y \sin\eta_2}{\sin\vartheta} = Mo(B) \cdot \frac{\varphi_x^2 \mathfrak{T}\mathfrak{r}_x + \varphi_y^2 \mathfrak{T}\mathfrak{r}_y}{\overline{Mo(B)}^2 - \varphi_z^2 \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z^2}.$$

Wir erläutern die Bedeutung der gewonnenen Ergebnisse erst für den Fall, daß das Trägheitsellipsoid eine Kugel ($\mathfrak{T}\mathfrak{r}_x = \mathfrak{T}\mathfrak{r}_y = \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z = A$) ist.

Die Eulerschen Gleichungen liefern hier, wo keine Kräfte wirken, $\varphi_x = \alpha$, $\varphi_y = \beta$, $\varphi_z = \gamma$, so daß $\varphi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ ist, d. h. man hat hier gleichförmige Drehung (φ) um eine bestimmte Achse des Körpers. Die Komponenten von $Mo(B)$ sind αA, βA, γA, so daß $[\varphi]$ und $[Mo(B)]$ übereinstimmen, d. h. die Drehungsachse liegt in Bezug auf das unbewegliche System fest und zwar verläuft sie senkrecht zur unveränderlichen Ebene (ΞH-Ebene).

Der Körper bewegt sich also, als wenn OZ feste Achse wäre.

Man hat $\cos\vartheta = \frac{\gamma}{\varphi}$ und $tg\,\eta_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, d. h. ϑ und η_2 sind konstant, so daß OZ einen Kegel von der Öffnung ϑ um OZ beschreibt und die Knotenlinie im beweglichen Systeme fest liegt.

Aus $\eta_1' = \varphi \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\varphi^2 - \gamma^2}$ folgt $\eta_1 = \varphi \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\varphi^2 - \gamma^2} t + C'$, falls C'

eine Konstante bezeichnet, d. h. die Knotenlinie dreht sich im festen Systeme gleichförmig, wobei $C' = 0$ ist bei der Bestimmung $\eta_1 = 0$ für $t = 0$.

Hätte man OZ mit $[\varphi]$ und OZ von Anfang an zusammenfallen lassen, so wäre $\alpha = \beta = 0$ und $\varphi = \gamma$, ferner $\cos\vartheta = 1$ und $tg\,\eta_2 = \frac{0}{0}$ und $\eta_1 = \frac{0}{0}$. Hier ist die XY-Ebene parallel zur ΞH-Ebene, so daß die Knotenlinie unendlich fern ist.

Ist das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ($\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y = A$), so ist $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = \alpha^2$ und $Mo(B) = \sqrt{\alpha^2 A^2 + \gamma^2 \mathfrak{Tr}_z^2}$, d. h. man hat

$$\cos\vartheta = \frac{\gamma \,.\, \mathfrak{Tr}_z}{\sqrt{\alpha^2 A^2 + \gamma^2 \mathfrak{Tr}_z}} \quad \text{und} \quad tg\,\eta_2 = tg(mt + \varepsilon).$$

Ferner ist $\eta_1' = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 A^2 + \gamma^2 \mathfrak{Tr}_z}}{A}$ und $\eta_1 = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 A^2 + \gamma^2 \mathfrak{Tr}_z}}{A} \cdot t + C'$,

wenn C' wieder eine Konstante ist.

Hier ist also ϑ konstant, d. h. OZ beschreibt im Raume einen Kegel von der Öffnung ϑ und zwar ist seine Bewegung gleichförmig, weil die Knotenlinie sich in der festen Ebene gleichförmig (η_1) bewegt.

Man hat ferner $\eta_2 = mt + \varepsilon$, so daß ε den Wert von η_2 für $t = 0$ bezeichnet.

Man gelangt dabei wieder zu den oben entwickelten Ergebnissen.

106. Allgemeine Charakteristik der Bewegung eines starren Körpers. Die ganze Betrachtung des vorigen Paragraphen bezog sich auf einen Körper, der Schwenkungen um einen festen Punkt vollführen konnte.

Sie gilt ebenso für die freie Bewegung eines Körpers, falls man dessen Massenmittelpunkt als Punkt O wählt, und außerdem in diesem Falle noch die Bewegung des Massenmittelpunktes als Verschiebung auf das Achsenkreuz $O(XYZ)$ überträgt.

Sie gilt auch noch, nach Einführung der nötigen Reaktionen, für gezwungene Bewegungen starrer Körper.

Bei der freien Bewegung, auf welche man die gezwungene Bewegung zurückzuführen hat, bewegt sich der Massenmittelpunkt so, als wenn alle Bewegungsgrößen und alle äußeren Kräfte, an ihn parallel verschoben, an ihm zur Geltung kämen.

Außerdem bestimmen die Eulerschen Gleichungen die Drehungen und deren Achsen für den Massenmittelpunkt.

107. Die Bewegung eines kraftfreien starren Körpers. Wirken auf einen Körper überhaupt keine Kräfte, so bewegt sich sein Massenmittelpunkt gleichförmig auf gerader Bahn, falls er nicht in Ruhe ist. Ist der Körper starr, so lassen die außerdem vorhandenen Schwenkungen um den Massenmittelpunkt eine anschauliche Darstellung zu. Man kann sie entweder aus den Gleichungen des § 105 gewinnen, indem man die für das Beispiel des Umdrehungsellipsoides durchgeführte Untersuchung verallgemeinert, oder sich nach dem Vorgange von Poinsot mehr auf geometrische Überlegungen

stützen. Hier soll der letztere Weg eingeschlagen werden, womit dann zugleich die Betrachtungen am Schlusse von § 101 weiter geführt werden.

Da keine Kräfte auf den Körper wirken, so ist seine Energie zu jeder Zeit konstant (E_0) und zwar hat man für die Drehung um eine Achse, der die Winkelgeschwindigkeit φ und das Trägheitsmoment $\mathfrak{Tr}$ entspricht, $E_0 = \frac{1}{2}\varphi^2\mathfrak{Tr}$.

Der Halbmesser $OP = r$, den diese Achse im Centralellipsoide bestimmt, ist gemäß dessen Konstruktion $\frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}}}$, so daß $r^2 = \frac{C^2}{\mathfrak{Tr}}$ und $E_0 = \frac{1}{2}\varphi^2 \cdot \frac{C^2}{r^2}$ ist, d. h. $\frac{\varphi}{r}$ ist eine Konstante. Man hat also den Satz: Die Winkelgeschwindigkeit für die augenblickliche Drehungsachse ist stets dem Halbmesser des Centralellipsoides proportional, mit welchem jene Achse zusammenfällt, so daß dieser Halbmesser $[OP]$ die Winkelgeschwindigkeit als Vektor in einem bestimmten Maßstabe darstellt.

Bildet $[OP]$ mit den Hauptachsen des Körpers, welchen das Kreuz $O(XYZ)$ entspricht, bezw. die Winkel α, β, γ, so ist für $P = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\cos\alpha = \frac{\bar{x}}{r}, \quad \cos\beta = \frac{\bar{y}}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{\bar{z}}{r}.$$

Da andererseits $\cos\alpha = \frac{\varphi_x}{\varphi}$, $\cos\beta = \frac{\varphi_y}{\varphi}$, $\cos\gamma = \frac{\varphi_z}{\varphi}$ ist, so gilt auch

$$\frac{\bar{x}}{r} = \frac{\varphi_x}{\varphi}, \quad \frac{\bar{y}}{r} = \frac{\varphi_y}{\varphi}, \quad \frac{\bar{z}}{r} = \frac{\varphi_z}{\varphi}.$$

Da die Berührungsebene des Centralellipsoides $x^2\mathfrak{Tr}_x + y^2\mathfrak{Tr}_y + z^2\mathfrak{Tr}_z = C^2$ im Punkte P die Gleichung

$$x\bar{x} \cdot \mathfrak{Tr}_x + y\bar{y} \cdot \mathfrak{Tr}_y + z\bar{z} \cdot \mathfrak{Tr}_z = C^2$$

hat, so gilt für diese Ebene auch

$$x \cdot \varphi_x \cdot \mathfrak{Tr}_x + y \cdot \varphi_y \cdot \mathfrak{Tr}_y + z \cdot \varphi_z \cdot \mathfrak{Tr}_z = C^2 \cdot \frac{\varphi}{r} = C\sqrt{2E_0}.$$

Da ferner die Komponenten für das Moment der Bewegungsgröße $Mo(B)$ des Körpers in Bezug auf die Achsen sich bezw. als $\varphi_x \cdot \mathfrak{Tr}_x$, $\varphi_y \cdot \mathfrak{Tr}_y$, $\varphi_z \cdot \mathfrak{Tr}_z$ darstellen, so sind die Cosinus der Neigungswinkel dieses Momentes als Vektor gegen die Achsen bezw.

$$\frac{\varphi_x \cdot \mathfrak{Tr}_x}{Mo(B)}, \quad \frac{\varphi_y \cdot \mathfrak{Tr}_y}{Mo(B)}, \quad \frac{\varphi_z \cdot \mathfrak{Tr}_z}{Mo(B)},$$

d. h. dieser Vektor ist Normale der vorher bestimmten Berührungsebene. Da dieser Vektor nun die Normale der unveränderlichen Ebene ist, so ist diese jener Berührungsebene parallel, oder, was dasselbe ist, der augenblicklichen Drehungsachse $[OP]$ konjugiert in Bezug auf das Ellipsoid.

Fällt man ein Lot von O auf die Berührungsebene, so hat dieses die Länge

$$l = \frac{C\sqrt{2E_0}}{\sqrt{\varphi_x^2\mathfrak{Tr}_x^2 + \varphi_y^2\mathfrak{Tr}_y^2 + \varphi_z^2\mathfrak{Tr}_z^2}}.$$

Der Nenner von l ist $Mo(B)$, so daß

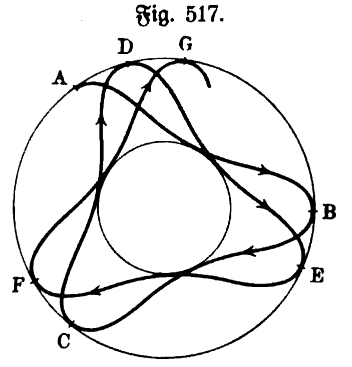
$$l = \frac{C\sqrt{2E_0}}{Mo(B)}$$

eine Konstante ist.

Da nun die Berührungsebene des Ellipsoides, welche einer beliebigen Drehungsachse konjugiert ist, der unveränderlichen Ebene parallel ist und von dem Punkte O einen festen Abstand hat, so fallen alle, zu Drehungsachsen konjugierten Berührungsebenen im Raume zusammen, falls O unbeweglich ist.

Legt man durch den Mittelpunkt des Ellipsoides eine Ebene, die zu $[OP]$ konjugiert ist, so wird diese durch die Drehung um $[OP]$ im allgemeinen nicht in sich gedreht, so daß nach Ablauf eines Zeitelementes die unveränderliche Ebene im allgemeinen einer anderen Centralebene des Ellipsoides parallel ist, welche nun den zu ihr konjugierten Durchmesser als neue Drehungsachse bestimmt, u. s. f. Nur wenn die Drehung um eine Hauptachse stattfindet, bleibt die ihr konjugierte Centralebene des Ellipsoides der unveränderlichen Ebene bei der Drehung parallel, so daß also kein Wechsel der Achse erfolgt.

Fig. 517.



Falls O unbeweglich ist, rollt also das Ellipsoid auf einer bestimmten, im Abstande l von O der unveränderlichen Ebene parallelen Ebene $[U]$ ab.

Ist O beweglich, so gilt Entsprechendes, nur verschiebt sich jene Ebene $[U]$ mit O.

Die Gesamtheit der möglichen Berührungspunkte auf dem Ellipsoide ist eine bestimmte Linie, welche für das ruhend gedachte Ellipsoid leicht bestimmt werden kann. Denkt man sich zu ihm eine konzentrische Kugel vom Radius l, so bestimmen die gemeinsamen Tangentialebenen von Kugel und Ellipsoid auf letzterem jene Linie, welche als der Weg der Drehpole durch den Namen „Polweg" oder „Polodie" ausgezeichnet wird.

Verzeichnet man die Pole für eine bestimmte Bewegung in der unveränderlichen Ebene $[U]$, so entsteht auch dort eine Linie, welche wegen ihrer windungsreichen Gestalt Herpolodie (oder Serpolodie) heißt.

Die Polodie ist, wie leicht zu ersehen, stets die Durchkreuzung des Ellipsoides und eines Kegels zweiten Grades von der Spitze O. Vergl. S. 724.

Fällt man von O ein Lot ON auf die unveränderliche Ebene $[U]$, so ist die Projektion von OP durch NP gegeben. Diese Projektion hat ein Maximum und ein Minimum, welchem zwei konzentrische Kreise vom Mittelpunkte N entsprechen. Die Herpolodie kann als Bahn der Punkte P die Ringfläche dieser beiden Kreise nicht überschreiten, und wendet sich infolgedessen zwischen den begrenzenden Kreislinien hin und her. Vergl. die Linie $ABC\ldots$ in Fig. 517.

Die Bewegung des Körpers stellt sich also schließlich dar als ein Ab-

rollen der Polodie auf der Herpolodie bezw. der entsprechenden Kegelflächen vom Mittelpunkte O.

Für den oben behandelten Fall des Umdrehungsellipsoides sind die beiden Polkurven Kreise, denen bestimmte Kreiskegel entsprechen, wie schon oben gefunden wurde.

Die Betrachtung gilt auch noch für die Bewegung eines schweren Körpers, der sonst kraftfrei ist, da hier die Resultante aller Kräfte durch den Massenmittelpunkt geht.

Wird z. B. irgend ein Körper der Außenwelt geworfen, so beschreibt sein Massenmittelpunkt eine ballistische Kurve, welche angenähert als Parabel erscheint. Mit dem Massenmittelpunkt fest verbunden, verschiebt sich die unveränderliche Ebene $[U]$ im Raume, auf welcher das abrollende Centralellipsoid des Körpers dessen Schwenkungen um den Schwerpunkt darstellt.

Dabei wird vorausgesetzt, daß der Luftwiderstand vernachlässigt werden darf, da dessen Einwirkung sonst als ein System äußerer Kräfte einzuführen ist.

108. Stabilität einer Drehungsachse. Wenn auch alle drei Hauptachsen des Schwerpunktes als dauernde Drehungsachsen auftreten können, so bieten doch die Hauptachsen, welche zum kleinsten und zum größten Trägheitsmomente gehören, dabei andere Beziehungen dar, als die Hauptachse, welche zum mittleren Trägheitsmomente gehört. Erstere zeigen eine gewisse Stabilität, welche der letzteren fehlt. Wird nämlich die Drehung um eine Hauptachse durch verhältnismäßig geringe Anstöße von außen gestört, so treten im ersten Falle meist Achsen an ihre Stelle, welche der ursprünglichen Drehungsachse verhältnismäßig nahe liegen, während dies im zweiten Falle meist nicht eintritt, weil der Polweg (Polodie) nur im ersten Falle eine, den Scheitel der Achse verhältnismäßig eng umziehende, geschlossene Kurve sein kann.

In jedem Falle bilden die Berührungspunkte zwischen dem Centralellipsoide und der unveränderlichen Ebene den möglichen Polweg. Hat diese vom Mittelpunkte des Ellipsoides den Abstand l, so muß also die Tangentialebene des Ellipsoides in jedem Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ des möglichen Polweges vom Mittelpunkte den Abstand l haben.

Für das Ellipsoid $x^2 . \mathfrak{Tr}_x + y^2 . \mathfrak{Tr}_y + z^2 . \mathfrak{Tr}_z = C^2$ hat die Tangentialebene im Punkte $(\bar{x}, y, \bar{z})$ die Gleichung

$$x\bar{x} . \mathfrak{Tr}_x + y\bar{y} . \mathfrak{Tr}_y + z . \bar{z} . \mathfrak{Tr}_z = C^2,$$

während das Lot aus dem Mittelpunkte $(0, 0, 0)$ auf sie den Wert

$$\frac{C^2}{\sqrt{\bar{x}^2 \mathfrak{Tr}_x^2 + \bar{y}^2 \mathfrak{Tr}_y^2 + \bar{z}^2 \mathfrak{Tr}_z^2}}$$

hat.

Soll dieses die Länge l haben, so gilt also für $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\bar{x}^2 \mathfrak{Tr}_x^2 + \bar{y}^2 \mathfrak{Tr}_y^2 + \bar{z}^2 \mathfrak{Tr}_z^2 = \frac{C^4}{l^2}.$$

Da $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sowohl auf dem Ellipsoide als auch auf der Tangentialebene liegt, so hat man für $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ neben der eben aufgestellten Gleichung auch noch die Gleichung

$$\bar{x}^2 \mathfrak{Tr}_x + \bar{y}^2 \mathfrak{Tr}_y + \bar{z}^2 \mathfrak{Tr}_z = C^2.$$

Der mögliche Polweg stellt sich also dar als Durchdringung des Centralellipsoides mit einem zweiten (ihm konfokalen) Ellipsoide. Zieht man die beiden gewonnenen Gleichungen, nachdem man die zweite mit $\frac{C^2}{l^2}$ multipliziert hat, voneinander ab, so erhält man für $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ eine dritte Gleichung, welche lautet

$$\bar{x}^2 . \mathfrak{Tr}_x (C^2 - l^2 . \mathfrak{Tr}_x) + \bar{y}^2 . \mathfrak{Tr}_y (C^2 - l^2 . \mathfrak{Tr}_y) + \bar{z}^2 . \mathfrak{Tr}_z (C^2 - l^2 . \mathfrak{Tr}_z) = 0.$$

Da dieses die Gleichung eines Kegels zweiten Grades ist, der seinen Scheitel im gemeinsamen Mittelpunkte der beiden Ellipsoide hat, so stellt dieser Kegel die Gesamtheit der möglichen Drehungsachsen dar. Durch seine Durchkreuzung mit dem Centralellipsoide wird die mögliche Polbahn sehr gut veranschaulicht.

Sind nun die Trägheitsmomente der Hauptachsen des Centralellipsoides durch die Beziehung

$$\mathfrak{Tr}_x < \mathfrak{Tr}_y < \mathfrak{Tr}_z$$

bestimmt, so gilt für diese Hauptachsen selbst

$$\frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_x}} > \frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_y}} > \frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_z}}.$$

Soll die unveränderliche Ebene $[U]$ das Ellipsoid berühren, so muß also sein

$$\frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_x}} \geqq l \geqq \frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_z}}.$$

Für $\frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_x}} = l$ erhält der oben bestimmte Kegel die Gleichung

$$\bar{y}^2 \mathfrak{Tr}_y (C^2 - l^2 \mathfrak{Tr}_y) + \bar{z}^2 \mathfrak{Tr}_z (C^2 - l^2 \mathfrak{Tr}_z) = 0.$$

Da beide Klammern negative Größen sind, so wird dieser Gleichung unter den reellen Werten nur durch $y = 0$, $\bar{z} = 0$ genügt, d. h. der Kegel schrumpft in diesem Falle auf die X-Achse zusammen, der mögliche Polweg ist der eine oder der andere Scheitel des Ellipsoides, welcher auf der X-Achse liegt.

Für $\frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_z}} = l$ zeigen entsprechende Schlüsse, daß der Kegel in diesem Falle auf die Z-Achse zusammenschrumpft.

Dagegen sind die Verhältnisse für $\frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_y}} = l$ ganz andere, da hier der Kegel durch die Gleichung

$$\bar{x}^2 . \mathfrak{Tr}_x (C^2 - l^2 \mathfrak{Tr}_x) + \bar{z}^2 \mathfrak{Tr}_z (C^2 - l^2 \mathfrak{Tr}_z) = 0$$

bestimmt wird, in welcher $C^2 - l^2 \mathfrak{Tr}_x$ positiv und $C^2 - l^2 \mathfrak{Tr}_z$ negativ ist.

Diese Gleichung hat für $\mu^2 = \frac{\mathfrak{Tr}_z}{\mathfrak{Tr}_x} \cdot \frac{\mathfrak{Tr}_z - \mathfrak{Tr}_y}{\mathfrak{Tr}_y - \mathfrak{Tr}_x}$ die Gestalt

$$\bar{x}^2 - \mu^2 \bar{z}^2 = 0$$

und zerfällt demnach in $\bar{x} - \mu \bar{z} = 0$ und $\bar{x} + \mu \bar{z} = 0$, d. h. in diesem Falle entfaltet sich der Kegel zu zwei Ebenen, die auf der XZ-Ebene senkrecht stehen und durch die Y-Achse gehen. Hier ist der mögliche Polweg demnach ein System zweier Ellipsen, welche die Oberfläche des Ellipsoides in vier, paarweise symmetrische Felder zerlegen; das eine Paar dieser Felder enthält die Scheitel der größten, das andere Paar die Scheitel der kleinsten Achse.

Ist nun bei Störungen der Drehung um eine der Hauptachsen

$$\frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_x}} = l + \delta \quad \text{oder} \quad \frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_z}} = l - \delta \quad \text{oder} \quad \frac{C}{\sqrt{\mathfrak{Tr}_y}} = l \pm \delta$$

für δ als verhältnismäßig kleine positive Größe, so erhalten die Kegel in den ersten beiden Fällen, wie leicht zu ersehen, meist eine verhältnismäßig kleine Öffnung, während der mögliche Polweg im letzten Falle innerhalb eines der vier bezeichneten Felder verläuft und von dessen Umgrenzung verhältnismäßig wenig abweicht, also eine der beiden anderen Hauptachsen in verhältnismäßig weiter Windung umzieht.

Während also bei geringen Störungen der Drehung um die Achse des mittleren Trägheitsmomentes die Drehungsachsen nur dann in der Nähe der ursprünglichen Achse bleiben können, wenn eine Umkehr der Bewegung eintritt, umziehen die Polwege bei Störungen der Drehungen um die anderen Achsen stets deren Scheitel. Trotzdem ist auch in diesem Falle nicht immer Stabilität vorhanden. Die Größe der Felder, innerhalb welcher die geschlossenen Polwege für Störungen der Drehungen um die Achse des größten und kleinsten Trägheitsmomentes liegen, hängt ab von μ^2, welches für $\mathfrak{Tr}_z = \mathfrak{Tr}_y$ den Wert Null und für $\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y$ den Wert Unendlich erhält. Sobald also eine der Größen $\mathfrak{Tr}_x$ oder $\mathfrak{Tr}_z$ der Größe $\mathfrak{Tr}_y$ sehr nahe kommt, werden die Felder des einen Paares sehr schmale Sicheln, welche sich jedoch von dem einen Scheitel der Achse des mittleren Trägheitsmomentes zu deren anderem Scheitel hinziehen. Für die Scheitel, welche innerhalb dieser Sicheln liegen, giebt es stets Polwege, welche in geringer Entfernung von diesen Scheiteln vorbeigehen und demnach nahe an die Scheitel der Achse des mittleren Trägheitsmomentes hinkommen. Erfolgt in diesem Falle die Störung so, daß der Anstoß nach dem Scheitel der mittleren Achse zielt, so bleibt die Stabilität bestehen, erfolgt er senkrecht zu der eben bezeichneten Richtung, so ist die Stabilität gefährdet.

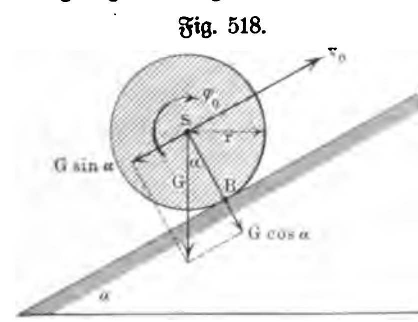
Für $\mathfrak{Tr}_x = \mathfrak{Tr}_y$ oder für $\mathfrak{Tr}_z = \mathfrak{Tr}_y$, d. h. für ein Umdrehungsellipsoid werden die Sicheln Null, so daß nur zwei Felder übrig bleiben, welche die Scheitel der Umdrehungsachse enthalten.

109. Die Reaktionen innerhalb der Kinetik und die besonderen Beziehungen gleitender und rollender Bewegungen. Da man mit Hülfe des

Principes von d'Alembert die kinetischen Aufgaben stets auf statische Aufgaben zurückführen kann, so bietet die Einführung der Reaktionen bei Bewegungen eines Körpers bezw. eines Körpersystems in theoretischer Hinsicht der Statik gegenüber keine besonderen Schwierigkeiten, solange die Reaktionen überhaupt durch Kräfte darstellbar sind. Trotzdem ist die weitere Ausführung kinetischer Aufgaben meist erheblich schwieriger als die Behandlung statischer Aufgaben, weil die Reaktionen bei kinetischen Verhältnissen meist mit der Zeit veränderlich sind, wie es schon der einfache Fall der Drehung um eine feste Achse zeigt.

Nur ein Fall bedarf noch der besonderen Betrachtung, nämlich die Vereinigung einer gleitenden und rollenden Bewegung bezw. die Übergänge von einer dieser Bewegungen zur anderen, natürlich auch mit Rücksicht auf die dabei auftretenden Reibungen.

Fig. 518.



Diese Beziehungen sind so verwickelt, daß sie kaum allgemein dargestellt werden können; wir führen deshalb einige Beispiele dafür an.

Ein Cylinder oder eine Kugel bewege sich, wie es Fig. 518 andeutet, auf einer schiefen Ebene so, daß die gesamte Bewegung aus einer Verschiebung mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und aus einer Drehung um den Schwerpunkt S mit der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit φ_0 besteht.

Bewegt sich der Berührungspunkt B längs der schiefen Ebene, so ist die gleitende Reibung R voll entwickelt und hat also den Wert $f \,.\, G \cos\alpha$. In diesem Falle, wo die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 - r\varphi_0$ von B nicht Null ist, gilt für die abwärts gerichtete Beschleunigung von S

$$1) \quad j = (G \sin\alpha \pm R)\frac{g}{G}$$

und für die Winkelbeschleunigung der Drehung um S im Sinne von $[\varphi_0]$

$$2) \quad \iota = \frac{\pm Rr - W}{\mathfrak{T}r},$$

falls man das Widerstandsmoment der rollenden Reibung $f_r \,.\, G \cos\alpha$ durch W bezeichnet.

Dabei entsprechen die oberen Vorzeichen (+) in beiden Gleichungen der Aufwärtsbewegung von B, die unteren (—) der Abwärtsbewegung von B. Man hat also für die Bewegung von S

$$v = v_0 - jt$$

und für die Drehung um S

$$\varphi = \varphi_0 + \iota t.$$

Die Bedingung einer reinen Rollbewegung ist die Ruhe von B, welche dem Ansatze $r\varphi = v$ entspricht.

Da diese Gleichung $\bar{t} = \frac{v_0 - r\varphi_0}{j + r\iota}$ liefert, so tritt im allgemeinen bei $t = \bar{t}$ für B ein Augenblick der Ruhe ein, in welchem eine reine Rollbewegung einsetzen kann. Bezeichnet man die Werte von v und φ, welche dem Augenblicke $t = \bar{t}$ entsprechen, durch $\bar{v}_0$ und $\bar{\varphi}_0$, so gilt von diesem Zeitpunkte ab

$$v = \bar{v}_0 - jt \quad \text{und} \quad \varphi = \bar{\varphi}_0 + \iota t,$$

so daß die Bedingung für ein nun folgendes Rollen, nämlich $v = r\varphi$, die Bedingung $j + r\iota = 0$ nach sich zieht. Diese Bedingung lautet ausführlicher

$$(G \sin\alpha \pm R)\frac{g}{G} + \frac{\pm Rr - W}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} r = 0.$$

Setzt man $\frac{G}{g} = m$, so folgt daraus

$$\pm R = - G \sin\alpha \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + mr^2} + \frac{Wrm}{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + mr^2}.$$

Das letzte Glied ist, da W sehr klein ist, ohne Einfluß auf das Vorzeichen, so daß von den beiden Vorzeichen der linken Seite nur das Vorzeichen — Geltung hat, d. h. bei der **Rollbewegung wirkt die Reibung stets nach oben, und zwar mit dem Betrage**

$$R = G \sin\alpha \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + mr^2} - \frac{Wrm}{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + mr^2}.$$

Da die Reibung bei **voller** Entwickelung den Wert $f G \cos\alpha$ hat, so muß

$$f G \cos\alpha > R \quad \text{sein.}$$

Für $R \sim G \sin\alpha \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + mr^2}$ folgt daraus

$$tg\,\alpha \leqq f \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + mr^2}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}},$$

d. h. eine Rollbewegung tritt nur ein, falls der Neigungswinkel der schiefen Ebene unter einer gewissen Grenze liegt.

Für einen Cylinder ist $\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \frac{1}{2} mr^2$, so daß sich also $tg\,\alpha \leqq 3f$ ergiebt. Für $f = 0{,}08$ ist der Reibungswinkel $4^0 30'$, für $3f = 0{,}24$ ist $\alpha = 13^0 30'$, d. h. ein Cylinder kann überhaupt nur rollen, falls $\alpha \leqq 13^0 30'$ ist für $f = 0{,}08$.

Für die Rollbewegung ergiebt sich bei Benutzung des Wertes von R

$$j = g\left(\sin\alpha \cdot \frac{mr^2}{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + mr^2} + \frac{f_r \,.\, \cos\alpha \,.\, m \,.\, r}{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + mr^2}\right) \quad \text{und} \quad -\iota = \frac{j}{r}.$$

Für die Gleit-Rollbewegung, von der wir ausgingen, gilt, da bei ihr die Reibung voll entwickelt ist,

$$j = g(\sin\alpha \pm f \cos\alpha) \quad \text{und} \quad \iota = \frac{G \cos\alpha \,.\, (\pm r \,.\, f - f_r)}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

In jedem Falle kann man noch $\mathfrak{Tr} = \mu r^2$ setzen, wobei μ die Masse eines materiellen Punktes bedeutet, welche den Körper bei der Drehung ersetzt (Reduktion der Masse).

Für eine Kugel vom Halbmesser $r = 0{,}1$ m auf einer Bahn von $\alpha = 5^0\,50'$ sei $v_0 = 8\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $\varphi_0 = 20$ bei $f = 0{,}2$. Hier ist der Beginn der Bewegung aufwärts gerichtet, da $v_0 = 8$ und $r\varphi_0 = 2$ ist, man hat also $j = g(\sin\alpha + f\cos\alpha) \sim 0{,}3\,g$.

Es ist ferner $G = mg$, $\mathfrak{Tr} = \frac{2}{5}mr^2$ und man hat daher für

$$\iota = +\frac{G\cos\alpha\,(rf - f_r)}{\mathfrak{Tr}}$$

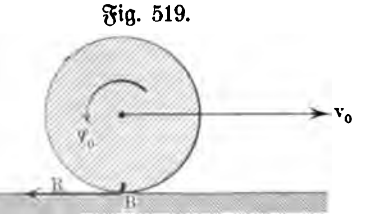
bei $f_r = 0{,}05$ cm den Wert $5\,g - \frac{1}{8}\,g$. Demnach ist

$$t = \frac{8 - 2}{0{,}3\,g + 0{,}5\,g - \frac{1}{80}\,g} = \frac{6}{0{,}8\,g - 0{,}013\,g} = \frac{6}{0{,}787\,.\,g} \sim 0{,}75''.$$

In diesem Augenblicke beginnt eine aufwärts gerichtete Rollbewegung, für welche die aufwärts gerichtete Reibung den Wert $R \sim \frac{1}{35}\,G$ hat, während sie bisher etwa $\frac{1}{5}\,G$ war und zwar abwärts gerichtet.

Für diese Rollbewegung gilt nun $j = r\iota = 0{,}07\,g$ und $\bar{v}_0 = 5{,}75\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$; die Gleichung $v = v_0 - jt$ zeigt, daß $v = 0$ und $\varphi = 0$ ist für $\bar{t} = \frac{5{,}75}{0{,}07\,g}$ $\sim 8{,}2''$, d. h. die Rollbewegung aufwärts dauert $8{,}2''$, wobei ein Weg von 23,5 m zurückgelegt wird. Jetzt beginnt eine Rollbewegung abwärts mit derselben Beschleunigung $j = r\iota = 0{,}07\,g$, die für das Aufwärtsrollen galt.

Fig. 519.



Auch auf horizontaler Bahn läßt sich eine Bewegung erzeugen, welche dem eben betrachteten Rückwärtsrollen entspricht. Man hat für $\alpha = 0$, entsprechend Fig. 519

$$j = -\frac{Rg}{G} \quad \text{und} \quad \iota = -\frac{rR + W}{\mathfrak{Tr}}.$$

Zunächst ist die Reibung voll entwickelt, so daß $R = fG$ ist.

Man hat hier $v = v_0 - fgt$ und $\varphi = \varphi_0 - \frac{fGr + W}{\mathfrak{Tr}} \cdot t$ und $v + r\varphi = 0$ als Bedingung für die Ruhe von B. Es ist also

$$t = \frac{v_0 + r\varphi_0}{fg\left(1 + \frac{mr^2}{\mathfrak{Tr}}\right) + \frac{rW}{\mathfrak{Tr}}}$$

und das zugehörige

$$v = v_0 - fgt = \frac{-r\varphi_0 + v_0\,\frac{mr^2}{\mathfrak{Tr}} + v_0\,\frac{rW}{\mathfrak{Tr}} \cdot \frac{1}{fg}}{1 + \frac{mr^2}{\mathfrak{Tr}} + \frac{rW}{\mathfrak{Tr}} \cdot \frac{1}{fg}}.$$

Soll nun $[\bar{v}]$ entgegengesetzt zu $[v_0]$ gerichtet sein, so muß das Vorzeichen von $r\varphi_0$ überwiegen, d. h. es muß

$$r\varphi_0 > v_0\left(\frac{mr^2}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} + \frac{rW}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot \frac{1}{fg}\right)$$

sein. Bei einer Kugel ($\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \frac{2}{5}mr^2$) muß also in großer Annäherung ($W = 0$) gelten $r\varphi_0 > 2{,}5\, v_0$.

Dabei kann $\bar{v} > v_0$ sein; dies tritt in großer Annäherung ($W = 0$) ein für

$$\frac{r\varphi_0 - v_0 \frac{mr^2}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}}{1 + \frac{mr^2}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}} > v_0.$$

Bei einer Kugel lautet diese Bedingung $r\varphi_0 > 6\, v_0$.

Hier ist $\varphi_0 > \frac{6\, v_0}{r}$ und $\bar{\varphi} = \frac{\bar{v}}{r} > \frac{v_0}{r}$, wobei die Energie der Bewegung am Anfange

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 + \tfrac{1}{2} \mathfrak{T}\mathfrak{r} \varphi_0^2$$

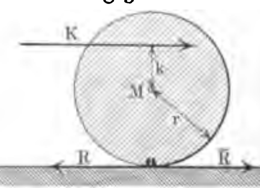
und bei Beginn des Rollens

$$\tfrac{1}{2} m \bar{v}^2 + \tfrac{1}{2} \mathfrak{T}\mathfrak{r} \bar{\varphi}^2$$

beträgt.

Für $\varphi_0 = \frac{6\, v_0}{r} + \varepsilon$ wird für die Kugel $\bar{\varphi} = \frac{\bar{v}}{r} = \frac{v_0}{r} + \frac{2}{7}\varepsilon$, so daß die Energie der Drehbewegung für φ_0 erheblich größer ist, als für $\bar{\varphi}$, während die Energie der Verschiebung für v_0 kleiner ist, als für $\bar{v}$; im ganzen hat die Energie natürlich, entsprechend der Reibungsarbeit, abgenommen.

Fig. 520.



Um eine Rollbewegung zu erzeugen, kann man unter anderem eine Kraft K, wie Fig. 520 zeigt, wirken lassen; dabei entsteht eine Reibung R oder $\bar{R}$. Führen wir R in die Rechnung ein, so ist die Beschleunigung des Schwerpunktes

$$j = \frac{K - R}{m}$$

und die Winkelbeschleunigung der Drehung um ihn, bei Vernachlässigung des Widerstandsmomentes der rollenden Reibung,

$$\iota = \frac{Kk + rR}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

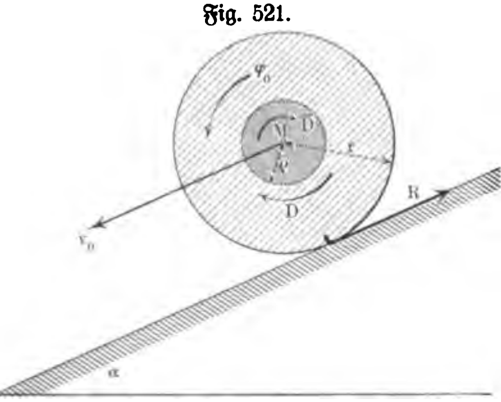
Für den Fall des Rollens ist $j = r\iota$, so daß sich

$$R = K\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r} - rkm}{r^2 m + \mathfrak{T}\mathfrak{r}}$$

ergiebt.

Für $k = \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{mr}$ ist $R = 0$, was bei einer Kugel ($\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \frac{2}{5} mr^2$) für $k = \frac{2}{5} r$ eintritt; für eine Kugel gilt also die Reibung [R] der Fig. 520 für $k = 0 \ldots \frac{2}{5} r$ und die Reibung [$\bar{R}$] der Fig. 520 für $k = \frac{2}{5} r \ldots r$. Da $R = 0$ für $k = \frac{2}{5} r$ eintritt, was einer absolut-glatten Fläche entsprechen würde, so muß ein Stoß in dieser Höhe unter allen Umständen eine reine Rollbewegung erzeugen.

Fig. 521.



Wir betrachten noch die Übertragung der Drehung eines rollenden Rades oder eines Räderpaares auf seine Achse gemäß Fig. 521, wobei die Masse des Rades durch m_1, die der Achse mit m_2 bezeichnet werden mag.

Wird das Reibungsmoment, welches bei der Berührung zwischen Rad und Achse auf das Rad wirkt mit D, und das entsprechende Moment für die Achse mit $\bar{D}$ bezeichnet, so gilt für die Winkelbeschleunigung des Rades

$$\iota_1 = \frac{rR - D}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_1}$$

und für die Winkelbeschleunigungen der Achse

$$\iota_2 = \frac{\bar{D}}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_2}.$$

Für die Beschleunigung des Schwerpunktes des ganzen Systems gilt

$$j(m_1 + m_2) = (m_1 + m_2) g \sin\alpha - R.$$

Da $r\iota_1 = j$ ist, so hat man

$$g \sin\alpha - \frac{R}{m_1 + m_2} = \frac{r^2 R - rD}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_1},$$

d. h.

$$R = \frac{(m_1 + m_2)(\mathfrak{T}\mathfrak{r}_1 g \sin\alpha + rD)}{r^2(m_1 + m_2) + \mathfrak{T}\mathfrak{r}_1}.$$

Daraus folgt

$$j = \frac{r^2(m_1 + m_2) g \sin\alpha - rD}{r^2(m_1 + m_2) + \mathfrak{T}\mathfrak{r}_1}.$$

Ist die Reibung, welche D entspricht, zu schwach, um $\iota_2 = \iota_1$ zu machen, so ist sie voll entwickelt und man hat $D \sim (m_2 g) . f . \varrho$, falls ϱ den Radius der Achse bezeichnet.

In diesem Falle ($\iota_2 < \iota_1$) ist

$$j = \frac{r^2(m_1 + m_2) g \sin\alpha - r\varrho m_2 g f}{r^2(m_1 + m_2) + \mathfrak{T}\mathfrak{r}_1}.$$

Ist die Reibung, welche D entspricht, stark genug, um $\iota_2 = \iota_1$ zu machen, so folgt der Betrag von D aus dem Ansatze $\iota_1 = \iota_2$, oder da $j = r\iota_1$ ist, auch aus dem Ansatze $j = r\iota_2$, d. h. man hat

$$r\frac{D}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_2} = \frac{r^2(m_1 + m_2)g \sin\alpha - rD}{r^2(m_1 + m_2) + \mathfrak{T}\mathfrak{r}_1}.$$

Daraus folgt

$$D = \frac{r^2(m_1 + m_2)g \sin\alpha}{r^2(m_1 + m_2) + \mathfrak{T}\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{T}\mathfrak{r}_2} \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_2}{r}$$

und

$$j = \frac{r^2(m_1 + m_2)g \sin\alpha}{r^2(m_1 + m_2) + \mathfrak{T}\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{T}\mathfrak{r}_2}.$$

Reduziert man die Massen m_1 und m_2 für den Trägheitsarm r, so daß $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_1 = \mu_1 r^2$ und $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_2 = \mu_2 r^2$ ist, so gilt im ersten Falle

$$j = \frac{(m_1 + m_2)g \sin\alpha - \frac{\varrho}{r} m_2 g f}{m_1 + m_2 + \mu_1}$$

und im zweiten Falle

$$j = \frac{(m_1 + m_2)g \sin\alpha}{m_1 + m_2 + \mu_1 + \mu_2}.$$

Im zweiten Falle wirkt die Reibung so, daß man Rad und Achse als einen Körper betrachten kann. Für diesen wären

$$j = \frac{(m_1 + m_2)g \sin\alpha - R}{m_1 + m_2}$$

und

$$\iota = \frac{rR}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{T}\mathfrak{r}_2}.$$

Daraus folgt sofort wieder die obige Formel.

Sind die Räder oder Räderpaare belastet, wie es bei Fuhrwerken der Fall ist, so führt man am besten wieder die erfahrungsmäßig zu bestimmende Gleichgewichtsneigung ein, wie in den Anwendungen zu diesem Abschnitte gezeigt werden soll.

110. Principien der Dynamik bezw. der physikalischen Mechanik. Die allgemeinen Sätze (vergl. § 102), welche die Kinetik beherrschen, sind, wie bereits bei ihrer Entwickelung hervorgehoben wurde, durchaus nicht bloß als Sätze über starre Körper oder Systeme solcher Körper aufzufassen, sondern als Sätze, die überhaupt für materielle Systeme gelten, und zwar, weil diese ja auch Systeme starrer Körper sind, falls man ihre Atome als unendlich-kleine starre Körper auffaßt.

Da anderseits die Statik in der Kinetik als besonderer Fall (Grenzfall der Ruhe u. s. w.) enthalten ist und da die Dynamik wiederum die Phoronomie als besonderen Fall umfaßt, so treten jene allgemeinen Sätze schließlich an die Spitze der gesamten Mechanik, genauer der gesamten physikalischen Mechanik, durch welche die Bewegungen der uns gegebenen Außenwelt behandelt werden können.

Man hat nun mehrfach[1]) gesucht, diese allgemeinen Sätze unter Berücksichtigung aller Voraussetzungen, auf welche sie sich stützen, in einem allgemeinen Satze zusammenzufassen und diesen als (unbeweisbares) Princip (vergl. S. 6) an die Spitze der ganzen physikalischen Mechanik zu stellen, um aus ihm, gestützt auf die nötigen Definitionen, alle anderen Sätze und Regeln herzuleiten.

Man beabsichtigte dabei, der Mechanik das Gepräge einer deduktiven Wissenschaft zu geben, als deren Muster vor allem die Geometrie galt. Eine solche Aufgabe ist für die mathematische (reine) Mechanik sicher durchführbar, da man hier jede Lücke, die sich zeigt, durch eine geeignete Definition schließen kann, für die physikalische Mechanik, welche auf die Außenwelt anwendbar sein soll, ist sie nicht zu lösen, ebensowenig wie für die Physik selbst, hier wird man vielmehr immer wieder von Fall zu Fall auf Beobachtung und Versuch zurückgehen müssen.

Dies gilt natürlich auch im besondern für die technische Mechanik, deren fruchtbare Entwickelung in den letzten Jahrzehnten gerade mit darauf beruht, daß man die Theorie immer von neuem durch Beobachtungen und Versuche geprüft und berichtigt hat.

Von den allgemeinen Sätzen, welche wir benutzt haben, hat das Princip von d'Alembert noch am meisten das Gepräge eines solchen umfassenden Principes, falls man das Princip des Parallelogramms und das Princip der Paarwirkung, welch letzteres ja das Princip der Beharrung (Trägheit) umfaßt, in ihm mit enthalten denkt.

Unter dieser Voraussetzung verbindet das Princip von d'Alembert die beiden Formen der Kraft, welche sich zeigen, die kinetische und die statische. Es ist in diesem Sinne ein Princip von der Erhaltung der Kraft[2]), das Wort „Kraft“ in scharfer begrifflicher Bestimmung genommen, insofern es lehrt, die scheinbar verlorene statische Kraft in der Bewegung und die scheinbar verlorene kinetische Kraft im Zuge und im Drucke wiederzufinden, so daß Statik und Kinetik in engste Beziehung treten.

Thatsächlich lassen sich auch aus dem Principe von d'Alembert die allgemeinsten Gleichungen für die Behandlung materieller Systeme herleiten, welche als die Gleichungen von Lagrange bezeichnet werden.

Für freie Systeme wurde die Ableitung bereits auf S. 346 gegeben.

Für Systeme, in welchen einzelne materielle Punkte besonderen Bedingungen unterworfen sind (Zwang von Kurven, Oberflächen u. s. w.), gelten natürlich dieselben Gleichungen, falls es gelingt, die Bedingungen durch Kräfte auszudrücken.

Auch die Durchführung dieser allgemeinen Aufgabe verdankt man Lagrange; seine Darstellung ist sehr zweckmäßig für eine Reihe von prak-

---

[1]) So hat z. B. Lagrange das Princip der virtuellen Verrückungen an die Spitze gestellt.

[2]) Daß in dem Satze über die Beziehung von Energie und Arbeit und in dem Satze von der Erhaltung der Energie ursprünglich statt des Wortes „Energie“ das Wort „Kraft“ gebraucht wurde, hat mit obiger Darstellung natürlich nichts zu thun.

tischen Aufgaben, unter denen die Untersuchung der Bewegung einer Glocke und ihres Klöppels und der entsprechenden Reaktionen an Glockenstühlen besonders hervorgehoben werden mag.

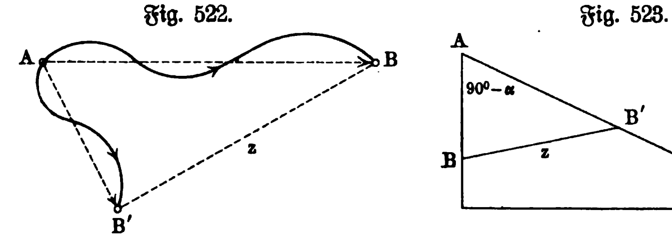
Die Gleichungen von Lagrange hat Hamilton wieder zu einem ziemlich umfassenden Principe zusammengezogen, das sehr fruchtbar ist, freilich nicht bei Anwendung elementarer Methoden.

Dagegen läßt sich ein anderes, von Gauß eingeführtes Princip, das Princip des kleinsten Zwanges, welches gleichfalls die Gleichungen von Lagrange umfaßt, auch bei elementarer Behandlung gelegentlich mit Vorteil anwenden.

Dieses Princip läßt sich folgendermaßen darstellen.

Wenn ein materieller Punkt von der Masse μ, der einem System angehört, in der Zeit τ die Verlegung $[AB]$ hätte, falls er frei wäre, thatsächlich aber in dieser Zeit τ die Verlegung $[AB']$ erleidet, so stellt die

Fig. 522. Fig. 523.



Verlegung $[BB'] = [z]$ den Zwang dar, welchem seine Bahn innerhalb der Zeit τ unterliegt (vergl. Fig. 522). Drückt man diesen Zwang, welcher in phoronomischer Hinsicht durch $[z]$ ausgedrückt wird, in dynamischer Hinsicht mit Gauß durch μz^2 aus, so ist

$$Z = \mu_1 z_1^2 + \mu_2 z_2^2 + \cdots \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 241)$$

der Zwang eines materiellen Systems.

Das Princip von Gauß sagt nun aus, daß die thatsächlichen Beziehungen sich von allen möglichen Beziehungen dadurch unterscheiden, daß für sie der Zwang Z in jedem Zeitelemente ein Minimum ist.

Dabei ist die Bedingung der Ruhe zu erschließen, indem man sie als Grenzfall der Bewegung auffaßt.

Als Beispiel diene zunächst die Bestimmung der Beschleunigung für die Bewegung auf einer schiefen Ebene. Ist x diese Beschleunigung, so ist (vergl. Fig. 523) der Weg ohne Zwang $AB = \frac{1}{2} g\tau^2$, der Weg mit Zwang $AB' = \frac{1}{2} x\tau^2$. Man hat also

$$Z = \mu z^2 = \tfrac{1}{4} \mu \tau^4 [g^2 + x^2 - 2 g x \sin\alpha].$$

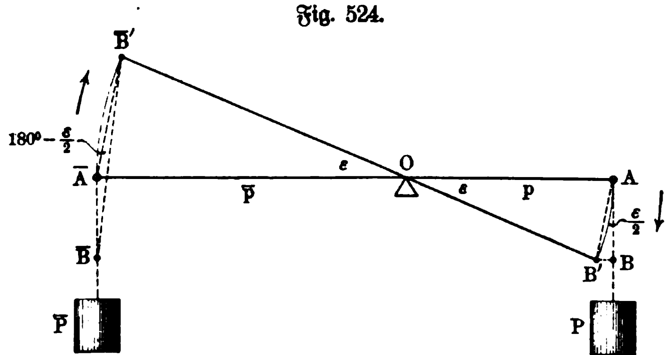
Da μz^2 für $x = g \sin\alpha$ ein Minimum wird, so ist $g \sin\alpha$ die thatsächliche Beschleunigung für die schiefe Ebene.

Geht man von einem Zustande der Ruhe aus, so muß $g \sin\alpha = 0$, d. h. $\alpha = 0$ sein, falls keine Bewegung eintreten soll.

Als nächstes Beispiel diene die Untersuchung der Bewegung eines zweiarmigen Hebels, wie ihn Fig. 524 (a. f. S.) zeigt. Wir gehen von der

künstlich hergestellten Ruhelage aus, in der der Hebelarm wagerecht steht. Ist die Winkelbeschleunigung für die beginnende Bewegung, sobald der Hebel

Fig. 524.



frei gelassen wird, ι, so ist der Weg AB' für die dargestellte Drehung in zweiter Annäherung als $\frac{1}{2} p \iota \tau^2$, der Weg AB als $\frac{1}{2} g \tau^2$ anzusetzen, so daß für A

$$\mu z^2 = \frac{P}{g} \cdot \tfrac{1}{4} \tau^4 \left(p^2 \iota^2 + g^2 - 2 p i g \cos \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

anzusetzen ist. Ebenso folgt für $\bar{A}$

$$\mu \bar{z}^2 = \frac{\bar{P}}{g} \cdot \tfrac{1}{4} \tau^4 \left(\bar{p}^2 \iota^2 + g^2 + 2 p i g \cos \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Demnach ist

$$Z = \tfrac{1}{4} \tau^4 \left[\iota^2 \cdot \frac{P p^2 + \bar{P} \bar{p}^2}{g} + g (P + \bar{P}) - 2 \iota \cos \frac{\varepsilon}{2} (p P - \bar{p} \bar{P}) \right].$$

Das Minimum tritt ein für

$$\iota = \frac{Pp - \bar{P}\bar{p}}{\frac{P}{g} p^2 + \frac{\bar{P}}{g} \bar{p}^2} \cos \frac{\varepsilon}{2}.$$

Der Grenzübergang liefert für $\lim \varepsilon = 0$

$$\iota = \frac{Pp - \bar{P}p}{\frac{P}{g} p^2 + \frac{\bar{P}}{g} \bar{p}^2},$$

d. h. man erhält die bekannte Formel wieder, welche $\iota = \frac{Mo}{\Sigma r}$ entspricht.

Soll keine Bewegung aus der vorausgesetzten Ruhelage eintreten, so muß $Pp = \bar{P}p$ sein.

Als letztes Beispiel diene die Betrachtung eines pendelnden Körpers. Ein Punkt P des Körpers (vergl. Fig. 525) von der Masse μ hätte als frei schwingendes Fadenpendel bei dem Ausschlage α die Tangentialbeschleunigung $g \sin \alpha$, während er thatsächlich bei einer augenblicklichen Winkelbeschleunigung ι die Tangentialbeschleunigung $r \iota$ hat. Für ein Zeitelement τ entspricht der Beschleunigung $g \sin \alpha$ auf der Bahn der Weg $\frac{1}{2} g \sin \alpha \tau^2$, der Beschleunigung

$r\iota$ der Weg $\frac{1}{2} r\iota\tau^2$, so daß hier der Zwang in phoronomischer Hinsicht durch $\frac{1}{2}\tau^2(g \sin\alpha - r\iota)$ und in dynamischer Hinsicht durch $\frac{1}{4}\mu\tau^4(g \sin\alpha - r\iota)^2$ dargestellt wird. Für den Körper muß also

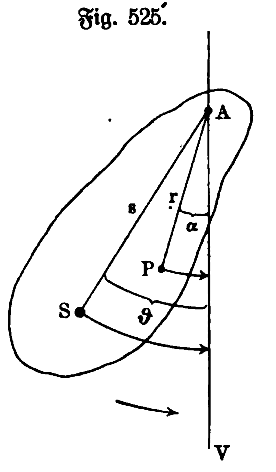
$$\frac{1}{4}\tau^4 \Sigma\mu(g \sin\alpha - r\iota)^2 = \frac{1}{4}\tau^4 \Sigma(\mu g^2 \sin^2\alpha - 2\mu g \sin\alpha r\iota + \mu r^2\iota^2)$$
$$= \frac{1}{4}\tau^4[g^2\Sigma\mu \sin^2\alpha - 2g\iota\Sigma\mu r \sin\alpha + \iota^2\Sigma\mu r^2]$$

ein Minimum sein. Das tritt ein für

$$\iota = \frac{g\Sigma\mu r \sin\alpha}{\Sigma\mu r^2}.$$

Bezeichnet man das Gewicht des Körpers mit G, den Abstand des Schwerpunktes S von der Drehungsachse mit s und die Abweichung der Geraden AS von der Vertikalen durch ϑ, so ist für die augenblickliche Stellung des Pendels die Lage des Schwerpunktes gegen die Vertikalebene AV bestimmt durch

Fig. 525.



$$\frac{G}{g}\cdot(s \sin\vartheta) = \Sigma\mu(r \sin\alpha).$$

Man hat also

$$\iota = \frac{G(s \sin\vartheta)}{\Sigma\mu r^2} = \frac{Mo}{\mathfrak{T}r},$$

d. h. man erhält für die Bestimmung der Winkelbeschleunigung die bekannte Formel wieder.

Soll aus einem, noch zu bestimmenden Zustand der Ruhe keine Bewegung eintreten, so muß $Mo = G(s \sin\vartheta) = 0$ sein, d. h. es muß $\vartheta = 0$ sein.

Das Princip von Gauß hat ebenso wie das Princip von Hamilton und das früher aufgestellte Princip der kleinsten Wirkung insofern ein besonderes Gepräge, als es die thatsächlichen Beziehungen aus allen möglichen Beziehungen durch Bestimmung eines Minimums (oder Maximums) ausscheidet.

Es steht in naher Verwandtschaft zu dem Principe der schnellsten Ankunft (vergl. S. 290), welches die Lichtbewegungen beherrscht.

Man hat aus der Existenz derartiger Principien auf eine bestimmte Zweckmäßigkeit in der Einrichtung der Außenwelt schließen wollen.

Kein Geringerer als Euler, dem die Mechanik so viel verdankt, sagt gelegentlich: „Da nämlich die Einrichtung der ganzen Welt die vorzüglichste ist, und da sie von dem weisesten Schöpfer herstammt, wird nichts in der Welt getroffen, woraus nicht irgend eine Maximal- oder Minimaleigenschaft hervorleuchtete; deshalb kann kein Zweifel bestehen, daß alle Wirkungen in der Welt ebensowohl durch die Methode der Maxima und Minima aus den Zwecken wie aus den wirkenden Ursachen selbst abgeleitet werden können.“

Eine genauere Betrachtung dieser Principien zeigt aber, daß bei ihrer Fassung lediglich eine Form gewählt worden ist, welche ebenso leicht vermieden werden kann.

So scheint sich z. B. das Licht nur auf Wegen kürzester Zeit auszubreiten, während es sich thatsächlich auf allen möglichen Wegen ausbreitet, und zwar so, daß sich die Wellen auf jenen besonderen Wegen verstärken und demnach dort für das Auge sichtbar werden.

So läßt sich das Princip von Gauß aus dem Principe von d'Alembert ableiten, und umgekehrt [1]).

Trotzdem ist die besondere Fassung der Principien, in welchen eine Maximal- oder Minimaleigenschaft ausgesprochen wird, bei deren Verwendung gelegentlich von Wert, wie die oben gegebenen Beispiele zeigen. Sie sagen aber in der besonderen Fassung nichts Neues, d. h. sie fügen nichts zu der allgemeinen Auffassung hinzu, welche durch das Princip des Parallelogramms, das Princip der Paarwirkung und das Princip von d'Alembert im Verein mit den zugehörigen Definitionen bestimmt wird.

---

[1]) Vergl. dazu Schefflers Abhandlung in Schlömilchs Zeitschr. f. Mathematik, III und Machs Mechanik, Kapitel 3 und 4.

Anwendungen der Kinetik des starren Körpers.

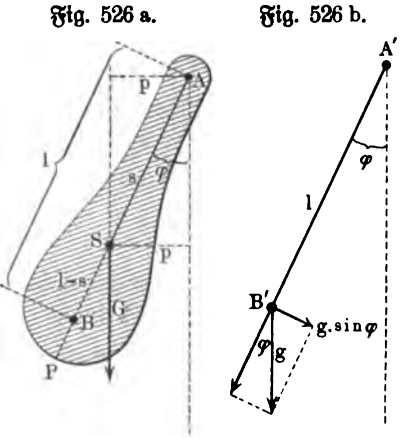
---

1. Das physische Pendel. Ein Körper, der um eine horizontale Achse Schwingungen vollführt, wird als physisches Pendel bezeichnet. Man stellt seine Bewegung am besten dar durch Vergleichung mit einem entsprechenden mathematischen Pendel von g l e i c h e r Winkelbeschleunigung.

In Fig. 526 a gilt für den pendelnden Körper, dessen Achse bei A durchtreten mag, während S seinen Schwerpunkt bezeichnet, gemäß Formel Nr. 192)

$$\iota = \frac{Mo}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} = \frac{G \cdot p}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} = \frac{G \cdot s \cdot \sin\varphi}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}.$$

Fig. 526 a. Fig. 526 b.



In Fig. 526 b gilt für das Fadenpendel

$$\iota = \frac{g \sin\varphi}{l}.$$

Aus den beiden Gleichungen folgt $l = \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r} \cdot g}{G \cdot s}$, d. h. giebt man einem Fadenpendel die hiermit bestimmte Länge, so stimmt seine Winkelbeschleunigung überein mit der Winkelbeschleunigung des vorgelegten pendelnden Körpers.

Führt man die Masse $M = \frac{G}{g}$ ein, so ist $l = \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{M \cdot s}$.

Giebt man der Geraden AS des Körpers dieselbe Anfangslage wie dem Pendelfaden $A'B'$, z. B. beide Male einem Ausschlage von 5^0 nach links entsprechend, so stimmt die Bewegung von AS genau überein mit der Bewegung von $A'B'$. Da nun die Dauer einer vollen Schwingung für das Fadenpendel (vergl. S. 177) angenähert bestimmt ist durch

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

so gilt für die Schwingungsdauer des pendelnden Körpers angenähert

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{G \cdot s}} = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{M \cdot s \cdot g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 242)$$

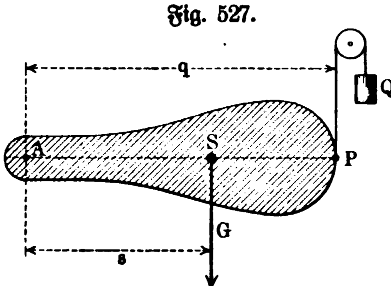
wobei G und M dessen Gewicht und Masse, $\mathfrak{Tr}$ dessen Trägheitsmoment für die Achse durch A und s den Abstand seines S Schwerpunktes von der Achse bezeichnet.

Durch Umkehrung der Formel Nr. 242) kann man das Trägheitsmoment $\mathfrak{Tr}$ durch den Versuch bestimmen, indem man die Schwingungsdauer T feststellt; man hat

$$\mathfrak{Tr} = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot G \cdot s.$$

Dabei ist der Wert des Momentes $G \,.\, s$ gemäß Fig. 527 zu bestimmen, nachdem man die Lage von P auf der Verlängerung von AS für die Ruhelage des pendelnden Körpers festgestellt hat; man hat

Fig. 527.



$$G \,.\, s = Q \,.\, q.$$

Trägt man $A'B' = l$ aus Fig. 526b auf AS in Fig. 526a auf, so daß $AB = l$ ist, so heißt B der **Schwingungspunkt** des pendelnden Körpers, während l selbst seine **reduzierte Pendellänge** genannt wird.

Läßt man den Körper um eine Achse durch B schwingen, welche der Achse durch A parallel ist, so ist die reduzierte Länge $\bar{l}$ für die neue Achse, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment $\overline{\mathfrak{Tr}}$ sein mag, gegeben als

$$\bar{l} = \frac{\overline{\mathfrak{Tr}}}{M(l-s)}.$$

Bezeichnet man das Trägheitsmoment für eine parallele Achse durch den Schwerpunkt S durch $\mathfrak{Tr}_0$, so ist

$$\mathfrak{Tr} = \mathfrak{Tr}_0 + s^2 M \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{Tr}} = \mathfrak{Tr}_0 + (l-s)^2 M,$$

d. h. man hat

$$\overline{\mathfrak{Tr}} = \mathfrak{Tr} + (l^2 - 2ls) M.$$

Da $\mathfrak{Tr} = lsM$ und $\overline{\mathfrak{Tr}} = \bar{l}(l-s)M$ ist, so folgt daraus

$$\bar{l}(l-s)M = lsM + (l^2 - 2ls)M$$

oder

$$\bar{l}(l-s) = l(l-s),$$

d. h. es ist $\bar{l} = l$.

Der pendelnde Körper hat also für die Achsen durch A und durch B **dieselbe** reduzierte Pendellänge, also auch **dieselbe** Schwingungsdauer.

Stellt man die Lage von B durch Versuche fest (Umdrehungspendel), so ist $AB = l$.

Denkt man s veränderlich, so ist auch

$$l = \frac{\mathfrak{Tr}}{Ms} = \frac{\mathfrak{Tr}_0}{Ms} + s$$

veränderlich. Führt man noch den Trägheitsarm ϱ_0 für $\mathfrak{Tr}_0$ ein, so daß $\mathfrak{Tr}_0 = M\varrho_0^2$ ist, so ist

$$l = \frac{\varrho_0^2}{s} + s.$$

Man hat $l = \infty$ für $s = 0$ und für $s = \infty$, während für $s = \varrho_0$ das Minimum von l im Werte von $l = 2\varrho_0$ eintritt, wie man unter anderem bei graphischer Darstellung der Hyperbel $(l - s)s = \varrho_0^2$ leicht sieht.

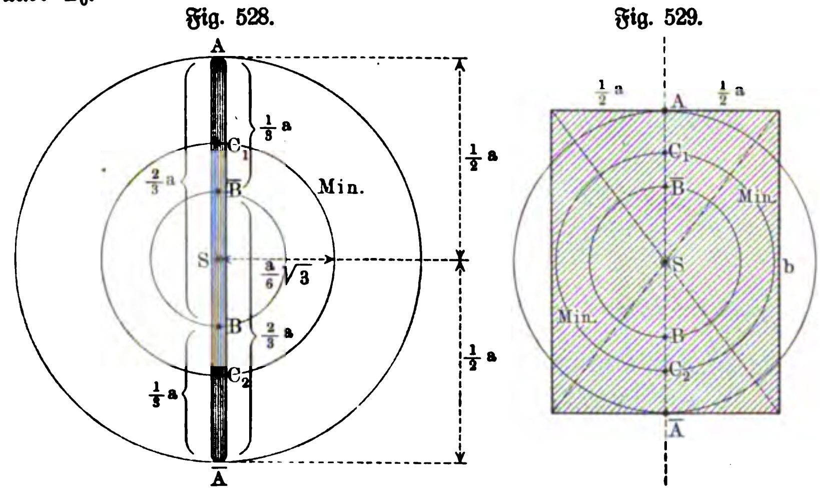
Demnach hat auch die Schwingungsdauer ein Minimum für

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\varrho_0}{g}}.$$

Da $l = 2\varrho_0$ ist für $s = \varrho_0$, so ist hier $l - s = \varrho_0$, d. h. man hat $l - s = s = \varrho_0$.

Schlägt man mit ϱ_0 um S in der Ebene der Zeichnung der Fig. 526 a einen Kreis, so läßt sich dieser auffassen als die Durchdringung eines Cylinders, dessen Seiten der Achse durch A parallel sind. Für jede Seite dieses Cylinders als Drehungsachse zeigt der pendelnde Körper die minimale Schwingungsdauer T_0.

Fig. 528. Fig. 529.



Für andere Werte von l bezw. T sind s und $l - s$ verschieden, so daß es zwei Kreise von den Radien s und $l - s$ um S giebt, für welche die entsprechenden Achsen zu demselben Werte von T führen.

Für einen prismatischen Stab von der Länge a, der an einem Ende aufgehängt ist, hat man z. B.

$$\mathfrak{Tr}_0 = \frac{M}{12}a^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tr} = \frac{M}{12}a^2 + M\frac{a^2}{4} = \frac{M}{3}a^2$$

und ferner $s = \frac{a}{2}$. Hier ist also

$$l = \frac{\frac{1}{3}Ma^2}{M \cdot \frac{a}{2}} = \frac{2}{3}a \quad \text{und} \quad l - s = \frac{1}{6}a.$$

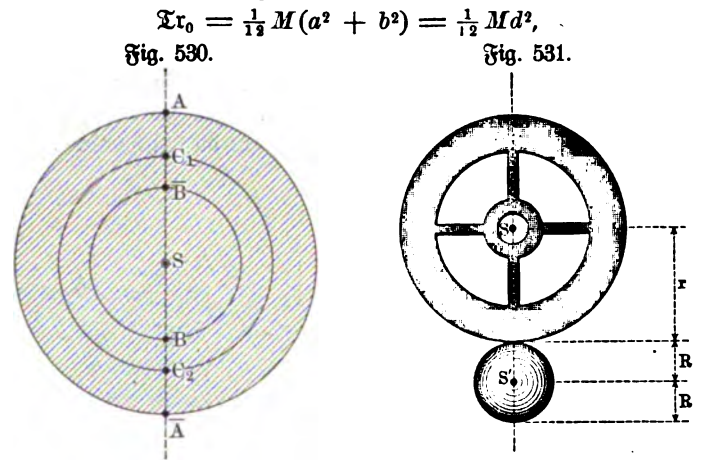
In Fig. 528 (a. v. S.) ist für die Achsen durch A, $\bar{B}$, B, $\bar{A}$, senkrecht zur Ebene der Zeichnung, die Schwingungsdauer T dieselbe und zwar $T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$.

Da $\varrho_0 = \frac{a}{6}\sqrt{3}$ ist, so liefern die Achsen durch C_1 und C_2, falls $SC_1 = SC_2 = \varrho_0$ ist, das Minimum der Schwingungsdauer, nämlich $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{a}{3g}\sqrt{3}}$.

Für eine rechteckige Platte (vergl. Fig. 529), welche um Achsen senkrecht zu ihrer Ebene schwingt, gilt Folgendes. Man hat

$$\mathfrak{T}r_0 = \tfrac{1}{12}M(a^2 + b^2) = \tfrac{1}{12}Md^2,$$

Fig. 530. Fig. 531.



falls man die Diagonale durch d bezeichnet, und ebenso $\varrho_0 = \frac{d}{6}\sqrt{3}$. Für eine Achse durch A ist $\mathfrak{T}r = \frac{1}{12}M(a^2 + 4b^2)$ und $s = \frac{b}{2}$, so daß gilt

$$l = \frac{\frac{1}{12}M(a^2 + 4b^2)}{M\cdot\frac{b}{2}} = \frac{a^2 + 4b^2}{6b} \quad \text{und} \quad l - s = \frac{a^2 + b^2}{6b}.$$

Für eine kreisförmige Platte (vergl. Fig. 530), welche um Achsen senkrecht zu ihrer Ebene schwingt, gilt Folgendes. Man hat $\mathfrak{T}r_0 = \frac{1}{2}Mr^2$ und ebenso $\varrho_0 = \frac{r}{2}\sqrt{2}$. Für eine Achse durch A ist $\mathfrak{T}r = \frac{3}{2}Mr^2$ und $s = r$, so daß gilt

$$l = \frac{\frac{3}{2}Mr^2}{Mr} = \tfrac{3}{2}r \quad \text{und} \quad l - s = \tfrac{1}{2}r.$$

Um $\mathfrak{T}r_0$ durch Versuche zu bestimmen, bestimmt man $\mathfrak{T}r$ für eine Achse durch A und erhält $\mathfrak{T}r_0 = \mathfrak{T}r - s^2M$.

Muß man mit einer Achse durch S arbeiten, weil sich in keinem Punkte A des Körpers eine Achse anbringen läßt, so verbindet man den Körper mit Massen von bekannten Trägheitsmomenten, wie es Fig. 531 zeigt.

Hier ist für eine Achse durch S anzusetzen

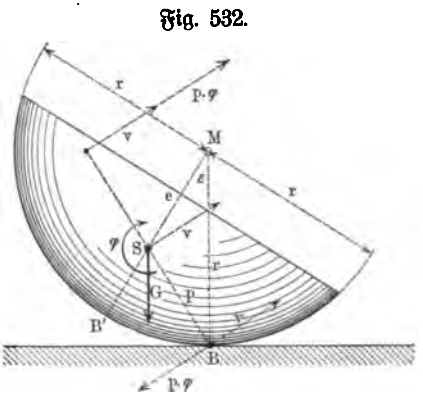
$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \mathfrak{T}\mathfrak{r}_0 + \tfrac{2}{5} m R^2 + m(R + r)^2,$$

falls man die Masse der hinzugefügten Hülfskugel vom Radius R durch m bezeichnet.

Aus der Beobachtung der Schwingungsdauer folgt $\mathfrak{T}\mathfrak{r}$ und daraus durch Rechnung $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0$.

2. **Die Wiege.** Ein Abschnitt einer Kugel oder eines Cylinders mag durch einen Anstoß aus seiner Ruhelage auf einer horizontalen Ebene entfernt werden, so daß er, sich wiegend ohne zu gleiten, Schwingungen vollführt, wie es Fig. 532 andeutet.

Fig. 532.



Bezeichnet man für den Schwerpunkt S die Geschwindigkeiten der Verschiebung und der Drehung bezw. mit $[v]$ und $[\varphi]$, so erhält der augenblickliche Drehpunkt B durch die Drehung um S die Geschwindigkeit $SB.\varphi = p.\varphi$ und durch die Verschiebung von S die Geschwindigkeit v. Da B für einen Zeitpunkt in Ruhe ist, so müssen sich $[v]$ und $[p\varphi]$ für B zerstören, wie es Fig. 532 für den Hingang (nach rechts) des Körpers zeigt.

Hat die ursprüngliche Vertikale MB' gegen ihre Ruhelage einen Ausschlag ε, so ist $p^2 = r^2 + e^2 - 2re\cos\varepsilon$, so daß $v^2 = \varphi^2(r^2 + e^2 - 2re\cos\varepsilon)$ ist.

Demnach ist die (aktuelle) Energie des Körpers für die Stellung ε gegeben als

$$\tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}\mathfrak{r}\varphi^2 = \tfrac{1}{2}\varphi^2[M(r^2 + e^2 - 2re\cos\varepsilon) + \mathfrak{T}\mathfrak{r}].$$

Diese Energie wird zu Null für den größten Ausschlag des Körpers (nach rechts), der für $\varepsilon = \alpha$ eintreten mag, wobei er in dieser Stellung α zur Umkehr kommt.

Die Arbeit, welche zwischen den Stellungen ε und α durch die äußeren Kräfte geleistet wird, läßt sich leicht berechnen, da die Reaktionen in B bei einer reinen Rollbewegung, wie wir sie voraussetzen, keine Arbeit leisten.

Die Höhe des Schwerpunktes S über der Horizontalen ist für die Stellung ε gegeben als $r - e\,.\cos\varepsilon$, so daß er von der Stellung ε bis zur Stellung α um

$$(r - e\,.\cos\alpha) - (r - e\cos\varepsilon) = e(\cos\varepsilon - \cos\alpha)$$

steigt.

Die Arbeit des Gewichtes Mg, welche für Senkungen positiv gerechnet wird, ist also

$$-Mg(\cos\varepsilon - \cos\alpha)\,.\,e,$$

während die entsprechende Änderung der Energie als

$$0 - \frac{1}{2}\varphi^2[M(r^2 + e^2 - 2re\cos\varepsilon) + \mathfrak{T}r]$$

bestimmt ist. Der Vergleich beider Ausdrücke liefert

$$\varphi^2 = \frac{2Mg \,.\, (\cos\varepsilon - \cos\alpha) \,.\, e}{M(r^2 + e^2 - 2re\cos\varepsilon) + \mathfrak{T}r}$$

und damit auch $v = p\varphi$.

Für $\varepsilon = +\alpha \ldots 0 \ldots -\alpha$ ist bezw. $\varphi^2 = 0 \ldots m^2 \ldots 0$, wobei m^2 das Maximum von φ^2 darstellt.

Für kleine Werte von ε, welche auch kleine Werte von α nach sich ziehen, ist die Klammer des Nenners darstellbar als

$$r^2 + e^2 - 2re\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \cdots\right) = (r - e)^2 + re \,.\, \varepsilon^2 \ldots$$

Hier kann man $re \,.\, \varepsilon^2$ gegen $(r - e)^2$ vernachlässigen, während im Zähler die Entwickelung der Klammer $\cos\varepsilon - \cos\alpha$ zu $\frac{1}{2}(\alpha^2 - \varepsilon^2)$ führen würde.

Für kleine Ausschläge gilt also, falls man $\mathfrak{T}r = \varrho^2 \,.\, M$ und

$$\frac{(r - e)^2 + \varrho^2}{e} = l$$

setzt,

$$\varphi^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varepsilon - \cos\alpha).$$

Diese Gleichung stimmt aber genau überein mit der entsprechenden Gleichung für ein mathematisches Pendel von der Länge l, dessen Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ist.

Demgemäß gilt hier

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(r - e)^2 + \varrho^2}{e \,.\, g}}.$$

Der ganze Vorgang läßt sich also so auffassen, als wenn ein Pendel von der Länge l um den beweglichen Punkt B seine Schwingungen vollführte.

Damit stimmt auch folgende Betrachtung überein. Wendet man die Gleichung $\iota = \frac{Mo}{\mathfrak{T}r}$ für B als Drehpunkt an, so gilt

$$\iota = \frac{(Mg) \,.\, e\sin\varepsilon}{\mathfrak{T}r + p^2 \,.\, M}.$$

Für kleine Ausschläge ist $p^2 \sim (r - e)^2$, so daß

$$\iota = \frac{g \,.\, \sin\varepsilon}{l} \quad \text{oder} \quad j_T = (l\iota) = g\sin\varepsilon$$

ist, womit wieder die Formeln des Pendels erreicht sind.

3. **Umfallen eines senkrechten Stabes.** Ein Stab OA mag in O durch ein Gelenk befestigt sein, wie es Fig. 533 zeigt. Wir wollen seine

Bewegung betrachten, wenn er aus der senkrechten Lage des (unsicheren) Gleichgewichtes durch einen kleinen Anstoß zum Umfallen gebracht wird.

Fig. 583.

Y
A
α
S
s
V
G
O
H
X

Bezeichnen wir das Trägheitsmoment für die Achse durch O mit $\mathfrak{Tr}$, so sind Winkelgeschwindigkeit φ und Winkelbeschleunigung ι für die Stellung α gegeben durch

$$\tfrac{1}{2}\varphi^2\mathfrak{Tr} - 0 = Gs(1 - \cos\alpha)$$

und durch

$$\iota = \frac{Gs\sin\alpha}{\mathfrak{Tr}}.$$

Die Reaktionen $[H]$ und $[V]$ von O lassen sich nach dem Principe von d'Alembert bestimmen, gemäß welchem das System der äußeren Kräfte (G, V, H) dem System der Effektivkräfte gleichwertig sein muß.



Gemäß den Formeln Nr. 107 a), bei deren Verwendung zu beachten ist, daß die Drehung in Fig. 583 umgekehrt erfolgt, als in Fig. 216 (K_T wechselt die Richtung!), gilt

$$H = -\varphi^2 M\xi + \iota M\eta$$
$$-G + V = -\varphi^2 M\eta - \iota M\xi.$$

Dabei ist $\xi = s\sin\alpha$ und $\eta = s\cos\alpha$, so daß

$$H = -\frac{2\,Gs(1 - \cos\alpha)}{\mathfrak{Tr}}\cdot M\,.\,s\sin\alpha + \frac{Gs\sin\alpha}{\mathfrak{Tr}}\cdot M\,.\,s\cos\alpha$$
$$= \frac{Gs^2M}{\mathfrak{Tr}}\sin\alpha(3\cos\alpha - 2)$$

und

$$V = G - \frac{2\,Gs(1 - \cos\alpha)}{\mathfrak{Tr}}\cdot M\,.\,s\cos\alpha - \frac{Gs\sin\alpha}{\mathfrak{Tr}}\cdot M\,.\,s\sin\alpha$$
$$= G\left[1 - \frac{s^2M}{\mathfrak{Tr}}(1 + 2\cos\alpha - 3\cos^2\alpha)\right]$$

ist.

Für $\alpha = 0$ ist $H = 0$, ebenso ist $H = 0$ für $\cos\bar{\alpha} = \frac{2}{3}$, d. h. für $\bar{\alpha} \sim 48^0\,10'$. Für $\alpha > \bar{\alpha}$ wird H negativ, so daß $[H]$ von $\alpha = 0^0 \ldots \bar{\alpha}$ nach rechts und dann nach links gerichtet ist; für $\alpha = 90^0$, d. h. beim Aufschlagen, ist $H = -\dfrac{2\,Gs^2M}{\mathfrak{Tr}}$.

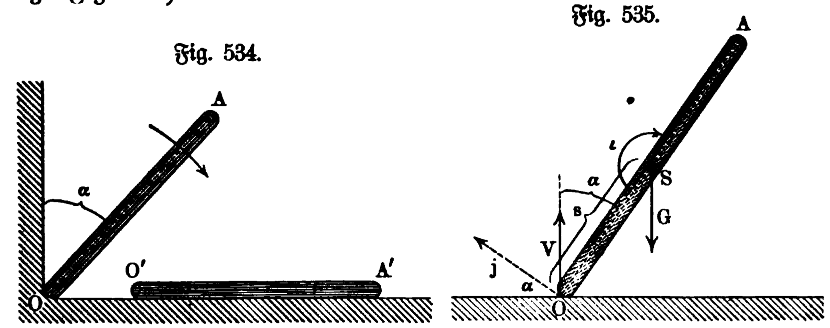
Im Gebiete $\alpha = 0^0 \ldots \bar{\alpha}$ hat H sein Maximum für $\alpha \sim 26^0\,40'$ vom Werte $0{,}31 \cdot \dfrac{Gs^2M}{\mathfrak{Tr}}$.

Für $\alpha = 0$ ist $V = G$, für $\alpha \sim 70^0\,30'$ hat V ein Minimum vom Werte $G\left(1 - \frac{4}{3}\dfrac{s^2M}{\mathfrak{Tr}}\right)$. Für $\alpha = 90^0$ ist $V = G\left(1 - \dfrac{s^2M}{\mathfrak{Tr}}\right)$.

Diese Betrachtungen lassen sich ohne weiteres auf eine Platte übertragen, welche um eine horizontale Achse umschlägt.

Ist der Stab bei O nicht durch ein Gelenk befestigt, sondern in einer Ecke aufgestellt, so gilt obige Betrachtung bis zu dem Punkte, wo H negativ wird ($\bar{\alpha} \sim 48^0 10'$) bezw. wegen des Auftretens der Reibung noch etwas weiter, während dann ein Ausgleiten des unteren Stabendes nach rechts hin erfolgt, so daß der Stab etwa in der Lage $O'A'$ zur Ruhe kommt.

Fällt endlich die seitlich stützende Wand der Fig. 534 fort, so ist die Verschiebung des Schwerpunktes und die Drehung um diesen zu behandeln (vergl. Fig. 535).



Bezeichnet man das Trägheitsmoment für den Schwerpunkt durch $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0$, so gilt für die Verschiebung

$$js = \frac{G - V}{M}$$

und für die Drehung

$$\iota = \frac{Vs \sin\alpha}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0}.$$

Da das Stangenende O sich wagerecht bewegt, so muß für dieses die (senkrechte) Beschleunigung der Verschiebung durch die Drehung aufgehoben werden. Die Drehung um S giebt O die Beschleunigung $j = s\iota = \frac{Vs^2 \sin\alpha}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0}$, deren Vertikalkomponente $\frac{Vs^2 \sin^2\alpha}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0}$ ist. Man hat also

$$\frac{G - V}{M} = \frac{Vs^2 \sin^2\alpha}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0},$$

d. h.

$$V = \frac{G}{1 + \frac{Ms^2 \sin^2\alpha}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_0}}$$

und damit ist js und ι endgültig bestimmt.

Da die lebendige Kraft der Stange bei Beginn der Bewegung den Wert Null hat, so erzeugt die Arbeit $Gs(1 - \cos\alpha)$ die lebendige Kraft für die Stellung α. Ist v die Geschwindigkeit von S und φ die Winkelgeschwindigkeit um S, so gilt also

$$Gs(1 - \cos\alpha) = \tfrac{1}{2} Mv^2 + \tfrac{1}{2} \mathfrak{T}\mathfrak{r}_0 \varphi^2.$$

Für das Stangenende O gilt wieder $v = s\varphi \sin\alpha$, so daß damit v und φ bestimmt ist.

Die wagerechte Geschwindigkeit von O ist im besondern $s\varphi\cos\alpha$.

4. Beschleunigte Schraubenbewegung. Eine (belastete) Schraube mag bei senkrechter Achsenstellung durch ihr eigenes Gewicht $Q = Mg$ sinken.

Um eine gleichförmige Abwärtsbewegung der Schraube zu erreichen, müßte ein hemmendes Moment vom Werte (vergl. S. 574)

$$Mo = Qr_m tg(\alpha_m - \varphi)$$

angebracht werden, wobei sich r_m und α_m wieder auf die mittlere Schraubenlinie beziehen.

Fällt dieses Moment fort, so wird so viel aktuelle Energie (lebendige Kraft) erzeugt, als der Arbeit dieses hemmenden Momentes entsprechen würde.

Da die volle Umdrehung, für welche die Arbeit $Mo \,.\, 2\pi$ in Rechnung zu stellen ist, der Senkung um eine Ganghöhe h entspricht, so entspricht einer Senkung s die Arbeit

$$\frac{s}{h} \cdot 2\pi \,.\, Qr_m tg(\alpha_m - \varphi),$$

wofür man auch, mit Rücksicht auf $h = 2\pi r_m \,.\, tg\,\alpha_m$, schreiben kann

$$Qs\frac{tg(a_m - \varphi)}{tg\,\alpha_m}.$$

Ist v die Geschwindigkeit in Richtung der Schraubenachse, welche der Senkung s entspricht, so ist die zugehörige Winkelgeschwindigkeit φ bestimmt durch

$$r_m\varphi : v = 2\pi r_m : h,$$

so daß

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{v}{h} \quad \text{ist.}$$

Demgemäß ist die gesamte aktuelle Energie, welche der Senkung s entspricht

$$\tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}\varphi^2\mathfrak{T}r = \tfrac{1}{2}v^2\left(M + \frac{4\pi^2}{h^2} \cdot \mathfrak{T}r\right).$$

Da $h = 2\pi r_m \,.\, tg\,\alpha_m$ ist, so ist $\frac{4\pi^2}{h^2} = \frac{1}{r_m^2 \,.\, tg^2\alpha_m}$ und man hat, falls man die Masse M für den Abstand r_m reduziert, so daß $\mathfrak{T}r = r_m^2 \,.\, \mu$ wird, für diese Energie den Wert

$$\tfrac{1}{2}v^2(M + \mu \,.\, cot^2\alpha_m).$$

Demgemäß gilt die Gleichung

$$Qs\frac{tg(\alpha_m - \varphi)}{tg\,\alpha_m} = \tfrac{1}{2}v^2(M + \mu \,.\, cot^2\alpha_m).$$

Bei gleichmäßiger Beschleunigung ist $\frac{1}{2}v^2 = j \,.\, s$, so daß sich dann

$$j = \frac{Q \,.\, tg(\alpha_m - \varphi) \,.\, tg\,\alpha_m}{M \,.\, tg^2\alpha_m + \mu} = g \cdot \frac{tg(\alpha_m - \varphi) \,.\, tg\,\alpha_m}{tg^2\alpha_m + \frac{\mu}{M}}$$

ergiebt.

Aus dem Werte von j folgt dann für einen bestimmten Wert von s

$$v^2 = 2j \cdot s.$$

Ist die Schraube an ihren Hebelarmen mit großen Schwungkugeln versehen, wie es z. B. bei Prägewerken der Fall ist, so ist $M \cdot tg^2 \alpha$ im Nenner gegen μ zu vernachlässigen, bezw. $tg^2 \alpha_m$ gegen $\frac{\mu}{M}$; man hat hier

$$j \sim g \cdot \frac{M}{\mu} \cdot tg(\alpha_m - \varphi) \cdot tg\, \alpha_m.$$

Ist z. B. $M = 300$ kg, und kommen dabei 200 kg auf die Schwungkugeln im Abstande $20\, r_m$, so ist $\mu \sim 270\, M$, also $\frac{\mu}{M} \sim 270$, während $tg^2 \alpha_m$ für $\alpha_m = 11^\circ 20'$ den Wert 0,04 hat.

Wird die Schraube nicht lediglich sich selbst überlassen, sondern außerdem im Sinne einer Senkung durch äußere Kräfte gedreht, deren Arbeit $\mathfrak{A}$ ist, so gilt

$$\mathfrak{A} + Qs \frac{tg(\alpha_m - \varphi)}{tg\, \alpha_m} = \tfrac{1}{2} v^2 (M + \mu \cdot cot^2 \alpha_m).$$

Handelt es sich um die verzögerte Bewegung, welche eine sich aufwärts bewegende Schraube durch ihr Gewicht erleidet, so ist in den entwickelten Formeln ($\mathfrak{A} = 0$) das Vorzeichen von φ umzukehren.

Das Arbeitsvermögen einer reibungslos ($\varphi = 0$) sinkenden Schraube ist ($\frac{1}{2} v^2 = j \cdot s$) proportional zu j, d. h. also für

$$j \sim g \cdot \frac{M}{\mu} \cdot tg(\alpha_m - \varphi) \cdot tg\, \alpha_m,$$

proportional zu $tg\, \alpha_m \cdot tg\, \alpha_m$. Demnach ist der Wirkungsgrad hier

$$\eta = \frac{tg(\alpha_m - \varphi) \cdot tg\, \alpha_m}{tg\, \alpha_m \cdot tg\, \alpha_m} = \frac{tg(\alpha_m - \varphi)}{tg\, \alpha_m}.$$

Für das Heben um die Strecke s ist der Wirkungsgrad in gleicher Weise

$$\eta' = \frac{tg\, \alpha_m}{tg(\alpha_m + \varphi)}.$$

Demnach ist für einen ganzen Hub (Heben und Senken) als Wirkungsgrad

$$\eta \cdot \eta' = \frac{tg(\alpha_m - \varphi)}{tg(\alpha_m + \varphi)}$$

in Rechnung zu stellen.

Für $\alpha = 11^\circ 20'$ und $\varphi = 5^\circ 40'$ ist $tg\, \alpha = 0{,}2$ und $tg\, \varphi = 0{,}01$ und $\eta \cdot \eta' \sim \frac{1}{3}$.

5. **Beschleunigte Rollenbewegung.** Es sind die Bewegungsverhältnisse gemäß Fig. 536 zu untersuchen.

Das Gewicht Q an der losen Rolle EG soll durch das Gewicht P gehoben werden. Der Halbmesser der losen Rolle sei r_1, das Gewicht derselben mit Zubehör V, das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}r_1$. Der Halbmesser der festen Rolle AB sei r_2, das Gewicht derselben mit Zubehör W, das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}r_2$.

Für die parallele Lage der Seilenden haben wir, unter j die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes P, unter j_1 die Beschleunigung der aufsteigenden Last $Q + V$, unter j_2 die Beschleunigung der drehenden Bewegung am Umfange der losen Rolle verstanden,

$$j = j_1 + j_2.$$

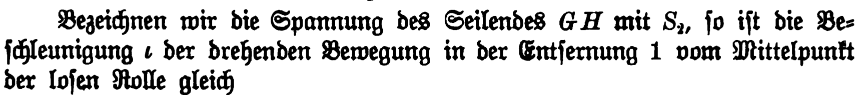
Fig. 536.

Setzen wir voraus, daß das Seil auf dem Umfange der losen Rolle nicht gleiten kann, so ist die Beschleunigung j_2 der drehenden Bewegung gleich der Beschleunigung j_1 der fortschreitenden, daher

$$j = 2 j_1.$$

Es sei S_1 die Spannung des Seilendes BE, so hat man

$$1)\quad j = \frac{P - S_1}{\frac{P}{g} + \frac{\mathfrak{T}r_2}{r_2^2}} = 2 j_1.$$



Bezeichnen wir die Spannung des Seilendes GH mit S_2, so ist die Beschleunigung ι der drehenden Bewegung in der Entfernung 1 vom Mittelpunkt der losen Rolle gleich

$$\frac{(S_1 - S_2) r_1}{\mathfrak{T}r_1}.$$

Hieraus folgt

$$2)\quad j_1 = \frac{(S_1 - S_2) r_1^2}{\mathfrak{T}r_1} = \frac{j}{2}.$$

Andererseits ist für die aufsteigende Bewegung der Last $Q + V$ dieselbe Beschleunigung j_1, gleich

$$3)\quad j_1 = \frac{S_1 + S_2 - (Q + V)}{\frac{Q + V}{g}} = \frac{j}{2}.$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich j, j_1, S_1 und S_2 entwickeln. Aus 2) und 3) erhalten wir

$$2 S_1 = j_1 \frac{\mathfrak{T}r_1}{r_1^2} + j_1 \frac{Q + V}{g} + Q + V,$$

und aus 1)

$$2 S_1 = 2\left[P - 2 j_1\left(\frac{P}{g} + \frac{\mathfrak{T}r_2}{r_2^2}\right)\right],$$

deshalb ist

$$j_1\left(\frac{\mathfrak{T}r_1}{r_1^2} + \frac{Q + V}{g} + 4\,\frac{P}{g} + 4\,\frac{\mathfrak{T}r_2}{r_2^2}\right) = 2 P - (Q + V),$$

$$j_1 = \tfrac{1}{2}\,\frac{P - \frac{Q + V}{2}}{\frac{P}{g} + \frac{Q + V}{4 g} + \frac{\mathfrak{T}r_2}{r_2^2} + \frac{\mathfrak{T}r_1}{4 r_1^2}} = \frac{j}{2},$$

$$S_1 = P - j\left(\frac{P}{g} + \frac{\mathfrak{T}r_2}{r_2^2}\right),$$

$$S_2 = \frac{Q + V}{2} + \frac{j_1}{2}\left(\frac{Q + V}{g} - \frac{\mathfrak{T}r_1}{r_1^2}\right).$$

Die übrigen Größen v und s der Bewegung für die Zeit t ergeben sich nun auf leichte Weise.

Statt dessen kann man auch folgendermaßen schließen.

Bezeichnen wir den in der Zeit t von dem Gewichte P zurückgelegten Weg mit s_1, den in derselben Zeit von $Q + V$ zurückgelegten Weg mit s_2, so ist

$$s_1 = \tfrac{1}{2} j t^2 \quad \text{und} \quad s_2 = \tfrac{1}{2} j_1 t^2.$$

Hieraus folgt, da $j = 2 j_1$ ist,

$$s_1 = 2 s_2.$$

Die von dem Gewicht P verrichtete Arbeitsgröße während der Zeit t ist $P s_1$, die von der Last $Q + V$ verrichtete dagegen

$$-(Q + V) s_2 \quad \text{oder} \quad -\tfrac{1}{2}(Q + V) s_1.$$

Die Arbeit $\mathfrak{A}$ der ganzen Maschine ist daher

$$\mathfrak{A} = \left(P - \frac{Q + V}{2}\right) s_1.$$

Andererseits ergiebt sich die Energie der ganzen Maschine nach Formel Nr. 237)

$$E = \tfrac{1}{2} M v^2 + \tfrac{1}{2} \varphi^2 \Sigma \mathfrak{r}.$$

Der erste Summand bestimmt die Arbeit des sinkenden Gewichtes P und die der aufsteigenden Last $Q + V$, der zweite Summand dagegen die Arbeit der drehenden festen und losen Rolle.

Das Gewicht P habe die Geschwindigkeit v_2, so ist, unter φ_2 die Winkelgeschwindigkeit der festen Rolle verstanden,

$$v_2 = r_2 \varphi_2.$$

Ebenso ist für die Geschwindigkeit v_1 der Last $Q + V$ und die Winkelgeschwindigkeit φ_1 der losen Rolle

$$v_1 = r_1 \varphi_1.$$

Außerdem aber haben wir, da $v_2 = j t$, $v_1 = j_1 t$ und $j_1 = \dfrac{j}{2}$ ist,

$$v_2 = 2 v_1.$$

Nach diesen Vorbemerkungen ist, falls man v statt v_2 einführt

$$E = \tfrac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 + \tfrac{1}{2} \frac{Q + V}{g} \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} \left(\frac{v}{r_2}\right)^2 \Sigma \mathfrak{r}_2 + \tfrac{1}{2} \left(\frac{v}{2 r_1}\right)^2 \Sigma \mathfrak{r}_1,$$

d. h.

$$E = \tfrac{1}{2} v^2 \left(\frac{P}{g} + \frac{Q + V}{4 g} + \frac{\Sigma \mathfrak{r}_2}{r_2^2} + \frac{\Sigma \mathfrak{r}_1}{4 r_1^2}\right).$$

Setzen wir die beiden entwickelten Werte $\mathfrak{A}$ und E einander gleich, so entsteht

$$\left(P - \frac{Q + V}{2}\right) s_1 = \tfrac{1}{2} v^2 \left(\frac{P}{g} + \frac{Q + V}{4 g} + \frac{\Sigma \mathfrak{r}_2}{r_2^2} + \frac{\Sigma \mathfrak{r}_1}{4 r_1^2}\right).$$

Für $s_1 = \dfrac{v^2}{2 j}$ ergiebt sich die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes P

$$j = \frac{P - \frac{Q+V}{2}}{\frac{P}{g} + \frac{Q+V}{4g} + \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_2}{r_2^2} + \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_1}{4 r_1^2}} = 2 j_1.$$

6. Bewegung eines Eisenbahnzuges unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes. Da der Luftwiderstand (vergl. S. 164) dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, so hat die Beschleunigung bei der Wirkung einer konstanten Kraft die Formel

$$j = k(b^2 - v^2),$$

wobei k eine positive Konstante bezeichnet, während die der konstanten Kraft entsprechende Beschleunigung kb^2 positiv oder negativ sein kann.

Bezeichnet man mit v_1 und v_2 bezw. die Anfangs- und Endgeschwindigkeit für ein bestimmtes Bahnelement σ, das in der Zeit τ durchlaufen wird, so gilt für die Bewegung auf diesem in zweiter Annäherung

$$\tfrac{1}{2} v_2^2 - \tfrac{1}{2} v_1^2 = j \cdot \sigma.$$

Dabei ist j mit der Mittelgeschwindigkeit $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$ gemäß der Formel $j = k(b^2 - v^2)$ zu bilden, so daß sich

$$2\sigma k = \frac{v_2^2 - v_1^2}{b^2 - v^2}$$

ergiebt.

Bildet man den Ausdruck

$$1 + 2\sigma k = \frac{v_2^2 - v_1^2 + b^2 - v^2}{b^2 - v^2},$$

so ist in diesem mit Rücksicht auf einen nachfolgenden Grenzübergang v durch v_1 oder durch v_2 ersetzbar. Für $v = v_2$ ergiebt sich

$$1 + 2\sigma k = \frac{b^2 - v_1^2}{b^2 - v_2^2}.$$

Wendet man die gewonnene Formel auf n einander folgende gleiche Bahnelemente σ an, denen die Anfangs- bezw. Endgeschwindigkeiten $v_0, v_1, v_2, \ldots v_{n-1}, v$ entsprechen, so ergiebt sich bei Multiplikation der n so entstehenden Gleichungen

$$(1 + 2\sigma k)^n = \frac{b^2 - v_0^2}{b^2 - v^2}.$$

Für $n\sigma = s$ ergiebt sich demnach, falls $\lim n = \infty$ gesetzt wird,

$$1) \quad e^{2sk} = \frac{b^2 - v_0^2}{b^2 - v^2} \quad \text{und} \quad v = \sqrt{b^2 - (b^2 - v_0^2)e^{-2sk}}.$$

Hiermit ist eine *endliche* Wegstrecke s zu der entsprechenden Anfangsgeschwindigkeit v_0 und zu der entsprechenden Endgeschwindigkeit v in Beziehung gesetzt.

Für ein Zeitelement τ gilt ferner in zweiter Annäherung

$$v_2 - v_1 = j\tau = k(b^2 - v^2)\tau,$$

falls v_1 und v_2 wiederum bezw. Anfangs- und Endgeschwindigkeit für das Element bezeichnen und $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$ ist.

Man hat also für $v_2 - v_1 = \delta$

$$k\tau = \frac{\delta}{b^2 - v^2}$$

und demnach auch $2bk\tau = \frac{2b\delta}{b^2 - v^2}$.

Um auch hier auf Produkte zu kommen, führen wir folgende Umformung ein. Nach der Formel

$$\frac{1+a}{1-a} = \frac{(1+a)(1+a)}{(1-a)(1+a)} = \frac{1+2a+a^2}{1-a^2}$$

gilt für kleine Werte von a in erster Annäherung

$$\frac{1+a}{1-a} \sim 1 + 2a.$$

Für $a = bk\tau = \frac{b\delta}{b^2 - v^2}$ gilt also in erster Annäherung

$$1 + 2bk\tau = 1 + \frac{2b\delta}{b^2 - v^2} = \frac{1 + \dfrac{b\delta}{b^2 - v^2}}{1 - \dfrac{b\delta}{b^2 - v^2}} = \frac{b^2 - v^2 + b\delta}{b^2 - v^2 - b\delta}$$

$$= \frac{(b + \frac{1}{2}\delta)^2 - v^2 - \frac{1}{4}\delta^2}{(b - \frac{1}{2}\delta) \;\; - v^2 - \frac{1}{4}\delta^2} \sim \frac{(b + \frac{1}{2}\delta)^2 - v^2}{(b - \frac{1}{2}\delta) \;\; - v^2}$$

$$\sim \frac{(b + v + \frac{1}{2}\delta)(b - v + \frac{1}{2}\delta)}{(b + v - \frac{1}{2}\delta)(b - v - \frac{1}{2}\delta)} \sim \frac{(b + v_2)(b - v_1)}{(b + v_1)(b - v_2)}.$$

Man hat also in erster Annäherung

$$1 + 2bk\tau = \frac{b - v_1}{b + v_1} \cdot \frac{b + v_2}{b - v_2}.$$

Wendet man die gewonnene Gleichung auf n einander folgende Zeitelemente von der gleichen Dauer τ an, für welche die Anfangs- und Endgeschwindigkeiten als $v_0, v_1, v_2, \ldots v_{n-1}, v$ gegeben sind, so folgt bei Multiplikation der n Gleichungen

$$(1 + 2bk\tau)^n = \frac{b - v_0}{b + v_0} \cdot \frac{b + v}{b - v}.$$

Für $t = n\tau$ gilt also, falls $\lim n = \infty$ gesetzt wird,

$$e^{2bkt} = \frac{b - v_0}{b + v_0} \cdot \frac{b + v}{b - v},$$

woraus

$$2) \quad t = \frac{1}{2bk} \cdot \log nat \left[\frac{b - v_0}{b + v_0} \cdot \frac{b + v}{b - v}\right]$$

und

$$3) \quad v = b\,\frac{(b + v_0)\,e^{2bkt} - (b - v_0)}{(b + v_0)\,e^{2bkt} + (b - v_0)}$$

folgt.

Aus 1) und 3) ergiebt sich bei Elimination von v

$$4)\quad s = \frac{1}{k}\, log\, nat \left[\frac{(b + v_0)\, e^{bkt} + (b - v_0)\, e^{-bkt}}{2b}\right].$$

Die entwickelten Gleichungen sind ohne weiteres brauchbar, falls b^2 eine positive Größe ist.

Ist b^2 eine negative Größe, so muß zunächst Gleichung 2) umgeformt werden. Setzt man in diesem Falle $b = ib'$, so ist

$$e^{2b'kti} = \frac{b'i - v_0}{b'i + v_0} \cdot \frac{b'i + v}{b'i - v} = \frac{(b'^2 + vv_0) + ib'(v_0 - v)}{(b'^2 + vv_0) - ib'(v_0 - v)}.$$

Setzt man $\frac{b'(v_0 - v)}{b'^2 + vv_0} = tg\,\lambda$, so ist also

$$e^{2b'kti} = \frac{1 + i\,tg\,\lambda}{1 - i\,tg\,\lambda}$$

und

$$b'kt = \frac{1}{2i}\, log\, nat \frac{1 + i\,tg\,\lambda}{1 - i\,tg\,\lambda}.$$

Durch Division der bekannten Formeln

$$e^{+i\,.\,arc\,\lambda} = cos\,\lambda + i\,sin\,\lambda \quad \text{und} \quad e^{-i\,.\,arc\,\lambda} = cos\,\lambda - i\,sin\,\lambda$$

erhält man

$$e^{2i\,.\,arc\,\lambda} = \frac{1 + i\,tg\,\lambda}{1 - i\,tg\,\lambda}$$

und

$$arc\,\lambda = \frac{1}{2i}\, log\, nat \frac{1 + i\,tg\,\lambda}{1 - i\,tg\,\lambda}.$$

Demnach ist

$$b'kt = arc\,\lambda,$$

falls $tg\,\lambda = \frac{b'(v_0 - v)}{b'^2 + vv_0}$ gesetzt wird.

Giebt man $tg\,\lambda$ die Form $\frac{\frac{1}{b'} \cdot v_0 - \frac{1}{b'} \cdot v}{1 + \frac{1}{b'} \cdot v_0 \cdot \frac{1}{b'} \cdot v}$, so sieht man, daß $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ gesetzt werden darf, falls $tg\,\lambda_1 = \frac{v_0}{b'}$ und $tg\,\lambda_2 = \frac{v}{b'}$ ist.

Man hat also jetzt

$$t = \frac{1}{b'k}\,[arc\,\lambda_1 - arc\,\lambda_2]$$

oder

$$2')\quad t = \frac{1}{b'k}\left[arc\,tg\,\frac{v_0}{b'} - arc\,tg\,\frac{v}{b'}\right]$$

und

$$3')\quad arc\,tg\,\frac{v}{b'} = arc\,tg\,\frac{v_0}{b'} - b'kt$$

oder

$$v = b' \cdot \frac{v_0 - b'\,tg\,(b'kt)}{b' + v_0\,tg\,(b'kt)}.$$

In Gleichung 4) geht der Zähler der rechten Seite für $b = ib'$ über in

$$b'i\,(e^{ib'kt} + e^{-ib'kt}) + v_0\,(e^{ib'kt} - e^{-ib'kt}),$$

d. h. in $2\,b'i\cos(b'kt) + 2\,v_0 i \sin(b'kt)$, so daß sich ergiebt

$$4')\quad s = \frac{1}{k}\, log\, nat\,.\left[\cos(b'kt) + \frac{v_0}{b'}\sin(b'kt)\right].$$

Wir betrachten nun zunächst einen Block vom Gewichte G, der auf einer schiefen Ebene von der Neigung α unter der Einwirkung einer Kraft $[P]$, welche der Ebene parallel ist, abwärts gleitet.

Die treibende Kraft ist hier $P + G(\sin\alpha - f\cos\alpha)$, falls man den Reibungskoeffizienten mit f bezeichnet, die Beschleunigung also, unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes,

$$g \cdot \frac{P + G(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{G} - kv^2.$$

Hier ist also

$$b^2 = \frac{g}{k} \cdot \frac{P + G(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{G} = \frac{g}{k}\left(\frac{P}{G} + \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}\right).$$

Erfahrungsmäßig ist in diesem Falle der Luftwiderstand bestimmt durch den Ansatz

$$\frac{\gamma}{g} \cdot F \,.\, v^2,$$

falls γ das Gewicht von 1 cbm Luft (im Mittel 1,24 kg bei 10° C.) und F die widerstehende Fläche bezeichnet.

Demgemäß ist die entsprechende Beschleunigung für eine Masse vom Gewichte G

$$\frac{\gamma \,.\, F}{G} \cdot v^2,$$

so daß $k = \dfrac{\gamma \,.\, F}{G}$ zu setzen ist.

Als widerstehende Fläche F ist bei ruhiger Luft die Projektion der Vorderfläche des bewegten Körpers auf eine Ebene, senkrecht zur Richtung der Bewegung, zu nehmen, falls der Körper eine relativ geringe Längenausdehnung hat. Ist letzteres nicht der Fall, wie z. B. bei Eisenbahnzügen, so hat man auch andere Querschnitte des Körpers zu berücksichtigen.

Man rechnet z. B. bei Eisenbahnzügen nach Frank (Hannover) auf Lokomotive und Tender 7 qm, auf den folgenden Wagen 1,7 qm und dann für jeden weiteren Wagen 0,5 qm, um F zu bilden.

Man hat also für die Rechnung allgemein im Falle des gleitenden Blockes

$$k = \frac{\gamma \,.\, F}{G} \quad \text{und} \quad b^2 = \frac{g}{\gamma F}\left(P + \frac{G\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}\right).$$

Handelt es sich nicht um einen gleitenden Block, sondern um Fuhrwerke auf Rädern, so hat man wieder (vergl. S. 730) die Masse m_1 der rollenden Teile (Räder und auch Achsen) und die Masse m_2 der übrigen Teile des Fuhrwerkes voneinander zu unterscheiden.

Führt man auch die Gleichgewichtsneigung α_0 wieder ein, so ist hier (vergl. S. 781)

$$j = \frac{P + (m_1 + m_2) g (\alpha - \alpha_0) - \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot v^2}{m_1 + m_2 + \mu},$$

falls wieder μ die Masse des materiellen Punktes bezeichnet, welche die rollenden Teile im Abstande des Radhalbmessers R vom Mittelpunkte der Drehung ersetzt.

Man hat also

$$b^2 = g \cdot \frac{P + (m_1 + m_2) g (\alpha - \alpha_0)}{\gamma \cdot F} \quad \text{und} \quad k = \frac{\gamma \cdot F}{g (m_1 + m_2 + \mu)}$$

Wird P zum Bremsen benutzt, so ist es natürlich negativ in Rechnung zu stellen, und zwar als $-f \cdot N$ für N als Normaldruck.

Für $P = 0$ und $j = 0$ und $v = c$ ergiebt sich $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 + \frac{\gamma}{g} \frac{F \cdot c^2}{(m_1 + m_2) g}$, und zwar bedeutet $\bar{\alpha}_0$ dann die Gleichgewichtsneigung unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes, so daß $\bar{\alpha}_0 (m_1 + m_2) g$ die Zugkraft bei der Geschwindigkeit c für die Horizontalebene ist (vergl. S. 617).

Ist für einen Zug $(m_1 + m_2) g = 167\,t$ und $\mu g = 14\,t$ und $F = 11{,}7$ qm, so ist für $\alpha_0 = 0{,}0025$

$$\bar{\alpha}_0 = 0{,}0025 + \frac{1{,}24}{9{,}81} \cdot \frac{11{,}7 \cdot c^2}{167\,000}.$$

Für $c = 20$ ergiebt sich z. B. $\bar{\alpha}_0 = 0{,}0025 + 0{,}0035$, d. h. durch den Luftwiderstand wächst die erforderliche Zugkraft auf horizontaler Bahn bei einem Gewichte G von $0{,}0025 \cdot G$ auf $0{,}0060 \cdot G$.

Für den betrachteten Zug ist für kg als Einheit

$$k = \frac{1{,}24 \cdot 11{,}7}{181\,000} = 0{,}000\,080\,2 \quad \text{und} \quad b^2 = 9{,}81 \cdot \frac{P + 167\,000 (\alpha - \alpha_0)}{1{,}24 \cdot 11{,}7}.$$

Für eine Bremskraft $P = -12\,t$ ist bei horizontaler Bahn $(\alpha = 0)$ $b^2 = -8396{,}5$, so daß die zweite Gruppe von Formeln benutzt werden muß $(b' = 91{,}63)$.

Für $v_0 = 20$ und $v = 0$ ergiebt z. B. Gleichung 2')

$$t = 136{,}1 \cdot arc \cdot (12^0\, 19') = 29{,}3''$$

als die zum Bremsen notwendige Zeit.

Aus Gleichung 1) folgt $s = 291$ m als zugehörige Strecke, dasselbe Ergebnis giebt Gleichung 4') für $t = 29{,}3''$.

Für eine Neigung $\alpha = 1 : 200$ ist $b^2 = -7831{,}5$ bei $P = -12\,t$. Hier ist die Bremszeit $t = 31{,}3''$ und die Bremsstrecke $s = 311$ m.

Vergleicht man diese Zahlen mit den Zahlen, die man bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes $(k = 0)$ findet, wobei man eine gewöhnliche gleichmäßig-geänderte Bewegung vor sich hat, so zeigt sich, daß die Bremszeiten nur um Zehntel von Sekunden, die Bremsstrecken um weniger als 10 m verändert werden.

Während also der Luftwiderstand für die Größe der aufgewendeten Zugkraft von erheblicher Bedeutung ist, kann er bei Betrachtung der Bremswirkung vernachlässigt werden.

7. Das Kurbelgetriebe nebst Schwungrad. Das in Fig. 124 dargestellte Getriebe wird durch die Fig. 537 a und 537 b genauer erläutert. T_1 und T_2 bezeichnen die beiden toten Punkte des Kurbelkreises (B) und A_1 und A_2 die zugehörigen äußersten Stellungen des Kreuzkopfes (A), dessen Hin-

Fig. 537 a.

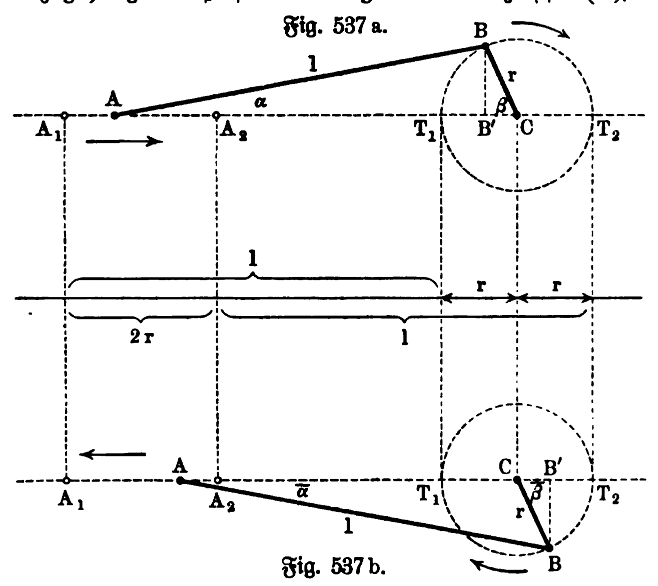


Fig. 537 b.

gange die Bahn A_1A_2 und dessen Rückgange die Bahn A_2A_1 entspricht, so daß $A_1C = l + r$, $A_2C = l - r$ und $A_1A_2 = 2r$ ist.

Die Schwingung von A auf seiner Bahn ist für den Hingang (Fig. 537 a) bestimmt durch

$$A_1A = A_1C - AC = (l + r) - (l\cos\alpha + r\cos\beta)$$
$$= r(1 - \cos\beta) + l(1 - \cos\alpha).$$

Für den Hergang gilt (vergl. Fig. 537 b)

$$A_2A = CA - CA_2 = (l\cos\bar{\alpha} - r\cos\bar{\beta}) - (l - r)$$
$$= r(1 - \cos\bar{\beta}) - l(1 - \cos\bar{\alpha}).$$

Dabei sind die Stellungswinkel β und $\bar{\beta}$ der Kurbel von den Totpunktlagen T_1 und T_2 aus im Sinne der Bewegung zu rechnen, von 0° bis 180°.

Durch β und $\bar{\beta}$ werden α und $\bar{\alpha}$ bestimmt mit Hülfe der für Fig. 537 a und 537 b übereinstimmenden Gleichungen

$$BB' = l\sin\alpha = r\sin\beta \text{ und } BB' = l\sin\bar{\alpha} = r\sin\bar{\beta},$$

so daß $\sin\alpha = \frac{r}{l}\sin\beta$ und $\sin\bar{\alpha} = \frac{r}{l}\sin\bar{\beta}$ ist.

Da bei Konstruktionen in der Regel $l \geqq 5r$ ist, so liegt $\sin\alpha$ jedenfalls in der Regel, entsprechend $\beta = 0 \ldots 90^0 \ldots 180^0$, in den Grenzen $0 \ldots \frac{1}{5} \ldots 0$ und α selbst in den Grenzen $0^0 \ldots 11^0\,30' \ldots 0^0$, denen für $\cos\alpha$ die Grenzen $1 \ldots 0{,}9799 \ldots 1$ entsprechen. Dasselbe gilt für $\bar{\alpha}$.

In erster Annäherung darf man also $1 - \cos\alpha = 0$ und $1 - \cos\bar{\alpha} = 0$ setzen, so daß dann

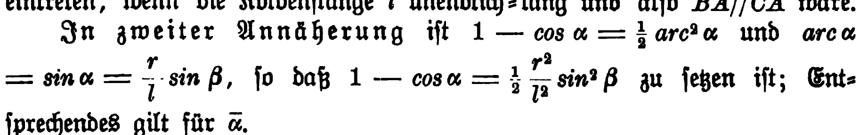
$$A_1A = r(1 - \cos\beta) \quad \text{und} \quad A_2A = r(1 - \cos\bar{\beta})$$

ist. Nimmt man in diesem Falle die Mitte M von A_1A_2 zum Nullpunkte der Bewegung, so ist für den Hingang $AM = -r\cos\beta$ und für den Hergang $AM = +r\cos\bar{\beta}$; für $\beta = 180^0 + \bar{\beta}$ geht die Formel für den Hergang über in $AM = -r\cos\beta$, so daß die ganze Bewegung für $\beta = 0 \ldots 360^0$ durch die Formel

$$AM = -r\cos\beta$$

dargestellt wird.

Fig. 538.



Bei dieser Annäherung vollführt A eine harmonische Schwingung zwischen A_1 und A_2, welche genau übereinstimmt mit der Bewegung der Projektion B' von B auf AC. Vergl. S. 172.

Diese Bewegung würde thatsächlich genau eintreten, wenn die Kolbenstange l unendlich-lang und also $BA // CA$ wäre.

In zweiter Annäherung ist $1 - \cos\alpha = \frac{1}{2}\,arc^2\alpha$ und $arc\,\alpha = \sin\alpha = \frac{r}{l}\sin\beta$, so daß $1 - \cos\alpha = \frac{1}{2}\frac{r^2}{l^2}\sin^2\beta$ zu setzen ist; Entsprechendes gilt für $\bar{\alpha}$.

Die Schwingung von A zwischen A_1 und A_2 wird also in zweiter Annäherung dargestellt durch

$$A_1A = r(1 - \cos\beta) + \frac{1}{2}\frac{r^2}{l}\sin^2\beta$$

und

$$A_2A = r(1 - \cos\bar{\beta}) - \frac{1}{2}\frac{r^2}{l}\sin^2\bar{\beta}.$$

Auch hier lassen sich beide Gleichungen leicht in eine Gleichung zusammenfassen, doch ist es für die Praxis besser, bei den beiden einzelnen Gleichungen stehen zu bleiben.

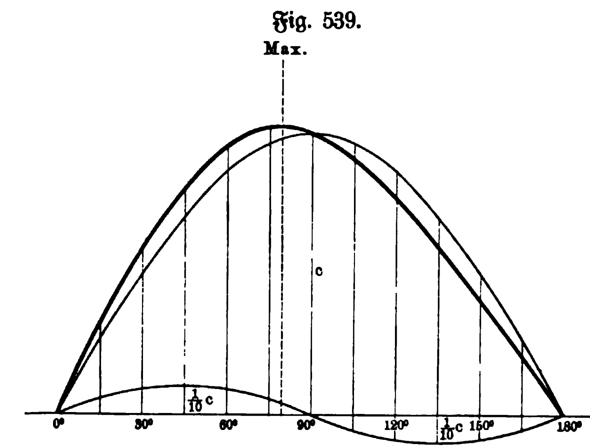
Setzt man $2\,sin^2\beta = 1 - cos\,2\beta$, so erhält A_1A die Gestalt

$$A_1A = r(1 - cos\,\beta) + \tfrac{1}{4}\frac{r^2}{l}(1 - cos\,2\beta).$$

Demnach läßt sich $A_1A_2 = x$ durch Übereinanderlagerung zweier harmonischer Schwingungen, $x_1 = r(1 - cos\,\beta)$ und $x_2 = \tfrac{1}{4}\frac{r^2}{l}(1 - cos\,2\beta)$ darstellen, wie es Fig. 538 (a. v. S.) für den Hingang bei $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ zeigt; die eine Schwingung hat die Amplitude r und den Bereich $\beta = 0^0 \ldots 180^0$, die andere die Amplitude $\tfrac{1}{4}\frac{r}{l}\cdot r = \tfrac{1}{20}r$ und den Bereich $2\beta = 0^0 \ldots 360^0$. Entsprechendes gilt für den Hergang.

Man sieht hier deutlich die Korrektur (x_2) der ersten Annäherung (x_1).

Fig. 539.



Auch unmittelbar an der Fig. 537 lassen sich die Wege A_1A und A_2A leicht für die verschiedenen Kurbelstellungen abgreifen.

Bei einer dritten Annäherung wird die Korrektur für $\frac{r}{l} \leqq \frac{1}{5}$ selbst $\leqq \frac{l}{5000}$, so daß man bei allen Fragen der Praxis im allgemeinen bei der zweiten Annäherung stehen bleiben kann.

Um die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 von A bezw. für den Hingang und für den Hergang festzustellen, muß man β und $\overline{\beta}$ als Funktionen der Zeit t kennen.

Für eine gleichförmige Bewegung der Kurbel B ist $arc\,\beta = \frac{t}{T}\cdot 2\pi = t.\gamma$, falls man die Zeit für einen ganzen Umlauf durch T und die entsprechende Winkelgeschwindigkeit durch γ bezeichnet; Entsprechendes gilt für $arc\,\overline{\beta}$, wobei nur zu beachten ist, daß $arc\,\beta$ und $arc\,\overline{\beta}$ selbständig von 0 bis π wachsen.

Für die erste Annäherung sind in diesem Falle v_1 und v_2 durch die Theorie der harmonischen Schwingung ohne weiteres bestimmt.

Für die zweite Annäherung muß man die Ableitungen der Gleichungen für A_1A und A_2A bilden, wobei sich sofort (vergl. S. 174) ergiebt

$$v_1 = r\gamma\left(sin\,\beta + \tfrac{1}{2}\frac{r}{l}\,sin\,2\beta\right) \quad \text{und} \quad v_2 = r\gamma\left(sin\,\overline{\beta} - \tfrac{1}{2}\frac{r}{l}\,sin\,2\overline{\beta}\right).$$

Dabei ist $r\gamma = c$ die Lineargeschwindigkeit von B, während γ bei einer Tourenzahl n durch $\gamma = \frac{2\pi\,.\,n}{60}$ gegeben ist.

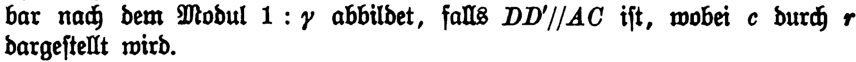
Die Formeln gelten auch, wie leicht zu ersehen, für eine veränderliche Winkelgeschwindigkeit φ, welcher die veränderliche Geschwindigkeit $v = r\varphi$ von B entspricht.

Für eine konstante Winkelgeschwindigkeit tritt bei $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ das Maximum von v_1 für $\beta = 79^\circ 16'$ ein, wie die Gleichung $\cos\beta + \frac{r}{l}\cos 2\beta = 0$ oder $\cos\beta + \frac{r}{l}(2\cos^2\beta - 1) = 0$ für $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ lehrt.

Das Maximum von v_2 ergiebt sich ebenso bei $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ für $\overline{\beta} = 100^\circ 44'$. Für die erste Annäherung gilt $\beta = \overline{\beta} = 90^\circ$.

Für die zeichnerische Darstellung der Geschwindigkeit kann man wieder die Übereinanderlagerung zweier Schwingungen benutzen, deren Amplituden $c = r\gamma$ und $\frac{1}{2}\frac{r}{l}\cdot c = \frac{1}{10}c$ sind, wie es Fig. 539 für den Hingang zeigt. Die Korrektur der ersten Annäherung ist hier wieder deutlich zu sehen.

Fig. 540.



Statt dessen kann man auch v_1 und v_2 gemäß Fig. 84 unmittelbar gewinnen, wie es Fig. 540 näher ausführt. Man hat $v_1 : c = OA : OB = CD : r$, falls $CO' // AO$, d. h. $CO' \perp AC$ ist. Demnach gilt

$$v_1 = \frac{c}{r}\cdot CD = CD \,.\, \gamma,$$

so daß $AD' = DC$ die Geschwindigkeit für A unmittelbar nach dem Modul $1 : \gamma$ abbildet, falls $DD' // AC$ ist, wobei c durch r dargestellt wird.

Die Beschleunigungen j_1 und j_2 sind für die erste Annäherung wieder ohne weiteres gegeben.

Bei der zweiten Annäherung folgt durch nochmalige Ableitung der Gleichungen für v_1 und v_2 bei konstanter Winkelgeschwindigkeit sofort (vergl. S. 174)

$$j_1 = r\gamma^2\left(\cos\beta + \frac{r}{l}\cos 2\beta\right) \quad \text{und} \quad j_2 = r\gamma^2\left(\cos\overline{\beta} - \frac{r}{l}\cos 2\overline{\beta}\right).$$

Dabei ist $r\gamma^2 = \frac{c^2}{r} = b_n$ die Normalbeschleunigung der Bewegung von B, während γ wieder als $\frac{2\pi\,.\,n}{60}$ darstellbar ist.

Da $\cos\beta$ und $\cos 2\beta$ für $\beta = 0$ ihre Maxima haben, so ist das Maximum von j_1 für $\beta = 0$ gegeben als

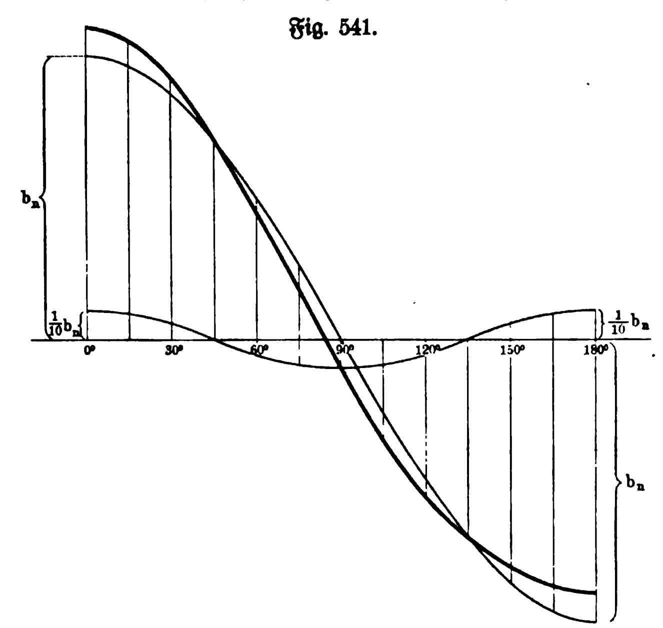
$$+\, r\gamma^2\left(1 + \frac{r}{l}\right).$$

Für $\beta = 180^0$ ist $j_1 = -r\gamma^2\left(1 - \frac{r}{l}\right)$ das Maximum der Verzögerung.

Für $\overline{\beta} = 0^0$ ist $j_2 = +r\gamma^2\left(1 - \frac{r}{l}\right)$, während für $\overline{\beta} = 180^0$ $j_2 = -r\gamma^2\left(1 + \frac{r}{l}\right)$ ist.

Eine zeichnerische Darstellung von j_1 und j_2 ergiebt sich wieder leicht durch Übereinanderlagerung zweier Schwingungen von den Amplituden $b_n = r\gamma^2$ und $\frac{r}{l} \cdot b_n$, wie es Fig. 541 bei $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ für den Hingang zeigt. Der Nullwert der Beschleunigung entspricht natürlich dem Maximum der Geschwindigkeit ($\beta = 79^0\,16'$). Entsprechendes gilt für den Hergang.

Fig. 541.



Die Korrektur der ersten Annäherung ist auch hier wieder deutlich ersichtlich.

Statt dessen kann man auch eine Tabelle für j_1 und j_2 berechnen, z. B. von 20^0 zu 20^0, und diese graphisch auswerten.

Darf man die bewegte Masse $\frac{G}{g}$ in A vereinigt denken, so ist die Kraft K, welche der entwickelten Beschleunigung entspricht für den Hingang

$$K = r\gamma^2 \frac{G}{g}\left(\cos\beta + \frac{r}{l}\cos 2\beta\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{g}\left(\frac{n}{30}\right)^2 r\,G\left(\cos\beta + \frac{r}{l}\cos 2\beta\right) \sim \left(\frac{n}{30}\right)^2 r\,G\left(\cos\beta + \frac{r}{l}\cos 2\beta\right).$$

Für den Hergang gilt Entsprechendes.

Wird der Kreuzkopf durch eine Kraft $[P]$ in der Geraden AC bewegt, so zerlegt sich diese in den Normaldruck $P tg\,\alpha$ auf die Führung des Kreuzkopfes und in die Kraft $\frac{P}{\cos\alpha}$, welche in die Achse der Schubstange AB fällt. Vergl. S. 302, Nr. 13.

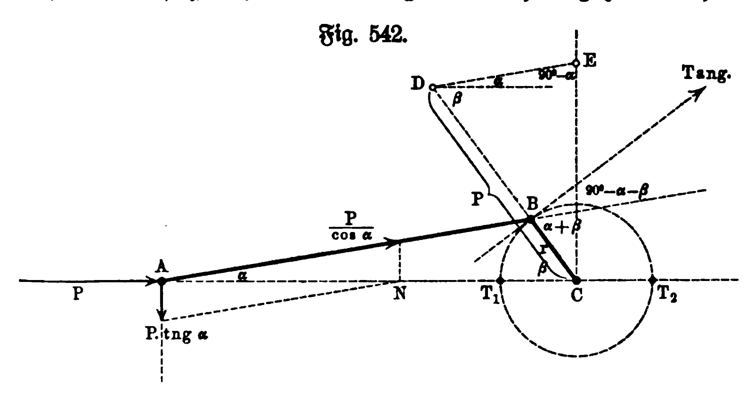
Berücksichtigt man die Reibung R der Führung, so ist der Normaldruck N gegeben als $(P - R)\,tg\,\alpha = (P - fN)\,tg\,\alpha$, woraus für $f = tg\,\varphi$ folgt $N = \frac{P \sin\alpha \cos\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)}$ und $R = \frac{P \sin\alpha \sin\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)}$, so daß die Kraft für AB den Wert $\frac{P - R}{\cos\alpha} = \frac{P\cos\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)}$ erhält.

Bei der meist sehr geringen Pressung gegen die Gleitbahn ist $\varphi \sim 0$, so daß die Reibung nicht berücksichtigt zu werden braucht.

Würde die Kraft $\left[\frac{P}{\cos\alpha}\right]$ den Bewegungszustand der Stange AB nicht ändern, so würde ihre Zerlegung in B nach der Tangente des Kurbelkreises die Kraft geben, welche hier bewegend wirkt. Als Wert dieser Tangentialkraft fände man (vergl. Fig. 542) $P_T = \frac{P}{\cos\alpha} \sin(\alpha + \beta)$.

Dieser Wert ist jedenfalls als eine gute Annäherung zu betrachten.

Fig. 542.



Errichtet man in Fig. 542 das Lot auf AC in C, macht $DC = P$ und zieht $DE // AB$, so ist $CE = \frac{P \sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha}$, d. h. CE stellt die auf Bewegung wirkende Komponente von P für die Stellung β dar.

Stellt man diese Komponente für $\beta = 0^\circ \ldots 180^\circ$ und $\bar{\beta} = 0^\circ \ldots 180^\circ$ graphisch dar gemäß der Konstruktion der Fig. 542, so sieht man, daß sie selbst bei konstantem Werte von $[P]$ höchst veränderlich ist und infolgedessen auch keine gleichmäßige Arbeitsleistung bewirken kann.

Infolgedessen verbindet man das Getriebe mit einem Schwungrade, dessen Zweck darin besteht, Arbeit aufzusammeln und abzugeben, entsprechend der bezeichneten Schwankung in der Arbeitsleistung von $[P]$.

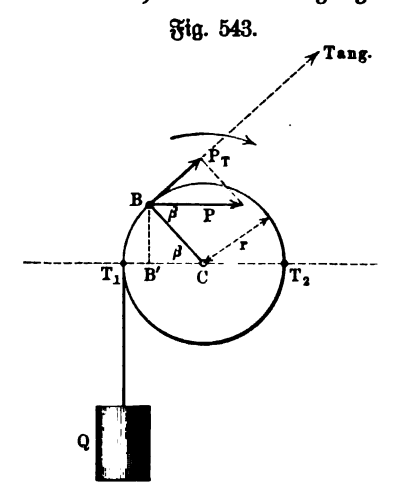
Die gleichmäßige Arbeitsleistung, welche durch $[P]$ bewirkt werden soll, denken wir uns veranschaulicht durch die gleichförmige Aufwickelung einer konstanten Last Q am Arme r, so daß $P_T = Q$ sein müßte.

Bei einer ersten Annäherung ($\alpha = 0^0$) ist $P_T = P \sin\beta$, wie auch Fig. 543 unmittelbar zeigt, so daß $[P_T]$ für ein konstantes $[P]$ in T_1 und T_2 den Wert 0 und in O und U den Wert P hat (vergl. Fig. 544).

Die Maschine soll jedenfalls periodisch wirken, d. h. nach einem vollen Umgange sollen stets dieselben Verhältnisse wieder auftreten, es muß also P jedenfalls während eines vollen Umganges die Arbeit $Q \cdot 2\pi r$ leisten.

Betrachten wir den Umgang von der Totpunktslage T_1 aus, so ist die Arbeit der konstanten Kraft P für den Weg $T_1 B$ gegeben als $P \cdot T_1 B' = Pr(1 - \cos\beta)$, während die Arbeit von Q für diesen Weg $Q r \operatorname{arc}\beta$ ist.

Fig. 543.



Sollten diese Arbeiten stets einander gleich sein, so müßte $P = Q \dfrac{\operatorname{arc}\beta}{1 - \cos\beta}$ sein, könnte also nicht konstant sein.

Für ein konstantes P zeigen die beiden Arbeiten einen Unterschied, welcher der Änderung der Energie der sich drehenden Massen entspricht. Haben diese, unter denen die Masse des Schwungrades bei weitem überwiegt, das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}r$, so ist diese Energie darstellbar als

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{T}r(\varphi^2 - \varphi_0^2),$$

wenn man die Winkelgeschwindigkeit für die Lage T_1 durch φ_0 und für die Lage B durch φ bezeichnet.

Demnach gilt

$$Pr(1 - \cos\beta) - Q r \operatorname{arc}\beta = \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}r(\varphi^2 - \varphi_0^2).$$

Daraus folgt für die Bestimmung von φ

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 + \frac{2r}{\mathfrak{T}r}[P(1 - \cos\beta) - Q \operatorname{arc}\beta] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 243)$$

Demnach ist eine gleichförmige Drehung der Kurbel unter Einwirkung einer konstanten Kraft $[P]$ ausgeschlossen.

Die Maxima und Minima von φ entsprechen der Gleichung $P \sin\beta = Q$.

Dasselbe Ergebnis zeigt auch die Betrachtung der Kraft $P \sin\beta - Q$, welche die Bewegung der Kurbel hervorruft, sie ist für $\beta = 0$ negativ, erhält für $P \sin\beta = Q$ den Wert Null und wird darauf positiv, so daß für $\sin\beta = \dfrac{Q}{P}$ eine verzögerte Bewegung in eine beschleunigte Bewegung übergeht, also ein Minimum der Geschwindigkeit vorliegt u. s. w. Konstante Werte von P kommen angenähert bei Dampfmaschinen vor. Für alle Fälle hat man zu unterscheiden, ob P nur auf dem Hingange (einfach-wirkend) oder auf dem Hingange und auf dem Hergange (doppelt-wirkend) in Rechnung zu stellen ist.

In beiden Fällen muß die Arbeit von P für einen vollen Umgang den Wert $Q \,.\, 2r\pi$ haben.

Im ersten Falle ist

$$P \,.\, 2r = Q \,.\, 2r\pi,$$

d. h.

$$P = Q\pi = 3{,}1416\, Q \quad \text{oder} \quad Q = \frac{P}{\pi} = 0{,}3183\, P.$$

Im zweiten Falle ist

$$P \,.\, 4r = Q \,.\, 2r\pi,$$

d. h.

$$P = Q \cdot \frac{\pi}{2} = 1{,}5708\, Q \quad \text{oder} \quad Q = \frac{2P}{\pi} = 0{,}6366\, P.$$

Die Maxima und Minima der Geschwindigkeiten sind gemäß der Gleichung $P \sin\beta = Q$ bestimmt

im ersten Falle durch $\sin\beta = \frac{1}{\pi}$, d. h. durch $\beta \sim 18^0\,33'\,30''$ und durch $\beta \sim 161^0\,26'\,30'$,

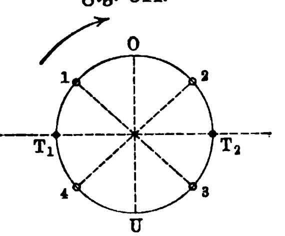
im zweiten Falle durch $\sin\beta = \frac{2}{\pi}$, d. h. durch $\beta \sim 39^0\,32'\,30''$ und durch $\beta \sim 140^0\,27'\,30''$.

Wir verfolgen den zweiten Fall (Doppelwirkung) noch etwas weiter; hier gilt für den Hergang genau dasselbe wie für den Hingang. Hier gilt im besondern

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 + \frac{2rQ}{\mathfrak{T}r}\left[\frac{\pi}{2}(1 - \cos\beta) - arc\,\beta\right] \quad . \quad . \quad . \quad 244)$$

Ersetzt man in der Gleichung Nr. 244), welche für den Hergang ($\beta = 0^0 \ldots 180^0$) gilt, β durch $\overline{\beta}$, so gilt die Gleichung für den Hingang ($\overline{\beta} = 0^0 \ldots 180^0$). Die Minima von φ liegen, wie Fig. 544 darstellt, bei 1 und 3, die Maxima bei 2 und 4.

Fig. 544.



Ersetzt man β durch $180^0 - \beta$, so ergiebt sich aus Gleichung Nr. 244)

$$\varphi_\beta^2 + \varphi_{180^0-\beta}^2 = 2\,\varphi_0^2.$$

Für $\beta = 90^0$ ist im besondern $\varphi_{90}^2 = \varphi_0^2$. Entsprechendes gilt für $\overline{\beta}$. Demgemäß ist die Winkelgeschwindigkeit für T_1, O, T_2, U dieselbe und zwar φ_0.

Man hat ferner ($\beta \sim 140^0$)

$$\varphi_{max}^2 = \varphi_0^2 + \frac{0{,}6614\, Qr}{\mathfrak{T}r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 245)$$

und ($\beta \sim 39^0$)

$$\varphi_{min}^2 = \varphi_0^2 - \frac{0{,}6614\, Qr}{\mathfrak{T}r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 246)$$

Setzt man

$$\frac{\varphi_{max} + \varphi_{min}}{2} = \varphi_m \quad \text{und} \quad \varphi_{max} - \varphi_{min} = \delta \,.\, \varphi_m,$$

so folgt durch Multiplikation

$$\varphi_{max}^2 - \varphi_{min}^2 = \frac{1{,}3228\, Qr}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} = 2\,\delta\,\varphi_m^2 \quad \ldots\ldots \quad 247)$$

Daraus folgt, wenn man noch Qr, d. h. das Moment, welches der zu leistenden Arbeit entspricht, durch Mo bezeichnet,

$$0{,}6614\,\frac{Mo}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} = \delta\,\varphi_m^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 248)$$

Man nennt δ den Grad der Ungleichförmigkeit (Schwankung) der Maschine und bezeichnet φ_m, d. h. das arithmetische Mittel aus Maximal- und Minimalgeschwindigkeit, als Mittelwert der Geschwindigkeit; dieser Mittelwert stimmt nicht überein mit der Durchschnittsgeschwindigkeit γ für den vollen Umgang, welche bei einer Umlaufszeit T durch $\gamma = \frac{2\pi}{T}$ gegeben ist, wobei T aus $\sum_0^T (\varphi\tau) = 2\pi$ zu bestimmen ist. Drückt man φ_{max} und φ_{min} durch φ_m und δ aus, so ist

$$\varphi_{max} = \varphi_m(1 + \tfrac{1}{2}\delta) \quad \text{und} \quad \varphi_{min} = \varphi_m(1 - \tfrac{1}{2}\delta).$$

Ebenso ist

$$\varphi_0^2 = \frac{\varphi_{max}^2 + \varphi_{min}^2}{2} = \varphi_m^2(1 + \tfrac{1}{4}\delta^2).$$

Aus Formel Nr. 248) folgt noch

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} = 0{,}6614 \cdot \frac{Mo}{\delta\,.\,\varphi_m^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 249)$$

d. h. das Trägheitsmoment der sich drehenden Massen, unter denen die des Schwungrades bei weitem überwiegt, ist durch Mo, φ_m und δ bestimmt.

Je kleiner δ ist, um so mehr nähert sich der Gang der Maschine der Gleichförmigkeit.

Bei gegebenen Verhältnissen ($\mathfrak{T}\mathfrak{r}$ und Mo) ist nach Gleichung Nr. 248) $\delta\,.\,\varphi_m^2$ eine Konstante, d. h. δ nähert sich der Null um so mehr, je größer φ_m ist.

Für relativ hohe Tourenzahlen (n) ist φ_m demnach ersetzbar durch

$$\gamma = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\,.\,n}{60}.$$

Beträgt die Arbeitsleistung N Pferdestärken, so ist $Mo = 716\,\frac{N}{n}$ zu setzen und Gleichung Nr. 249) geht über in

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \frac{0{,}6614\,.\,716\,\frac{N}{n}\,3600}{\delta\,.\,4\,\pi^2\,.\,n^2} \sim 43\,200\,\frac{N}{\delta\,.\,n^3} \quad \ldots \quad 250)$$

Bei einem vorgeschriebenen (kleinen) Ungleichförmigkeitsgrad δ und einer Tourenzahl n ist demnach durch Formel Nr. 250) für eine Arbeitsleistung von N Pferdestärken das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}\mathfrak{r}$ der zu verwendenden Schwungradsmasse angenähert bestimmt.

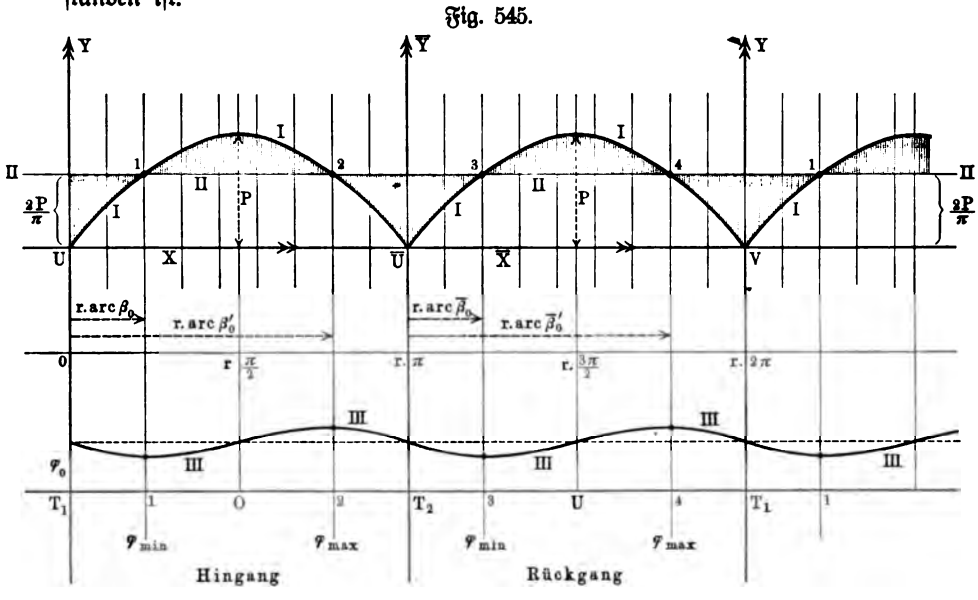
Die Untersuchung läßt sich durch die graphische Darstellung der Fig. 545 veranschaulichen. Über der Achse UV ist die Kurve I für den Hingang gemäß dem Ansatze $x = r \cdot arc\,\beta$ und $y = P \sin\beta$ entstanden, für den Hergang gemäß dem Ansatze $\bar{x} = r \cdot arc\,\bar{\beta}$ und $\bar{y} = P \sin\bar{\beta}$. Die Fläche zwischen der Kurve I und der Achse UV stellt also (vergl. S. 760) die Arbeit von P von dem Totpunkte T_1 aus für jede Stellung β oder $\bar{\beta}$ dar.

Die Parallele II zu UV von der Höhe $Q = \frac{2}{\pi} P$ bestimmt mit UV ein Rechteck, welches also die Arbeit von Q darstellt.

Die Linien I und II schneiden sich in den Punkten, welche den Stellungen 1, 2, 3, 4 entsprechen $\left(\sin\beta = \frac{2}{\pi} \text{ und } \sin\bar{\beta} = \frac{2}{\pi}\right)$.

Durch die Schnittpunkte werden die vier schraffierten Flächen bestimmt, deren letzte (rechts) durch Antragen des ersten Teiles (links) der Figur entstanden ist.

Fig. 545.



Diesen Schnittpunkten entsprechen die Maxima und Minima der Kurve III, welche die Winkelgeschwindigkeiten entsprechend darstellt.

Bezeichnet man die Lösungen der Gleichungen $\sin\beta = \frac{2}{\pi}$ und $\sin\bar{\beta} = \frac{2}{\pi}$ d. h. $39^0 32' 30''$ und $140^0 27' 30''$ bezw. durch β_0 und β_0', wobei $\beta_0 + \beta_0' = 180^0$ ist, so ist die erste äußere schraffierte Fläche, da die Arbeit von P durch $Pr(1 - \cos\beta)$ und die Arbeit von Q durch $Qr \cdot arc\,\beta$ bestimmt ist, gegeben als

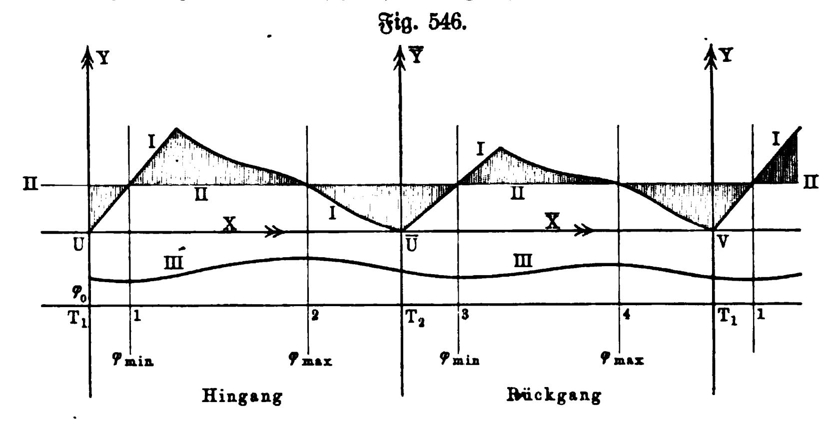
$$\begin{aligned} Pr(1 - \cos\beta_0') - Pr(1 - \cos\beta_0) - Qr(arc\,\beta_0' - arc\,\beta_0) \\ = Pr(\cos\beta_0 - \cos\beta_0') - Qr(arc\,\beta_0' - arc\,\beta_0) \\ = 2\,Pr\cos\beta_0 - Qr\,arc(\beta_0' - \beta_0) \\ = +\,Qr[\pi\cos\beta_0 - arc(\beta_0' - \beta_0)]. \end{aligned}$$

Die folgende innere schraffierte Fläche ist ebenso bestimmt als

$$\begin{aligned} P\,2\,r &- Pr(1 - \cos\beta_0') + Pr(1 - \cos\beta_0) \\ &- Qr(\pi - arc\,\beta_0') - Qr\,arc\,\beta_0 \\ &= P\,2\,r + Pr(\cos\beta_0' - \cos\beta_0) - Qr\pi + Qr(arc\,\beta_0' - arc\,\beta_0) \\ &= -Qr[\pi\cos\beta_0 - arc(\beta_0' - \beta_0)]. \end{aligned}$$

Beide Flächen haben also dieselbe Größe $\mathfrak{A}$ und dies gilt auch für die beiden noch übrigen der vier schraffierten Flächen.

Fig. 546.



Jede dieser Flächen stellt den Überschuß bezw. den Fehlbetrag der Arbeitsleistung von P gegenüber der gleichmäßigen Arbeitsleistung von Q dar zwischen benachbarten Maximal- oder Minimalwerten der Geschwindigkeit. Demnach gilt

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{Tr}(\varphi_{max}^2 - \varphi_{min}^2) = \mathfrak{A}$$

und

$$2\,\delta\,\varphi_m^2 = \varphi_{max}^2 - \varphi_{min}^2 = \frac{2\,\mathfrak{A}}{\mathfrak{Tr}}.$$

Setzt man die Werte $\beta_0' = 140^0\,27'\,30''$ und $\beta_0 = 39^0\,32'\,30''$ ein, so erhält man

$$\mathfrak{A} = 0{,}6614\,Qr \sim 474\,\frac{N}{n} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 251\,\text{a)}$$

Diese graphische Darstellung läßt sich nun unmittelbar auf eine **veränderliche Triebkraft** P übertragen. Man stellt dazu die von ihr auf den Kurbelzapfen übertragene Arbeit wieder für einen vollen Umgang, entsprechend Fig. 545, graphisch dar. Die Kurve I in Fig. 546 zeigt eine solche Darstellung, in welcher auch die Linien II und III dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 545.

Die vier schraffierten Flächen, deren letzte (rechts) wieder durch Antragen des ersten Teiles (links) der Figur gebildet ist, stellen dann wieder die Abweichungen der Arbeit der Kraft in Bezug auf die Arbeit der Last dar zwischen den Maximal- und Minimalwerten der Winkelgeschwindigkeit (III). Hat die **größte** dieser Flächen den Inhalt $\mathfrak{A}$, so ist

$$\pm\,\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}(\varphi_{max}^2 - \varphi_{min}^2)\,\mathfrak{Tr} = \varphi_m^2\,\delta\,\mathfrak{Tr}.$$

Für $\varphi_m = \gamma = \frac{n \,.\, 2\pi}{60}$ und für einen vorgeschriebenen Wert von δ erhält man also hier

$$\mathfrak{T}r = \frac{\pm \mathfrak{A}}{\varphi_m^2 \delta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 251\,b)$$

Die Kurve I in Fig. 546 entspricht der Arbeitsleistung einer doppeltwirkenden Dampfmaschine mit einem Cylinder, sie ist gewissermaßen die praktische Korrektur der Kurve I in Fig. 545. Für andere Arten der Triebkräfte treten natürlich andere Kurven auf. Vergl. dazu die Diagramme in Bd. II, S. 97 u. f.

Ist auch die Arbeitsleistung der Last veränderlich, so tritt statt der Geraden II der Fig. 545 und 546 gleichfalls eine Kurve ein, doch unterliegt das weitere Verfahren dadurch keiner Änderung.

Die Bestimmung der Flächen geschieht durch Planimeter oder durch Näherungsformeln.

Die Herstellung der Kurve I in Fig. 546 mag noch etwas genauer betrachtet werden. Man geht hier, wo es sich um eine doppeltwirkende Dampfmaschine mit einem Cylinder handelt, aus von den beiden Dampfspannungsdiagrammen für Bodenraum und Deckelraum. Aus ihnen bildet man durch Addition bezw. Subtraktion der Ordinaten die Linie der Dampfüberspannung für den vollen Umgang, falls die wirksamen Kolbenflächen auf beiden Seiten dieselbe Größe F haben. Sind diese für beide Seiten von verschiedener Größe, so zeichnet man statt der Spannungslinie sofort die entsprechende Kraftlinie, entsprechend der Gleichung: Kraft = (Fläche) . (Spannung).

Ist y die Ordinate der für Spannungen gezeichneten Überspannungslinie, so ist für die beschleunigte bezw. verzögerte Bewegung der Massen (Kolben, Kolbenstange und Kreuzkopf einerseits und Schubstange anderseits) ein Betrag y' von y abzuziehen, für dessen Berechnung beim Hingange die Gleichung (vergl. S. 758) gilt

$$y'F = \left(\frac{n}{30}\right)^2 Gr\left(\cos\beta + \frac{r}{l}\cos 2\beta\right) \cdot$$

Dabei ist im allgemeinen $\frac{G}{F} = 0{,}2$ bis $0{,}4$ zu setzen.

Bei Verschiedenheit der Kolbenflächen F_1 und F_2 ist entsprechend zu verfahren.

Die durch Einführung von y' verbesserte Linie der Überspannung liefert in ihren Ordinaten $y - y'$ das Mittel, die auf Bewegung der Kurbel wirkende Kraft

$$F(y - y')\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha}$$

zu bilden, gemäß der Konstruktion auf S. 759; damit sind die Ordinaten für die Linie I der Fig. 546 gegeben.

Bei hohen Tourenzahlen bedarf noch die Bewegung der Schubstange, welche die Vermittelung zwischen den sich verschiebenden und den sich drehen-

den Teilen bewirkt, einer eigenen Untersuchung. Will man ihre Masse, welche oben in $\frac{G}{g}$ eingerechnet wurde, besonders berücksichtigen, so kann man folgendermaßen verfahren. Bezeichnet man die Geschwindigkeit von A für den Hingang wieder durch v_1, so ist $\frac{v_1}{OA}$ in Fig. 547 die Winkelgeschwindigkeit der augenblicklichen Drehung der Schubstange um das Centrum O. Demnach ist die Geschwindigkeit v eines beliebigen Punktes S der Schubstange gegeben durch $v = \frac{OS}{OA} \cdot v_1$.

Ist dem Punkte S die Masse μ zuzuschreiben, so ist dessen Energie

$$E' = \tfrac{1}{2}\mu v^2 = \tfrac{1}{2}\mu v_1^2 \frac{\overline{OS}^2}{\overline{OA}^2}.$$

In erster Annäherung ($\alpha = 0$) ist $v_1 = r\gamma \sin\beta$ und $\overline{OS}^2 = x^2 + \overline{OA}^2$ und $OA = l \,.\, tg\,\beta$, so daß man hat

$$E' = \tfrac{1}{2}\mu r^2\gamma^2 \left(\sin^2\beta + \frac{x^2}{l^2}\cos^2\beta\right).$$

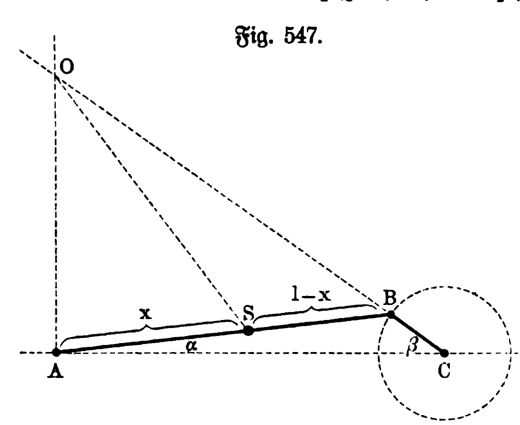
Ist die Schubstange von der Masse M prismatisch, was allerdings für die Praxis meist auch nicht einmal angenähert zutrifft, so ist $\mu = \frac{1}{n} M$ und $x = \frac{l}{n}, \frac{2\,l}{n}, \frac{3\,l}{n}, \cdots$ zu setzen; hier erhält man für die Energie E der ganzen Stange durch Summation und Grenzübergang unmittelbar

$$E \sim \tfrac{1}{2} M r^2\gamma^2 (\sin^2\beta + \tfrac{1}{3}\cos^2\beta).$$

Für $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$ geht E über in

$$E \sim \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3}M) r^2\gamma^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3}M) r^2\gamma^2\sin^2\beta.$$

Fig. 547.



Das erste Glied von E ist so gebildet, als wenn $\frac{1}{3}M$ in B an der Drehung um C, das zweite Glied so, als wenn $\frac{2}{3}M$ in A an der Verschiebung teilnähme.

Die Energie einer prismatischen Schubstange könnte man also angenähert dadurch in die Rechnung einführen, daß man zwei Drittel ihrer Masse der Kreuzkopfmasse und ein Drittel ihrer Masse der sich drehenden Masse hinzufüge.

Man kann dann in diesem Falle die Beziehung von Arbeit und Energie, indem man weiter die Werte der zweiten Annäherung benutzt, für die Bestimmung von φ verwenden, für den Hingang gemäß der Gleichung

$$Qr\frac{\pi}{2}\left(1 - \cos\beta + \frac{r}{2l}\sin^2\beta - \frac{2}{\pi}\,arc\,\beta\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}r'(\varphi^2 - \varphi_0^2) + \tfrac{1}{2}M'(r\gamma)^2\left(\sin\beta + \frac{r}{2l}\sin 2\beta\right)^2,$$

in welcher $\mathfrak{T}r'$ das Trägheitsmoment der korrigierten sich drehenden Masse und M' die Masse der korrigierten sich verschiebenden Masse bezeichnet.

Da die gebräuchlichen Schubstangen in der Regel auch nicht angenähert als prismatisch aufgefaßt werden können, so denkt man sie durch Schnitte, senkrecht zur Stangenachse, in kleine Stücke von gleicher Länge (z. B. 1 cm) zerlegt, und stellt für diese die einzelnen Massen fest. Mit Hülfe der phoronomischen Größen (Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung) jedes Punktes S kann man dann zeichnerisch in beliebiger Annäherung die dynamischen Größen herstellen, welche man braucht. Diese weitere Betrachtung ist für die oben durchgeführte Bestimmung der Energie der Schubstange von verhältnismäßig geringer Bedeutung, sie wird aber notwendig bei der Behandlung der Biegungsbeanspruchung der Schubstange, auf welche wir später zurückkommen.

8. Der Schwungkugelregulator unter Berücksichtigung der Widerstände. Es sei P und m (Fig. 548) das Gewicht und die Masse einer Kugel, q der Widerstand in der Hülse B, der überwunden werden muß, wenn der Apparat aus der mittleren Winkelgeschwindigkeit ω in eine andere ω_1 versetzt wird. Zwischen ω und ω_1 besteht die Relation

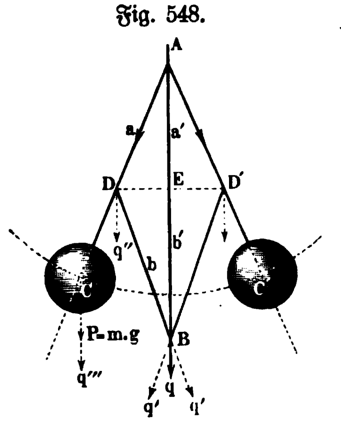
$$\omega_1 = (1 \pm n)\,\omega,$$

wobei n gewöhnlich $\frac{1}{20}$ nicht übersteigen soll. Weiter sei

$$AC = l;\ AD = a;\ BD = b;\ AE = a';\ BE = b'.$$

Man zerlege q nach Richtung der beiden Verbindungsstangen BD und BD' in die Seitenkräfte q', denke diese in den Punkten D und D' wirksam und zerlege sie nochmals in zwei Komponenten, von denen die eine q'' nach vertikaler Richtung wirksam, die andere in Richtung von CA und $C'A$ liegend durch den festen Punkt A aufgehoben wird. Die Komponente q'' verschieben wir endlich parallel ihrer Richtung in den Mittelpunkt der Kugel; es wirken dann hier die beiden vertikalen Kräfte mg und q''', wobei zu bemerken, daß beim Steigen der Kugeln, d. h. bei einer Vergrößerung der Winkelgeschwindigkeit, das Gewicht mg um q''' vergrößert, beim Niedersinken der Kugeln dagegen um q''' vermindert wird.

Fig. 548.



Es ist

$$q''' = q\frac{a}{l}\,\frac{a' + b'}{2b'}.$$

Jede der Kugeln wird im Beharrungszustande sein, d. h. sie wird kein Bestreben der Veränderung ihrer Lage haben, sobald das Moment der Centrifugal-

kraft F gleich ist dem Momente des Gewichtes $mg \pm q'''$ in Bezug auf den festen Punkt A. Zur Aufstellung dieser Momentengleichung bezeichnen wir den Winkel, den AC und AB bei der normalen Winkelgeschwindigkeit ω bilden, mit α, und nennen denselben α_1 für die Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = (1 + n)\,\omega$, dagegen α_2 für die kleinste zulässige Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 = (1 - n)\,\omega$. Für diese Annahme erhalten wir folgende drei Gleichungen

$$ml\,\omega_1^2 \cos\alpha_1 = mg + q''', \quad ml\,\omega^2 \cos\alpha = mg, \quad ml\,\omega_2^2 \cos\alpha_2 = mg - q'''.$$

Hieraus ergiebt sich

$$q''' = mg\left(\left[\frac{\omega_1}{\omega}\right]^2 \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha} - 1\right) = mg\left(1 - \left[\frac{\omega_2}{\omega}\right]^2 \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha}\right)$$

oder annähernd, wenn wir die Cosinus der drei Winkel gleich groß nehmen,

$$\omega_1^2 = \omega^2(1 + 2n)$$

und

$$\omega_2^2 = \omega^2(1 - 2n)$$

setzen, das Gewicht einer Kugel

$$mg = P = \frac{1}{2n}\,q''',$$

sowie die zulässige Geschwindigkeitsänderung

$$\pm n = \tfrac{1}{2}\,\frac{q'''}{P}.$$

Für gewöhnlich wird die Stangenverbindung $ADBD'$ als Rhombus konstruiert, so daß $a = b$ und für alle Lagen $a' = b'$ ist. In diesem Falle ergiebt sich

$$q''' = \frac{a}{l}\,q.$$

Nennen wir die Entfernung AB der Hülse von dem festen Punkte, den drei Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω, ω_2 entsprechend h_1, h, h_2, so ist

$$h_1 = 2a\cos\alpha_1 = 2a\,\frac{mg + q'''}{ml\,\omega_1^2}$$

oder annähernd

$$= 2a\,\frac{g}{l\,\omega_1^2},$$

$$h = 2a\cos\alpha = 2a\,\frac{g}{l\,\omega^2},$$

$$h_2 = 2a\cos\alpha_2 = 2a\,\frac{mg - q'''}{ml\,\omega_2^2}$$

oder annähernd

$$= 2a\,\frac{g}{l\,\omega_2^2}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$h - h_1 = \frac{2ag}{l\omega^2}\left(1 - \frac{1}{1 + 2n}\right) = \frac{2n}{1 + 2n}\cdot\frac{2ag}{l\omega^2}$$

$$h_2 - h = \frac{2ag}{l\omega^2}\left(\frac{1}{1 - 2n} - 1\right) = \frac{2n}{1 - 2n}\cdot\frac{2ag}{l\omega^2}.$$

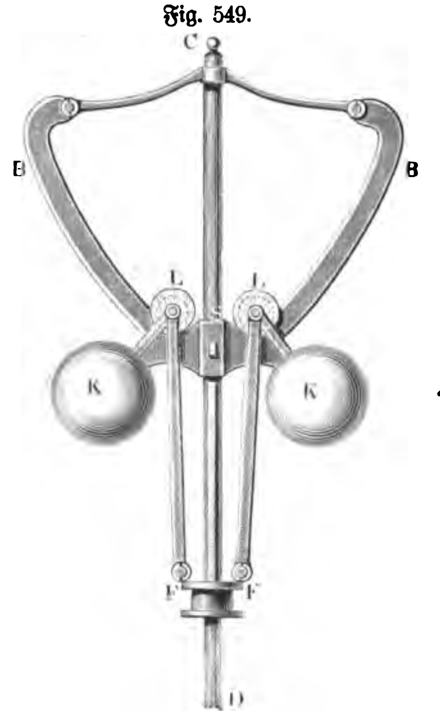
Die Entfernungen $h - h_1$ und $h_2 - h$ können wir durch die Konstruktion als gegeben ansehen, und demnach den sich daraus ergebenden Wert $\frac{a}{l}$ zur Berechnung von q''', resp. P benutzen

$$q''' = \frac{1+2n}{4n} \cdot \frac{\omega^2}{g}(h - h_1)q = \frac{1-2n}{4n} \cdot \frac{\omega^2}{g}(h_2 - h)q$$

$$P = \frac{1+2n}{8n^2} \cdot \frac{\omega^2}{g}(h - h_1)q = \frac{1-2n}{8n^2} \cdot \frac{\omega^2}{g}(h_2 - h)q.$$

Bei den Untersuchungen ist auf das Gewicht der einzelnen Stangen nicht Rücksicht genommen worden, und pflegt man deshalb in dem Gewichte P das der Stange AC, und in dem Gewichte q das der $1^1/_2$ fachen Stange BD mit inbegriffen zu denken.

Fig. 549.



Man hat sich bemüht, den vorstehenden Regulierungsapparat so zu verändern, daß die Winkelgeschwindigkeit der Maschine bei den verschiedenen Lagen der Kugeln dieselbe bleibe, und zu dem Ende vielfache Konstruktionen angegeben.

Ein Schwungkugelregulator, für den bei jeder Kugellage die Winkelgeschwindigkeit konstant bleibt, heißt ein astatischer Regulator, im Gegensatz zu denen mit veränderlicher Winkelgeschwindigkeit, welche statische genannt werden.

Der parabolische Regulator von Franke (Fig. 549) ist astatisch; da für denselben $l \cos\alpha = \frac{p}{2}$ ist, unter p den Parameter der Parabel verstanden (vgl. S. 292 u. f.).

Es sei $P = mg$ (Fig. 550 a. f. S.) das Gewicht einer Schwungkugel, q der Widerstand an der Hülse B, a die normale Entfernung der Hülskurve von der Parabel, b die Länge der Verbindungsstange einer Kugel mit der Hülse, die den Winkel β mit der Drehachse bilden mag; den Erhebungswinkel bezeichnen wir durch α, die Länge einer Normale zur Parabel bis zum Durchschnitt mit der Drehachse durch λ, so ist für die Gleichgewichtslage einer Kugel

$$\lambda \cos\alpha = \tfrac{1}{2}p \quad \text{und} \quad \omega^2 = \frac{g}{\lambda \cos\alpha},$$

unter ω die normale Winkelgeschwindigkeit verstanden. Diese gehe in die zulässigen Grenzen $(1 \pm n)\omega$ über. Man zerlege die Centrifugalkraft F und das Gewicht mg einer Kugel sowie den Widerstand q' in einer Verbindungs-

stange nach Richtung der Normale und Tangente der Parabel. Die ersteren Komponenten werden durch die feste Leitschiene aufgehoben, während die tangentialen Kräfte unter sich im Gleichgewichte sein müssen.

Die Gleichgewichtsbedingung ist

$$m(1 \pm n)^2 \omega^2 \cos\alpha \, \lambda \sin\alpha - mg\sin\alpha \mp q' \sin(\alpha + \beta) = 0;$$

statt $\omega^2 \lambda \cos\alpha$ können wir g schreiben, man erhält hiernach

$$mg(n^2 \pm 2n) = \pm q' \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha};$$

n^2 können wir gegen $2n$ vernachlässigen, es ist daher

$$mg = \frac{1}{2n} q' \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}.$$

Setzen wir weiter aus

$$q = 2q' \cos\beta$$

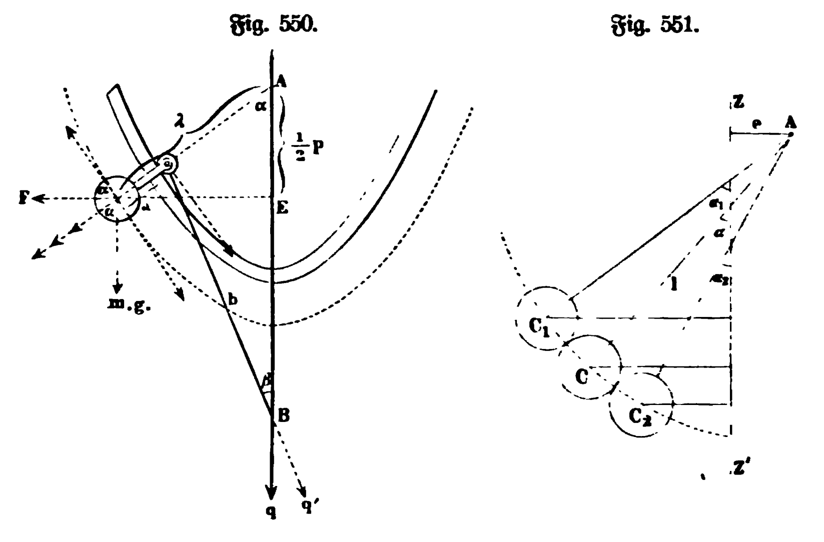
den Wert von q' ein, so entsteht

$$mg = \frac{1}{4n} q \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \cos\beta}$$

$$mg = \frac{1}{4n} q \,(1 + tg\,\beta \,cotg\,\alpha).$$

Die beiden Winkel α und β beziehen sich auf die Stellung des Apparates bei der normalen Winkelgeschwindigkeit ω, sie können demnach als gegeben angesehen oder auch durch Längenbeziehungen bestimmt werden.

Fig. 550. Fig. 551.



Für den normalen Gang der Maschine muß die Hülse nämlich eine bestimmte Stellung haben, da mit derselben die Zuflußklappe in Verbindung gesetzt wird. Setzen wir α als bekannt voraus, so haben wir

$$b \sin\beta = (\lambda - a)\sin\alpha$$
$$= \left(\frac{p}{2\cos\alpha} - a\right)\sin\alpha$$
$$= \tfrac{1}{2}(p\, tg\,\alpha - 2a\sin\alpha)$$
$$\cos\beta = \frac{1}{2b}\sqrt{4b^2 - (p\, tg\,\alpha - 2a\sin\alpha)^2}$$
$$tg\,\beta = \frac{p\, tg\,\alpha - 2a\sin\alpha}{\sqrt{4b^2 - (p\, tg\,\alpha - 2a\sin\alpha)^2}}$$
$$cotg\,\alpha\; tg\,\beta = \frac{p - 2a\cos\alpha}{\sqrt{4b^2 - (p\, tg\,\alpha - 2a\sin\alpha)^2}}.$$

Substituieren wir diesen Wert in dem Ausdruck für das Gewicht P einer Schwungkugel, so entsteht

$$P = \frac{1}{4n}q\left(1 + \frac{p - 2a\cos\alpha}{\sqrt{4b^2 - (p\, tg\,\alpha - 2a\sin\alpha)^2}}\right).$$

Da die Führung der Kugeln in einer Parabel mit Schwierigkeiten verbunden ist, so hat man den gewöhnlichen Centrifugalregulator dadurch in einen astatischen zu verwandeln gesucht, daß man die Aufhängepunkte der Kugeln nicht in die Drehachse legte, sondern auf der den Kugeln entgegengesetzten Seite anordnete (vergl. S. 292 u. f.). Es sei (Fig. 551) A der Aufhängepunkt, seine Entfernung von der Drehachse ZZ' gleich e, die Länge AC der Kugelstange bis zum Mittelpunkte gleich l, und durch C_1, C, C_2 seien die höchste, mittlere und niedrigste Lage der Kugelmittelpunkte dargestellt, dann ist der Voraussetzung gemäß

$$l\cos\alpha_1 - e\, cotg\,\alpha_1 = l\cos\alpha - e\, cotg\,\alpha = l\cos\alpha_2 - e\, cotg\,\alpha_2$$

gleich einem konstanten Wert, der unter der Annahme, daß die Punkte C_2, C, C_1 annähernd in einer Parabel liegen, gleich $\frac{p}{2}$ ist, wofür wir nach Nr. 8 der Anwendungen zum zweiten Abschnitt $\frac{895}{u^2}$ setzen dürfen, unter u die verlangte Umdrehungszahl in einer Minute verstanden. Aus den obigen Gleichungen ergiebt sich, sobald die Winkel der Konstruktion gemäß angenommen werden

$$\frac{e}{l} = \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{cotg\,\alpha_1 - cotg\,\alpha_2}$$

und

$$l = \frac{895}{u^2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha - \frac{e}{l}\, cotg\,\alpha}.$$

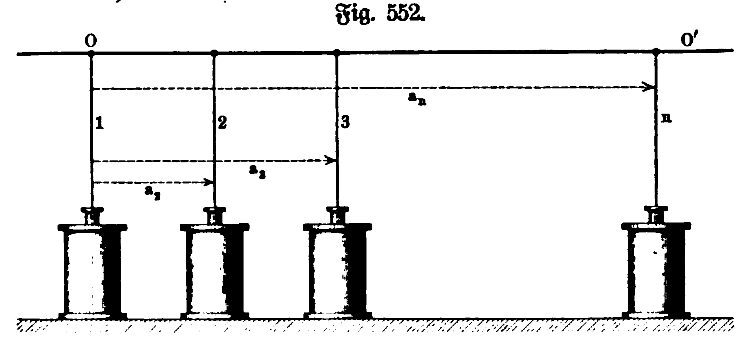
9. Massenausgleichung bei Schiffsmaschinen[1]**.** Durch die Massenverrückungen, welche sich beim Gange der Schiffsmaschinen regelmäßig wiederholen, werden störende Schwingungen der Schiffskörper hervorgerufen.

[1]) Vergl. hierzu Föppls Mechanik, Bd. IV, S. 127.

Man sucht daher nach einem „Massenausgleichungsverfahren“ für die Konstruktion der Maschinen, bei welchen solche störenden Schwingungen ausgeschlossen sind. Da das Gewicht des Schiffes und der Auftrieb im Gleichgewichte sind, so läßt sich das ruhende Schiff als ein freier Körper betrachten. Demnach muß für die Konstruktion der Schiffsmaschine als Bedingung gestellt werden:

1. Der Schwerpunkt der beweglichen Massen muß stets in relativer Ruhe zum Schiffskörper bleiben.
2. Das Moment der Bewegungsgröße der beweglichen Massen muß für jeden auf dem Schiffe liegenden Momentenpunkt dauernd den Wert Null haben.

Fig. 552.



Es seien nun n Dampfcylinder mit vertikalen Achsen nebeneinander geschaltet, wie es Fig. 552 andeutet, und zwar so, daß die Kurbeln alle auf derselben Welle OO' aufgekeilt sind, deren Winkelgeschwindigkeit φ sein mag.

Fig. 553.

Die Geschwindigkeit eines Kolbens, gerechnet von der Totpunktlage aus, ist in erster Annäherung (vergl. S. 756)

$$r_n \,.\, \varphi \,.\, \sin \varepsilon_n,$$

so daß die entsprechende Bewegungsgröße, falls die Masse des Kolbens nebst Zubehör mit m_n bezeichnet wird, den Wert

$$m_n r_n \varphi \sin \varepsilon_n$$

erhält (vergl. Fig. 553).

Dabei ist nur die Bewegung in Richtung der Kolbenachse berücksichtigt, da die Bewegungen senkrecht dazu nicht mehr Einfluß haben, als andere zufällige Bewegungen auf dem Schiffe (Laufen von Leuten u. s. w.), die man doch nicht in Rechnung stellen kann.

Wählt man den Punkt O als Momentenpunkt, so ist das Moment der Bewegungsgröße für den $n$ten Kolben gegeben als

$$m_n r_n \varphi \sin \varepsilon_n \,.\, a_n.$$

Demnach fordert der gesuchte Ausgleich die dauernde Erfüllung der Gleichungen

$$\text{I)}\quad \Sigma(m_n r_n \sin \varepsilon_n) = 0$$

$$\text{II)}\quad \Sigma(m_n r_n \sin \varepsilon_n \,.\, a_n) = 0$$

und zwar gilt deren Bestehen für jeden Wert von φ.

Bezeichnen wir den Winkel, welchen die $n$te Kurbel mit der ersten bildet, gezählt im Sinne des Umlaufes der Maschine, durch α_n, so ist $\varepsilon_n - \varepsilon_1 = \alpha_n$ und $\sin \varepsilon_n = \sin(\varepsilon_1 + \alpha_n) = \sin \varepsilon_1 \cos \alpha_n + \cos \varepsilon_1 \sin \alpha_n$.

Die Gleichungen I und II erhalten dann die Gestalt

$$\text{I}') \quad \sin \varepsilon_1 \Sigma m_n r_n \cos \alpha_n + \cos \varepsilon_1 \Sigma m_n r_n \sin \alpha_n = 0$$
$$\text{II}') \quad \sin \varepsilon_1 \Sigma m_n r_n a_n \cos \alpha_n + \cos \varepsilon_1 \Sigma m_n r_n a_n \sin \alpha_n = 0.$$

Da diese Gleichungen für jeden Wert von ε_1 gelten müssen, so hat man die vier Gleichungen

$$1) \quad \Sigma m_n r_n \cos \alpha_n = 0 \qquad \text{und} \qquad 2) \quad \Sigma m_n r_n \sin \alpha_n = 0$$
$$3) \quad \Sigma m_n r_n a_n \cos \alpha_n = 0 \qquad \text{und} \qquad 4) \quad \Sigma m_n r_n a_n \sin \alpha_n = 0$$

zu erfüllen.

Da die Größen m_n und r_n bereits aus anderen Gründen als bestimmt gelten müssen, und da $a_1 = 0$ und $\alpha_1 = 0$ ist, so stehen die Größen

$$\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n \quad \text{und} \quad a_2, a_3, \ldots a_n$$

zur Verfügung.

Soll der Ausgleich möglich sein, so muß man mindestens $n = 4$ setzen, d. h. der gesuchte Ausgleich ist nur für Viercylindermaschinen möglich.

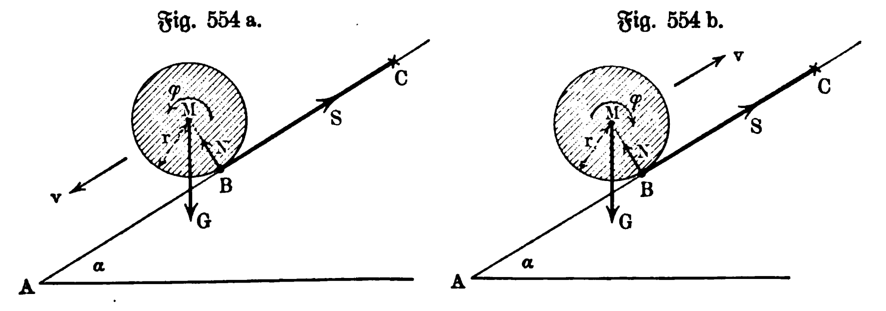
Da nämlich mit Rücksicht auf die praktische Ausführung nur das Verhältnis der Abstände $a_2, \ldots a_n$ bestimmt werden kann und nicht diese selbst, so würden bei $n = 3$ nur drei Unbekannte eingeführt werden.

Bei $n = 4$ werden nun allerdings fünf Unbekannte eingeführt, doch ist es nicht unzweckmäßig, daß somit einer der Winkel $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ zu freier Verfügung steht.

Während man gemäß der Gleichungen 1) und 2) bereits seit geraumer Zeit den Schwerpunkt der beweglichen Massen in relativer Ruhe zum Schiffskörper zu halten bestrebt war, hat erst Schlick die Bedeutung der Gleichungen 3) und 4) erkannt und demgemäß auch brauchbare Konstruktionen für große Oceandampfer geliefert.

10. Rollen und Rollgleiten. Rollt ein Cylinder auf einer schiefen Ebene abwärts (Fig. 554 a) oder aufwärts (Fig. 554 b), so ist für den Berührungspunkt B jedes Gleiten ausgeschlossen, d. h. es ist $r\varphi = v$.

Fig. 554 a. Fig. 554 b.



Um ein solches Rollen wirklich herzustellen, kann man um den Cylinder einen Faden (mehrfach) wickeln, der bei C befestigt ist. Es wirken dann auf

den Cylinder die Fadenspannung [S] und die Reaktion [N] in B und das Gewicht [G] in M.

Da die Bewegung im allgemeinen nicht gleichförmig ist, so müssen auch die Effektivkräfte der Bewegung berücksichtigt werden, welche in einer fortschreitenden Bewegung von M und in einer Drehbewegung um eine horizontale Achse durch M besteht. Sind die Beschleunigungen der beiden Bewegungen bezw. j und ι, so gilt für die fortschreitende Bewegung

$$1)\quad mj = G \sin\alpha - S$$

und für die Drehbewegung um M

$$2)\quad \mathfrak{T}r\iota = Sr.$$

Da in B ein Rollen stattfindet, so ist für jeden Zeitpunkt $r\varphi = v$ und demnach auch $r\iota = j$ oder $\frac{j}{\iota} = r$.

Durch Division von 1) und 2) ergiebt sich also

$$\frac{m}{\mathfrak{T}r} \cdot r = \frac{G \sin\alpha - S}{Sr}$$

oder

$$S \cdot \left(\frac{m \,.\, r^2}{\mathfrak{T}r} + 1\right) = G \sin\alpha.$$

Daraus folgt

$$S = G \sin\alpha \cdot \frac{\mathfrak{T}r}{\mathfrak{T}r + mr^2}$$

$$mj = G \,.\, \sin\alpha \cdot \frac{mr^2}{\mathfrak{T}r + mr^2}$$

oder, für $G = mg$,

$$j = g \sin\alpha \, \frac{mr^2}{\mathfrak{T}r + mr^2}.$$

Reduziert man $\mathfrak{T}r$ auf den Umfang des Cylinders, so ist $\mathfrak{T}r = \mu r^2$ und man hat

$$S = G \sin\alpha \, \frac{\mu}{m + \mu}.$$

Daraus folgt

$$mj = G \sin\alpha \, \frac{m}{m + \mu}$$

oder, für $G = mg$,

$$j = g \sin\alpha \, \frac{m}{m + \mu}.$$

Löst man den Faden, so kann die Reibung an der schiefen Ebene, deren größter Wert $fN = fG \cos\alpha$ ist, statt S eintreten, falls $fN \geqq S$ ist.

Man hat dafür also die Bedingung

$$f \,.\, G \,.\, \cos\alpha \geqq G \sin\alpha \, \frac{\mu}{m + \mu}$$

d. h.

$$tg\,\alpha \leqq f \cdot \frac{m + \mu}{\mu}.$$

Führt man $\mathfrak{T}r = \frac{1}{2} m r^2$ ein, so ergiebt sich $\mu = \frac{1}{2} m$, d. h. man hat

$$tg\,\alpha \leqq 3 f.$$

Für $f = 0{,}08$ ist der Reibungswinkel $4^0\,30'$, für $3f = 0{,}24$ ist $\alpha = 13^0\,30'$, d. h. ein Körper mit ebener Grundfläche gleitet für $f = 0{,}08$, sobald $\alpha \geqq 4^0\,30'$, ein rollender Cylinder beginnt dagegen zu gleiten, sobald $\alpha \geqq 13^0\,30'$ ist. Vergl. S. 727.

Liegt der Cylinder mit einem Zapfen vom Radius ϱ auf geneigten Schienen, so tritt zunächst überall ϱ ein statt r.

Hier ist $\mathfrak{T}r = \frac{1}{2} m r^2 = \mu \varrho^2$, d. h. $\mu = \frac{1}{2} m \frac{r^2}{\varrho^2}$, und man erhält

$$tg\,\alpha \leqq f \cdot \frac{r^2 + 2\varrho^2}{r^2}.$$

Für $\lim \varrho = 0$ ist $tg\,\alpha \leqq f$, d. h. α stimmt für unendlich-dünne Zapfen überein mit dem Reibungswinkel.

Dieselbe Betrachtung gilt auch für Hohlcylinder (Reifen) und Kugeln, überhaupt für Körper, in denen der Kreis der Fig. 554 als Symmetrieebene eines Rotationskörpers mit einer Achse senkrecht zu M aufgefaßt werden kann (z. B. Doppelkegel).

Für die Kugel ist z. B. $\mathfrak{T}r = \frac{2}{5} m r^2$, so daß $\mu = \frac{2}{5} m$ zu setzen ist, und man erhält

$$tg\,\alpha \leqq 3{,}5 f.$$

Läßt man einen beliebigen Körper mit Zapfenbefestigung (ϱ) auf geneigten Schienen rollen, so führt $\mathfrak{T}r = \mu \varrho^2$ wieder zu

$$tg\,\alpha \leqq f \cdot \frac{\mu + m}{\mu},$$

vorausgesetzt, daß die Drehungsachse eine freie Achse des Körpers ist.

Die Bewegungen der Fig. 554a und 554b unterscheiden sich nicht durch die Kräfte bezw. Beschleunigungen, obwohl die Fig. 554a eine beschleunigte, die Fig. 554b eine verzögerte Bewegung darstellt. Man hat für die fortschreitende Bewegung, falls man die Richtung nach unten als positiv ansetzt, für Fig. 554a

$$v = v_0 + jt \quad \text{und} \quad s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} j t^2$$

und für Fig. 554b

$$v = v_0 - jt \quad \text{und} \quad s = s_0 - v_0 t - \tfrac{1}{2} j t^2.$$

Ebenso hat man für die Drehbewegung, falls man beide Male den Sinn der rollenden Bewegung als positiv ansetzt, für Fig. 554a

$$\varphi = \varphi_0 + \iota t \quad \text{und} \quad \sigma = \sigma_0 + \varphi_0 t + \tfrac{1}{2} \iota t^2$$

und für Fig. 554b

$$\varphi = \varphi_0 - \iota t \quad \text{und} \quad \sigma = \sigma_0 + \varphi_0 t - \tfrac{1}{2} \iota t^2.$$

Im Falle der Fig. 554b tritt für $t = \frac{v_0}{j}$ bezw. für $t = \frac{\varphi_0}{\iota}$ Ruhe ein, worauf die Bewegung des weiteren der Fig. 554a entspricht. Für $\alpha = 90^0$

kann man die betrachteten Bewegungen als Rollbewegungen an einem senkrechten Faden veranschaulichen.

Man hat dann $S = G \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{\mathfrak{Tr} + mr^2}$ und $j = g \frac{mr^2}{\mathfrak{Tr} + mr^2}$.

Ist der abrollende Körper ein Cylinder vom Gewichte Q, so ist für ihn $\mathfrak{Tr} = \frac{1}{2} mr^2$ und also $S = \frac{1}{3} Q$ und $j = \frac{2}{3} g$; es ist demnach in Fig. 555 $P = \frac{1}{3} Q$ zu nehmen, um Gleichgewicht mit dem abrollenden Cylinder herzustellen.

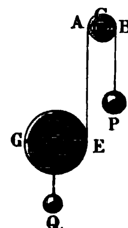


Fig. 555.

Führt man noch das Widerstandsmoment W der rollenden Reibung ein, das bisher vernachlässigt wurde, so sind für Fig. 554a die Ansätze

$$1) \quad mj = G \sin\alpha - S$$
$$2) \quad \mathfrak{Tr}\iota = Sr - W$$

unter Berücksichtigung von $j = r\iota$ zu verbinden.

Man hat hier

$$S = \frac{\mathfrak{Tr}\iota + W}{r} = \frac{\mathfrak{Tr}}{r^2} \cdot j + \frac{W}{r}$$

und

$$mj = G \sin\alpha - \frac{\mathfrak{Tr}}{r^2} \cdot j - \frac{W}{r},$$

d. h.

$$j = \frac{G \sin\alpha - \frac{W}{r}}{m + \frac{\mathfrak{Tr}}{r^2}}.$$

Für $W = N . f_r = G . \cos\alpha . f_r$ erhält man also

$$j = \frac{G\left(\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \frac{f_r}{r}\right)}{m + \frac{\mathfrak{Tr}}{r^2}}$$

und

$$S = G \sin\alpha - \frac{mG\left(\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \frac{f_r}{r}\right)}{m + \frac{\mathfrak{Tr}}{r^2}}.$$

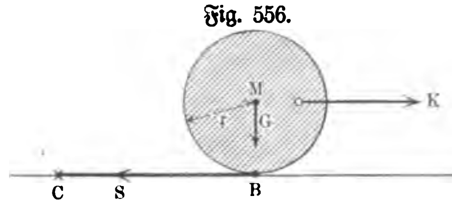


Fig. 556.

Wenn der Cylinder der Fig. 556 durch eine Kraft $[K]$ in M so bewegt wird, daß er durch die Fadenspannung $[S]$ zum Rollen gezwungen wird, so ist wieder $j = \iota r$, und es gilt

$$1) \quad K - S = mj$$
$$2) \quad \iota = \frac{Sr}{\mathfrak{Tr}}.$$

Daraus folgt $S = K \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + mr^2}$ und $j = \frac{K}{m} \cdot \frac{mr^2}{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + mr^2}$.

Für $\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \frac{1}{2}mr^2$ ist dann

$$S = \tfrac{1}{3} K \quad \text{und} \quad j = \tfrac{2}{3}\frac{K}{m} \quad \text{und} \quad \iota = \tfrac{2}{3}\frac{K}{m} \cdot \frac{1}{r}.$$

Tritt statt der Fadenspannung [S] die Reibung ein, so muß

$$fG \geqq K \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + mr^2}$$

sein, d. h. man hat für den Cylinder als Bedingung des Rollens $f \geqq \frac{1}{3}\frac{K}{G}$.

Hat [K] den Wert $fG \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + mr^2}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$, so führt die geringste Vergrößerung von [K] zu einer Bewegung, bei welcher sich Rollen und Gleiten verbindet.

Für $K = fG \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + mr^2}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} + P$ wird das Gleiten durch [P] bewirkt, so daß für das Gleiten

$$j' = \frac{P}{m} = \frac{K}{m} - \frac{fG}{m} \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + mr^2}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$$

als Beschleunigung anzusetzen ist.

Für $\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \frac{1}{2}mr^2$ erhält man $j' = \frac{K - 3fG}{m}$.

Die Beschleunigung der fortschreitenden Bewegung ist hier

$$j + j' = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{3fG}{m} + \frac{K - 3fG}{m} = \frac{K - fG}{m},$$

wie man auch unmittelbar ersieht; die Beschleunigung der Drehung ist nach wie vor

$$\iota = \tfrac{2}{3}\left(\frac{3fG}{m}\right)\frac{1}{r} = \frac{2fG}{m} \cdot \frac{1}{r}.$$

Läßt man den Cylinder durch Zapfen (ϱ) auf Schienen gleiten, so ist wieder ϱ in den Formeln 1) und 2) für r einzuführen.

Läßt man einen beliebigen Körper durch eine Achse (ϱ) auf Schienen gleiten, so gelten für eine freie Achse des Körpers als Drehungsachse nur noch die Gleichungen 1) und 2), falls man r durch ϱ ersetzt.

Sind die Schienen unter dem Winkel α geneigt, so tritt $G \sin\alpha$ für K und $G \cos\alpha$ für G ein, falls der Körper nur durch sein Gewicht getrieben wird.

Man hat hier als Bedingung für die Verbindung rollender und gleitender Bewegung

$$fG\cos\alpha < G\sin\alpha \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + m\varrho^2}.$$

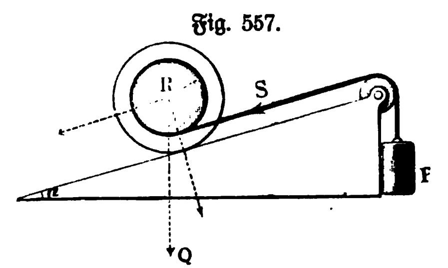
Hier bezeichnet

$$tg\,\alpha = f \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r} + m\varrho^2}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}$$

die Grenze für das reine Rollen (vergl. S. 775).

Auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel α (Fig. 557) befinde sich ein Cylinder vom Halbmesser R, welcher durch ein umgeschlagenes Seil, das, über eine feste Rolle geführt, an seinem Ende ein Gewicht P trägt, in Bewegung gesetzt werden soll. Ist j_1 die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes P und j_2 die des ansteigenden Cylinders vom Gewicht Q, so ist die am Umfange des Cylinders auf Drehung wirkende Beschleunigung $j_3 = j_1 - j_2$.

Fig. 557.



Nennen wir die Spannung im Seile S und sehen von den Hindernissen der Bewegung ab, so ist

$$j_1 = \frac{P - S}{\frac{P}{g}}$$

$$j_2 = \frac{S - Q \sin\alpha}{\frac{Q}{g}}$$

$$j_3 = \iota R = \frac{SR^2}{\mathfrak{Tr}} = j_1 - j_2 = \frac{P - S}{\frac{P}{g}} - \frac{S - Q \sin\alpha}{\frac{Q}{g}}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$S = \frac{1 + \sin\alpha}{1 + \frac{\mathfrak{Tr} \, . \, g}{PR^2} + \frac{\mathfrak{Tr} \, . \, g}{QR^2}} \cdot \frac{\mathfrak{Tr} \, . \, g}{R^2}.$$

Daraus folgt j_3, j_2, j_1 und es ist z. B.

$$j_3 = g \frac{1 + \sin\alpha}{1 + \frac{\mathfrak{Tr} \, . \, g}{QR^2} + \frac{\mathfrak{Tr} \, . \, g}{PR^2}}.$$

Zu demselben Ergebnisse gelangt man folgendermaßen mit Hülfe des Principes von d'Alembert:

Haben P und Q bezw. die Masse m_1 und m_2, so sind die Gegenkräfte der Bewegung $-m_1 j_1$, $-m_2 j_2$ und $-\frac{\mathfrak{Tr}}{R^2} j_3$. Diese müssen mit den ursprünglich angebrachten Kräften im Gleichgewichte sein, d. h. sowohl für fortschreitende, als auch für drehende Bewegung. Für die letztere ist zu bemerken, daß wir es mit einer veränderlichen Drehachse zu thun haben, indem die aufliegende Seite des Cylinders die jedesmalige Drehachse wird.

Für das vorhandene Gleichgewicht bestehen folgende Bedingungen, wobei daran zu denken, daß j_2 in Bezug auf j_1 negativ zu nehmen ist und daß der Massenwiderstand $\frac{\mathfrak{Tr}}{R^2} j_3$ im Umfange des Cylinders, die übrigen Kräfte und Widerstände aber im Schwerpunkte des Körpers wirksam gedacht werden müssen.

$$P - Q \sin\alpha - m_1 j_1 - m_2 j_2 = 0$$

$$PR + QR\sin\alpha - m_1 j_1 R + m_2 j_2 R - \frac{\mathfrak{Tr}}{R^2} j_3 \,.\, 2R = 0.$$

Außerdem ist $j_1 = j_2 + j_3$, daher

$$P - Q\sin\alpha = (m_1 + m_2) j_1 - m_2 j_3$$

$$P + Q\sin\alpha = (m_1 - m_2) j_1 + m_2 j_3 + 2\frac{\mathfrak{Tr}}{R^2} j_3.$$

Multiplizieren wir die erste der Gleichungen mit $m_1 - m_2$, die zweite mit $m_1 + m_2$ und subtrahieren die erste von der zweiten, so entsteht

$$(P + Q\sin\alpha)(m_1 + m_2) - (m_1 - m_2)(P - Q\sin\alpha)$$
$$= j_3\left[m_2(m_1 + m_2) + 2(m_1 + m_2)\frac{\mathfrak{Tr}}{R^2} + (m_1 - m_2) m_2\right].$$

Man hat

$$j_3 = \frac{\frac{P}{m_1} + \frac{Q}{m_2}\sin\alpha}{1 + \frac{\mathfrak{Tr}}{m_2 R^2} + \frac{\mathfrak{Tr}}{m_1 R^2}},$$

oder, statt der Massen die Gewichte eingeführt,

$$j_3 = g\frac{1 + \sin\alpha}{1 + \frac{\mathfrak{Tr}\,.\,g}{QR^2} + \frac{\mathfrak{Tr}\,.\,g}{PR^2}} \text{ u. s. f.}$$

Die Spannung S ist durch $P - m_1 j_1$ bestimmt u. s. f.

Nehmen wir den Körper als Cylinder an, $\mathfrak{Tr}$ also $= \frac{1}{2} m_2 R^2$, und lassen die geneigte Ebene in eine vertikale übergehen, so erhalten wir (Fig. 558)

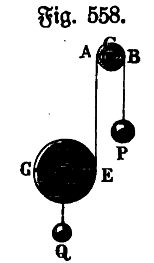
$$j_1 = g\frac{3P - Q}{3P + Q}$$

$$j_2 = -g\frac{P + Q}{3P + Q}$$

$$j_3 = g\frac{4P}{3P + Q}$$

$$S = \frac{2PQ}{3P + Q}.$$

Fig. 558.



Die Beschleunigung j_1 wird positiv bleiben, wenn P sinkt, sie wird beim Steigen von P negativ und endlich Null, wenn P seinen Ort behauptet. Dieser letzte Fall tritt auch ein, wenn das Seilende, anstatt über die feste Rolle geführt zu werden, durch irgend eine Kraft festgehalten wird.

Setzen wir $j_1 = 0$, so ist

$$P = \tfrac{1}{3} Q \text{ und}$$

$$\left.\begin{aligned} j_2 &= -\tfrac{2}{3} g \\ j_3 &= \tfrac{2}{3} g \end{aligned}\right\} \text{ d. h. } j_2 = -j_3$$

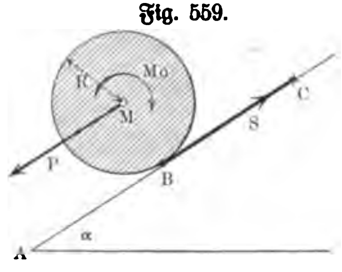
$$S = \tfrac{1}{3} Q.$$

Für diese Annahme ist also die Beschleunigung der fortschreitenden Bewegung gleich der entgegengesetzten Beschleunigung der drehenden am Um-

fange des Cylinders. Derselbe bewegt sich daher vollkommen rollend in senkrechter Richtung aufwärts, was sich ohne Aufhören wiederholen wird, wenn man nach dem Ablaufen des Cylinders die Kraft $\frac{1}{3}Q$ stets von neuem wirken läßt. Vergl. dazu auch die Entwickelung zu Fig. 555.

11. Beschleunigte Bewegung von Fuhrwerken. Ist m_1 die Masse der rollenden Teile (Räder und auch Achsen) und m_2 die Masse der übrigen Teile des Fuhrwerkes, so gilt für die Bewegung eines einzelnen Rades oder Räderpaares folgendes, falls lediglich ein Rollen vorliegt.

Fig. 559.



Bezeichnet j die Beschleunigung der Verschiebung und ι die Winkelbeschleunigung der Drehung (vergl. Fig. 559), $\mathfrak{Tr}$ das Trägheitsmoment der sich drehenden Masse, Mo das Moment der Widerstände und S die Reibung, so ist $j = R\iota$ und ferner

$$\iota = \frac{RS - Mo}{\mathfrak{Tr}} \quad \text{und} \quad j = \frac{P + (m_1 + m_2)g\sin\alpha - S}{m_1 + m_2}.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $S = \frac{\mathfrak{Tr}j + Mo \,.\, R}{R^2}$, so daß man hat

$$j(m_1 + m_2) = P + (m_1 + m_2)g\sin\alpha - \frac{\mathfrak{Tr}}{R^2}j - \frac{Mo}{R}.$$

Bezeichnet man $\frac{\mathfrak{Tr}}{R^2}$ durch μ, so bezeichnet μ die Masse eines materiellen Punktes, welcher die sich drehenden Massen m_1 im Abstande R vom Centrum ersetzt. Man hat dann

$$j(m_1 + m_2 + \mu) = P + (m_1 + m_2)g\sin\alpha - \frac{Mo}{R}.$$

Die theoretische Bestimmung von Mo ist wieder durchaus unsicher, so daß es zweckmäßig ist, Mo durch Versuche zu bestimmen, und zwar folgendermaßen:

Der Winkel α_0, für welchen $j = 0$ ist, soll wieder als die Gleichgewichtsneigung bezeichnet werden, er ist durch Versuche ($P = 0$) zu bestimmen. Führt man ihn ein, so ist

$$0 = (m_1 + m_2)g\sin\alpha_0 - \frac{Mo}{R},$$

d. h. es ist

$$\frac{Mo}{R} = (m_1 + m_2)g\sin\alpha_0.$$

Demnach gilt allgemein

$$\begin{aligned} j(m_1 + m_2 + \mu) &= P + (m_1 + m_2)g\sin\alpha - (m_1 + m_2)g\sin\alpha_0 \\ &= P + (m_1 + m_2)g(\sin\alpha - \sin\alpha_0). \end{aligned}$$

Für kleinere Werte von α und α_0 lassen sich die Sinus durch die Arcus ersetzen, so daß sich

$$j(m_1 + m_2 + \mu) = P + (m_1 + m_2) g (\alpha - \alpha_0)$$

ergiebt.

Die abgeleitete Formel, welche zunächst für ein einzelnes Rad oder Räderpaar gilt, läßt sich wieder (vergl. S. 617) ohne weiteres auf einen Wagen und auf Züge übertragen.

12. Die Bestimmung der Centrifugalkraft für eine Stange, die windschief ist zur Drehungsachse. Die Stangenachse heiße AB und sei für den laufenden Meter durch γ kg belastet. Der Punkt A liege in der XY-Ebene und habe die Koordinaten x' und y', der Punkt B liege in der XZ-Ebene und habe die Koordinaten x'' und z''. Die Linie bilde mit der Z-Achse den Winkel α und habe die Länge l. Für

$$z_1 = \frac{\Sigma m x z}{\Sigma m x}$$

und

$$z_2 = \frac{\Sigma m y z}{\Sigma m y}$$

ergiebt sich

$$z_1 = \tfrac{1}{3} l \cos\alpha \, \frac{2x'' + x'}{x' + x''}$$

$$z_2 = \tfrac{1}{3} l \cos\alpha.$$

Die aus den Centrifugalkräften resultierenden Drucke sind

$$D_1 = \varphi^2 \Sigma m x = \varphi^2 \frac{l\gamma}{g} \cdot \frac{x' + x''}{2}$$

$$D_2 = \varphi^2 \Sigma m y = \varphi^2 \frac{l\gamma}{g} \cdot \frac{y'}{2}.$$

Werden diese an den Schwerpunkt versetzt, so erhält man die Resultante C aus allen Centrifugalkräften

$$C = \varphi^2 \frac{\gamma}{g} \tfrac{1}{2} \sqrt{(x' + x'')^2 + y'^2}.$$

Hierdurch bilden sich zwei Kräftepaare

$$D_1 l \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} \frac{2x'' + x'}{x' + x''}\right) = \tfrac{1}{12} \varphi^2 \frac{l\gamma}{g} (x' - x'') l$$

$$D_2 l \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{1}{12} \varphi^2 \frac{l\gamma}{g} y' l.$$

Wir sehen $\frac{1}{6} l$ als die gemeinschaftliche Breite der beiden Kräftepaare an und vereinigen die beiden Paare zu einem, wobei zu berücksichtigen ist, daß die Paarebenen aufeinander rechtwinkelig stehen.

Das neue Paar ist

$$\tfrac{1}{6} l \cdot \tfrac{1}{2} \varphi^2 \frac{l\gamma}{g} \sqrt{(x' - x'')^2 + y'^2}$$

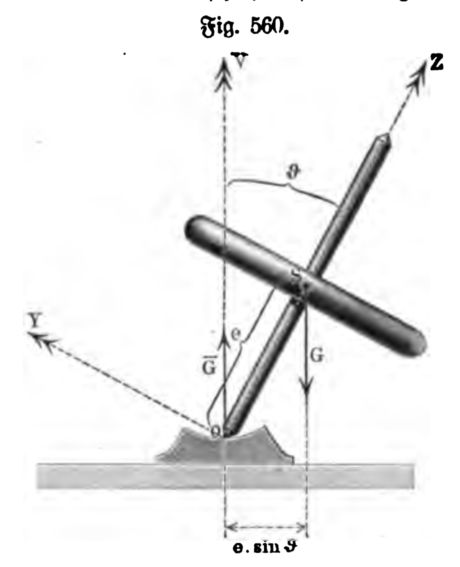
und man hat

$$\cos\varrho = \frac{x' - x''}{\sqrt{(x' - x'')^2 + y'^2}},$$

wenn ϱ den Neigungswinkel der neuen Paarebene mit der Ebene desjenigen Paares bezeichnet, welches in einer zur XZ-Ebene parallelen Ebene liegt.

13. Die Bewegung des Kreisels. Ein Kreisel (Rotationskörper), wie ihn Fig. 560 andeutet, erhalte eine kräftige Drehung um seine Achse OZ und werde dann schief auf das Lager O aufgesetzt.

Fig. 560.



Um die Bewegung der Achse OZ zu untersuchen, benutzen wir ein bewegliches Koordinatenkreuz, indem wir in der Vertikalebene ZOV durch O eine Y-Achse, senkrecht zu OZ, und außerdem eine X-Achse, senkrecht zur Ebene ZOY, einführen.

Um die Lage dieses Kreuzes im Raume zu bestimmen, führen wir $\measuredangle\, ZOV = \vartheta$ ein, suchen ferner die Spur der Ebene ZOY mit der Horizontalebene durch O auf und messen die Stellung (η) dieser Spur gegen eine feste Gerade OH der Horizontalebene.

Die Relativbewegung des Kreisels gegen die XY-Ebene ist nicht von Bedeutung, da dieser wegen seiner Form als Rotationskörper für alle Geraden der XY-Ebene durch O dasselbe Trägheitsmoment hat.

Von Momenten äußerer Kräfte kommt bei Vernachlässigung der Reibungen nur $Ge\sin\vartheta$ zur Geltung und zwar dreht dieses um die X-Achse. Da außerdem $\mathfrak{Tr}_x$ und $\mathfrak{Tr}_y$ denselben Wert haben, der A heißen mag, so lauten die Eulerschen Gleichungen hier

$$1)\quad \iota_x \,.\, A + \varphi_y \varphi_z (A - \mathfrak{Tr}_z) = Ge\sin\vartheta$$
$$2)\quad \iota_y \,.\, A + \varphi_z \varphi_x (\mathfrak{Tr}_z - A) = 0$$
$$3)\quad \iota_z \,.\, \mathfrak{Tr}_z = 0.$$

Aus 3) folgt, daß die Winkelgeschwindigkeit für die Z-Achse konstant ist, also stets den Anfangswert, welcher γ_z heißen mag, beibehält, wie auch aus der Betrachtung der Lage des Momentes zur Achse ohne weiteres folgt.

Anstatt nun Gleichung 1) und 2) für $\varphi_z = \gamma_z$ weiter zu behandeln auf dem Wege, welcher S. 714 eingeschlagen wurde, verfahren wir folgendermaßen.

Da die Kraft $[G]$ parallel zu OV ist, so ist das Moment der Bewegungsgröße für die Achse OV (vergl. S. 697) eine Konstante B. Da die Komponente dieses Momentes nach den Achsen OX, OY, OZ bezw. $\varphi_x \,.\, A$, $\varphi_y \,.\, A$ und $\gamma_z \,.\, \mathfrak{Tr}_z$ sind, so gilt also

$$\text{I)}\quad B = \varphi_y \,.\, A \,.\, \sin\vartheta + \gamma_z \,.\, \mathfrak{Tr}_z \,.\, \cos\vartheta.$$

Bezeichnet man die Anfangswerte von ϑ, φ_x und φ_y bezw. durch ϑ_0, γ_x und γ_y, so ist

$$B = \gamma_y \,.\, A \,.\, \sin\vartheta_0 + \gamma_z \,.\, \mathfrak{Tr}_z \,.\, \cos\vartheta_0.$$

Vergleicht man ferner eine beliebige Stellung (ϑ) der Achse OZ mit deren Anfangsstellung (ϑ_0), so ist die Arbeit der äußeren Kräfte für die Änderung der Stellung (Senkung)

$$Ge(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta).$$

Diese Arbeit entspricht dem Zuwachse an lebendiger Kraft, d. h. dem Werte

$$(\tfrac{1}{2}\varphi_x^2 A + \tfrac{1}{2}\varphi_y^2 A + \tfrac{1}{2}\gamma_z^2 \Sigma \mathfrak{r}_z) - (\tfrac{1}{2}\gamma_x^2 A + \tfrac{1}{2}\gamma_y^2 A + \tfrac{1}{2}\gamma_z^2 \Sigma \mathfrak{r}_z).$$

Demnach gilt

$$\text{II)}\quad \tfrac{1}{2}A(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 - \gamma_x^2 - \gamma_y^2) = Ge(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta).$$

Da der Kreisel bei Beginn seiner Bewegung nur eine Drehung um die Achse OZ haben sollte, so ist $\gamma_x = 0$ und $\gamma_y = 0$ und man erhält

$$\text{I')}\quad \varphi_y A \sin\vartheta + \gamma_z \,.\, \Sigma \mathfrak{r}_z \cos\vartheta = \gamma_z \Sigma \mathfrak{r}_z \cos\vartheta_0$$

und

$$\text{II')}\quad \tfrac{1}{2}A(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = Ge(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta).$$

Aus I') folgt

$$\varphi_y = \frac{\gamma_z \Sigma \mathfrak{r}_z}{A} \cdot \frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

und daraus, mit Rücksicht auf II'), ferner

$$\varphi_x = \pm \sqrt{(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)\left[\frac{2\,Ge}{A} - \frac{\gamma_z^2 \Sigma \mathfrak{r}_z^2}{A^2}\,\frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\right]}.$$

Da die Arbeit der äußeren Kräfte in einer Senkung besteht, so ist $\vartheta \geqq \vartheta_0$ und demnach ist $\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta$ positiv oder Null, es muß also auch die Klammer unter der Wurzel von φ_x positiv bleiben, falls sie nicht Null ist, d. h. man hat

$$\frac{2\,GeA}{\gamma_z^2 \Sigma \mathfrak{r}_z^2} \geqq \frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}.$$

Setzt man $\frac{\gamma_z^2 \Sigma \mathfrak{r}_z^2}{2\,GeA} = 2m$, so ist für die Grenze ($=$) in Geltung

$$\sin^2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta = 2m\cos\vartheta_0 - 2m\cos\vartheta,$$

d. h. man hat

$$\cos^2\vartheta - 2m\cos\vartheta + 2m\cos\vartheta_0 - 1 = 0$$

oder

$$\cos\vartheta = m \pm \sqrt{m^2 - 2m\cos\vartheta_0 + 1}.$$

Für die senkrechte Stellung der Kreiselachse ist $\vartheta_0 = 0$ und $\cos\vartheta_0 = 1$, so daß die Wurzel in diesem Falle den Wert $m - 1$ erhält, und es wird $\cos\vartheta = 2m - 1$ oder 1.

Für eine schiefe Stellung der Kreiselachse ist $\vartheta_0 > 0$ und $\cos\vartheta_0 < 1$, so daß die Wurzel in diesem Falle den Wert $m - 1 + \varepsilon$ erhält, wobei ε eine positive Korrektur bedeutet.

Für die beiden Werte von ϑ, welche der obigen Entwickelung entsprechen, gilt also

$$\cos\vartheta = m + (m - 1 + \varepsilon) = (2m + \varepsilon) - 1$$
$$\cos\vartheta = m - (m - 1 + \varepsilon) = 1 - \varepsilon.$$

Für relativ große Werte von γ_z, wie sie dem rotierenden Kreisel entsprechen, ist m relativ groß, so daß nur der zweite Wert, welcher durch $\bar{\vartheta}$ bezeichnet werden mag, brauchbar ist.

Entwickelt man $\cos\bar{\vartheta}$ für relativ große Werte von m, so gilt

$$\cos\bar{\vartheta} = \cos\vartheta_0 - \frac{1}{2m}\sin^2\vartheta_0 + \cdots$$

Setzt man anderseits $\bar{\vartheta} = \vartheta_0 + \bar{\delta}$, so ist

$$\cos\bar{\vartheta} = \cos\vartheta_0 \cos\bar{\delta} - \cos\vartheta_0 \sin\bar{\delta},$$

und man hat bei Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung

$$\cos\bar{\vartheta} = \cos\vartheta_0 - \sin\vartheta_0 \,.\, arc\,\bar{\delta}.$$

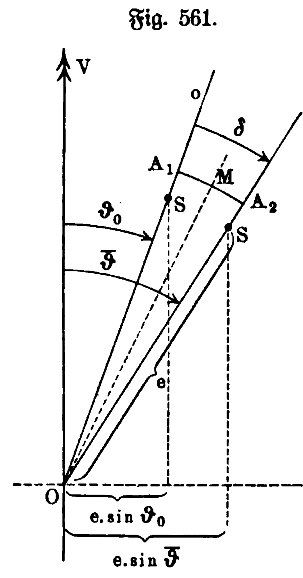
Aus dem Vergleiche der beiden Werte für $\cos\bar{\vartheta}$ folgt

$$arc(\bar{\vartheta} - \vartheta_0) = arc\,\bar{\delta} = \frac{1}{2m}\cdot\sin\vartheta_0 = \frac{2GeA}{\gamma_z^2\Sigma\mathfrak{r}_z^2}\sin\vartheta_0.$$

Der Winkel ϑ vermag demnach die Grenzen ϑ_0 und $\bar{\vartheta} = \vartheta_0 + \bar{\delta}$ nicht zu überschreiten.

Für diese Grenzen wird $\varphi_x = 0$, während eine Überschreitung dieser Grenzen einem imaginären Werte von φ_x entsprechen würde.

Fig. 561.



Der Senkung der Achse entsprechen positive, ihrem Steigen negative Werte von φ_x oder umgekehrt, je nach der Bestimmung des Drehungssinnes. Um auch φ_x und φ_y für relativ große Werte von γ_z angenähert darzustellen, setzen wir $\vartheta = \vartheta_0 + \delta$, so daß δ also in den Grenzen $0 \ldots \bar{\delta}$ liegt. Man hat dann

$$\varphi_y = \frac{\gamma_z\Sigma\mathfrak{r}_z}{A}\cdot arc\,\delta$$

und demnach auch

$$\varphi_x = \pm\sqrt{\frac{2Ge\sin\vartheta_0}{A}\cdot arc\,\delta - \frac{\gamma_z^2\Sigma\mathfrak{r}_z^2}{A^2}\cdot arc^2\,\delta}.$$

Für $\varphi_x = 0$ erhält man wieder $\delta = 0$ oder $\delta = \bar{\delta}$.

Bezeichnet man die Erzeugungsgeschwindigkeit von ϑ oder δ kurz durch φ, so ist natürlich $\varphi = \varphi_x$, d. h. für $arc\,\delta = f(t)$ ist $\varphi_x = f'(t)$.

Versucht man $f(t)$ für den Übergang von $\delta = 0$ über $\delta = \bar{\delta}$ bis $\delta = 0$ als harmonische Schwingung darzustellen, so entspricht diese Annahme (vergl. Fig. 561) der Bewegung eines Pendels, welches sich aus der Seitenlage zu bewegen beginnt.

Für die Mitte M der Schwingung von A_1 über M nach A_2 und von A_2 über M nach A_1 hätte man $f(t) = -r\cos\left(2\pi\cdot\frac{t}{T}\right)$ anzusetzen, damit

für $t = 0$ die Stellung $[-r]$ in A_1 gegeben wird. Fängt man die Stellung in A_1 zu zählen an, so wäre

$$arc\,\delta = f(t) = r - r\,.\,cos\left(2\pi\cdot\frac{t}{T}\right) = r\left[1 - cos\left(2\pi\cdot\frac{t}{T}\right)\right]$$

zu setzen und es wäre ferner $\varphi_x = f'(t) = +r\cdot\frac{2\pi}{T}\,sin\left(2\pi\cdot\frac{t}{T}\right)$ einzuführen.

Unter dieser Annahme geht die Gleichung für φ_x über in

$$r\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot sin\left(2\pi\cdot\frac{t}{T}\right) = \pm\sqrt{ar\left[1 - cos\left(2\pi\cdot\frac{t}{T}\right)\right] - br^2\left[1 - cos\left(2\pi\cdot\frac{t}{T}\right)\right]^2},$$

falls man die Faktoren von $arc\,\delta$ und $arc^2\,\delta$ bezw. durch a und b bezeichnet.

Diese Gleichung erweist sich als richtig für $t = 0$ und für $t = T$.

Für $t = \frac{1}{2}T$ ergiebt sie

$$2ar - 4br^2 = 0,$$

d. h.

$$r = 0 \quad \text{und} \quad r = \frac{a}{2b} = \frac{G\,.\,e\,.\,A\,.\,sin\,\vartheta_0}{\gamma_z^2\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z^2}.$$

Für $t = \frac{1}{4}T$ und $t = \frac{3}{4}T$ führt sie zu

$$r\cdot\frac{2\pi}{T} = \pm\sqrt{ar - br^2},$$

d. h. man hat

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{b} = \frac{4\pi^2A^2}{\gamma_z^2\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z^2}$$

oder

$$T = \frac{2\pi}{\gamma_z}\cdot\frac{A}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}.$$

Setzt man nun die gefundenen Werte von r und T in unsere Gleichung ein, so wird sie in sich befriedigt. Demnach gilt

$$arc\,\delta = \frac{G\,.\,e\,.\,A\,.\,sin\,\vartheta_0}{\gamma_z^2\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z^2}\left[1 - cos\left(\frac{\gamma_z\,.\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}{A}\cdot t\right)\right].$$

Bei der gewählten Annäherung entspricht also die Veränderlichkeit von δ bezw. von ϑ thatsächlich einer harmonischen Schwingung von der Amplitude r und der Schwingungsdauer T.

Demnach ist auch

$$\varphi_y = \frac{\gamma_z\,.\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}{A}\cdot arc\,\delta = \frac{Ge\,sin\,\vartheta_0}{\gamma_z\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}\left[1 - cos\left(\frac{\gamma_z\,.\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}{A}\cdot t\right)\right]$$

bestimmt.

Aus φ_y läßt sich leicht die Winkelgeschwindigkeit φ_V für die Vertikale OV ableiten, man hat

$$\varphi_V = \frac{\varphi_y}{sin\,\vartheta} = \frac{Ge}{\gamma_z\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}\cdot\frac{sin\,\vartheta_0}{sin\,\vartheta}\left[1 - cos\left(\frac{\gamma_z\,.\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}{A}\cdot t\right)\right].$$

Da ϑ nur in den engen Grenzen ϑ_0 und $\bar{\vartheta}$ schwankt, so erhält man eine brauchbare Annäherung, wenn man $sin\,\vartheta$ gegen $sin\,\vartheta_0$ forthebt. Man hat dann

$$\varphi_V = \frac{Ge}{\gamma_z \mathfrak{Tr}_z}\left[1 - \cos\left(\frac{\gamma_z \mathfrak{Tr}_z}{A} \cdot t\right)\right]$$

als Winkelgeschwindigkeit der Kreiselachse um die Vertikale OV.

Projiziert man die Achse auf die Horizontale, so ist der Winkelweg $arc\,\eta$ leicht aus φ_V abzuleiten, man hat beim Übergange zum Stamme

$$arc\,\eta = \frac{Ge}{\gamma_z \mathfrak{Tr}_z}\left[t - \frac{A}{\gamma_z \mathfrak{Tr}_z} \sin\left(\frac{\gamma_z \mathfrak{Tr}_z}{A} \cdot t\right)\right] + C,$$

wobei C eine Konstante bezeichnet.

Soll $\eta = 0$ sein für $t = 0$, so ist $C = 0$ zu setzen, d. h. man hat

$$arc\,\eta = \frac{Ge}{\gamma_z \mathfrak{Tr}_z}\left[t - \frac{A}{\gamma_z \mathfrak{Tr}_z} \sin\left(\frac{\gamma_z \mathfrak{Tr}_z}{A} \cdot t\right)\right].$$

Fig. 562.

Zeichnet man irgend einen Punkt, z. B. den Schwerpunkt, auf der Horizontalprojektion der Kreiselachse aus, so entsteht in der Horizontalebene ein Bild, wie es Fig. 562 andeutet.

Setzt man in der Formel für $arc\,\eta$ einmal $t = 0$ und einmal $t = T$, so erhält man $arc\,\bar{\eta}$, entsprechend dem Bahnstücke ABC bezw. entsprechend dem Winkel AOC. Es ist

$$arc\,\bar{\eta} = 2\pi \cdot \frac{GeA}{\gamma_z^2 \cdot \mathfrak{Tr}_z^2}.$$

Die Anzahl n der Schwankungen der Kreiselachse, wie ABC, welche auf eine volle Umdrehung dieser Achse fallen, beträgt

$$n = \frac{2\pi}{arc\,\bar{\eta}} = \frac{\gamma_z^2 \cdot \mathfrak{Tr}_z^2}{GeA}.$$

Da $arc\,\bar{\eta}$ in der Zeit T beschrieben wird, so erfordert ein voller Umgang der Achse die Zeit

$$\Theta = \frac{2\pi}{arc\,\bar{\eta}} \cdot T = \frac{\mathfrak{Tr}_z}{Ge} \cdot \gamma_z \cdot 2\pi.$$

Die durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit dieses Umganges ist also $\frac{Ge}{\mathfrak{Tr}_z \cdot \gamma_z}$.

Der Sinn von $[\gamma_z]$ und $[\varphi_V]$ stimmt überein, d. h. für einen Beschauer, der von oben längs der Achsen ZO und VO blickt, ist entweder beide Male Uhrzeigerdrehung vorhanden oder beide Male nicht.

Es mag noch bemerkt werden, daß φ_V und $arc\,\eta$ bei der gewählten Annäherung von ϑ_0 unabhängig sind.

Ein Kreisel, welcher mit einem großen Werte von γ_z seine Bewegung beginnt, beschreibt langsam (vergl. Θ) einen Kegel mit vielen (vergl. n), aber kleinen (vergl. $arc\,\bar{\eta}$) Einbuchtungen. Die Reibungen (Befestigung und Luftwiderstand) verändern langsam den Wert von γ_z, so daß die Umgänge

rascher, die Einbuchtungen seltener, aber größer werden, bis schließlich ein Umfallen des Kreisels eintritt.

Da φ_V und $arc\, \eta$ proportional sind zu e, so verschwinden diese Größen für $e = 0$, d. h. für den Fall, daß der Schwerpunkt des Kreisels mit O zusammenfällt.

Fig. 563.



Dies läßt sich, ebenso wie die vorher beschriebenen Bewegungen, veranschaulichen durch den Fesselschen Rotationsapparat, welcher in Fig. 563 abgebildet ist.

Über die Beziehungen der Kreiseltheorie zur Praxis des Maschinenbaues vergl. Föppls Mechanik, Bd. IV.

Übungen zur Kinetik des starren Körpers.

1. Unter Berücksichtigung der Reibungen sind die Gesetze für eine beschleunigte Bewegung gemäß Fig. 151 zu entwickeln.

Bezeichnet man das Gewicht der Rolle mit G, so ist ihr Trägheitsmoment als $\frac{1}{2}\frac{G}{g}r^2$ anzusetzen, falls r den Rollenradius bezeichnet.

Bezeichnet man den Zapfenhalbmesser durch ϱ, so ist das Moment der Zapfenreibung $D \,.\, \varrho \,.\, f_z$, wobei für den Druck D gilt

$$D^2 = (P + G)^2 + (fQ)^2.$$

Es ist dann, falls die Seildicke δ ist,

$$j = g \cdot \frac{P - fQ - \frac{13\,\delta^2 fQ}{r} - \frac{D \,.\, \varrho \,.\, f_z}{r}}{P + Q + \frac{1}{2}G}$$

$$v = v_0 + jt \text{ u. s. w.}$$

2. Wie ändert sich die Formel von Nr. 1, wenn P nicht durch Rollenübertragung als Gewicht wirkt, sondern unmittelbar als Kraft an Q?

$$j = g \cdot \frac{P - fQ}{Q} \text{ u. s. w.}$$

3. Wenn im Falle der Nr. 2 die Kraft P plötzlich zu wirken aufhört (Abstellung der Triebkraft), nachdem Q die Geschwindigkeit c erlangt hat, so tritt eine verzögerte Bewegung ein. Wie lange dauert diese? Welche Strecke wird noch zurückgelegt?

$$j = -fg.$$

Die (aktuelle) Energie $\frac{1}{2}\frac{Q}{g}c^2$ wird auf der Strecke s durch die Reibung fQ aufgezehrt, d. h. $s \,.\, 2fg = c^2$. Da $v = v_0 + jt$ und $v = 0$, $v_0 = c$, so ist $t = \frac{c}{fg}$.

4. Eine Lokomotive besitzt in dem Augenblicke, wo der Dampf abgesperrt wird, eine Geschwindigkeit von $11{,}3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Welchen Weg legt sie zurück, wenn $f = 0{,}004$ gesetzt wird, und welche Zeit gebraucht sie dazu?

$$s = 1628 \text{ m} \quad \text{und} \quad t = 288 \text{ Sekunden.}$$

5. Die Verhältnisse der Fig. 203 sind zu behandeln, wie unter Nr. 1, falls die Körper A_1 und A_2 gleiten.

Bei Vernachlässigung der Widerstände von Seil und Rolle beträgt die Seilspannung $S = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}[\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 - f(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)]$.

6. Wie ändert sich das Ergebnis der Nr. 5, wenn eine Ebene und wenn beide Ebenen vertikal werden?

$$S = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}(1 + \sin\alpha_2 + f\cos\alpha_2) \quad \text{und} \quad S = 2\frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}.$$

7. Der Sonderfall der Nr. 5, der durch Fig. 152 dargestellt wird, soll unter Berücksichtigung aller Widerstände behandelt werden.

Bezeichnet man das Gewicht der Rolle durch V und die Seildicke durch δ, so ist

$$j = g\frac{P - Q - \frac{13\,\delta^2 Q}{r_1} - \frac{f_2 \cdot r_2}{r_1}\cdot(P + Q + V)}{P + Q + \frac{1}{2}V}.$$

8. Bei der Atwoodschen Fallmaschine, welche Nr. 7 entspricht, können in erster Annäherung alle Widerstände vernachlässigt werden, so daß (vergl. S. 275) gilt

$$j \sim g \cdot \frac{P - Q}{P + Q}.$$

Für $Q = 0{,}80\,\text{kg}$ und $P = 0{,}84\,\text{kg}$ ist $j = 0{,}24\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

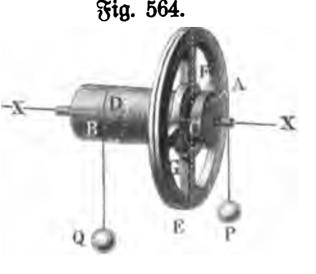
Für $j = 0{,}13\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ und $P = 2{,}50\,\text{kg}$ ist $Q = 2{,}434\,\text{kg}$.

9. Die Verhältnisse der Fig. 204 sind zu behandeln wie unter Nr. 1, falls die Körper A_1 und A_2 gleiten.

Bei Vernachlässigung der Widerstände von Seil und Rolle gilt

$$S_1 r_1 = S_2 r_2 = \frac{P_1 P_2}{P_1 r_1^2 + P_2 r_2^2}[r_1 r_2^2(\sin\alpha_1 - f\cos\alpha_1) + r_1^2 r_2(\sin\alpha_2 + f\cos\alpha_2)].$$

Fig. 564.



10. Die Ergebnisse von Nr. 9 sind im besondern für $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^0$ abzuleiten, vergl. Fig. 564.

Kraft P und Last Q mögen an vollkommen biegsamen Schnüren wirken, deren Gewicht nicht berücksichtigt wird. Das Rad, mit Armen und Nabe konstruiert, habe den mittleren Halbmesser R, die Welle den Halbmesser r und deren Zapfen den Halbmesser ϱ. Das Gewicht des Kranzes sei A, das der Arme und Nabe $\frac{1}{3}A$ und das Gewicht der Welle B Kilogramm.

Wir nehmen an, daß $PR > Qr$ ist. Die Beschleunigungen der beiden Gewichte seien j_1 und j_2, die zu einer Umdrehung der Maschine notwendige Zeit sei t, dann ist $2R\pi = \frac{1}{2}j_1 t^2$ und $2r\pi = \frac{1}{2}j_2 t^2$, daher

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{R}{r}$$

$$j_1 = \frac{P - Q\frac{r}{R} - f(P + Q + \frac{4}{3}A + B)\frac{\varrho}{R}}{P + Q\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{\mathfrak{Tr}\,.\,g}{R^2}}\,g,$$

unter $\mathfrak{Tr}$ das Trägheitsmoment der ganzen Maschine verstanden.

Die Spannung S_1 des Seiles, an dem P wirksam, ist

$$S_1 = P - \frac{P}{g}\,j_1.$$

Die Spannung S_2 des anderen Seiles ist

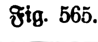
$$S_2 = Q + \frac{Q}{g}\,j_2.$$

Der Druck D auf die Zapfen ist demnach, abgesehen von dem Gewichte der Maschine

$$D = S_1 + S_2 = P + Q - j_1\left(\frac{P}{g} - \frac{Q}{g}\cdot\frac{r}{R}\right),$$

also kleiner als in dem Zustande des Gleichgewichtes.

11. Eine oder die andere der vorstehenden Aufgaben ist unmittelbar durch das Princip von d'Alembert zu lösen.



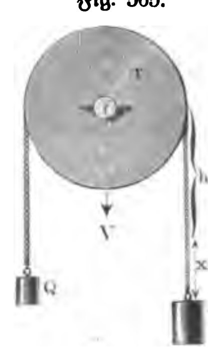


Fig. 565.

12. In den vorigen Aufgaben ist stets das Gewicht des Seiles vernachlässigt worden. Denken wir die Gewichte P und Q an einer eisernen Kette (Fig. 565) hängend, die sich um die feste Rolle legt, so kommen zu der bewegenden Kraft in jedem Moment neue Kettenstücke als Überschuß hinzu, während das Gegengewicht sich in gleichem Maße verringert.

Der Halbmesser der Rolle sei r, die Kettenlänge sei $\pi r + l$, die Längeneinheit derselben habe ein Gewicht von γ Kilogramm. Wir lassen die Nebenhindernisse außer Betracht und nehmen das frei herunterhängende Kettenstück, an dem P wirksam ist, zu Anfang der Bewegung von der Länge h an.

Erfolgt die Bewegung im Sinne von $[P]$, so ist die bewegende Kraft, falls bereits ein Kettenstück von der Länge x hinzugekommen ist,

$$P + \gamma(h + x) - [Q + \gamma(l - [h + x])] = P - Q - \gamma l + 2\gamma(h + x),$$

während die bewegte Masse den Wert

$$\frac{P + Q + \gamma(l + r\pi) + \frac{1}{2}V}{g}$$

hat, falls V das Gewicht der Rolle bezeichnet.

Demnach ist die Beschleunigung j von P in diesem Falle gegeben als

$$j = \frac{a + x}{b^2},$$

falls $\frac{P - Q - \gamma l}{2\gamma} + h = a$ und $\frac{P + Q + \gamma(l + r\pi) + \frac{1}{2} V}{g \, . \, 2\gamma} = b^2$ gesetzt wird.

Ist $x = f(t)$, so ist $j = f''(t)$.

Setzt man $a + x = \varphi(t)$, so ist $a + f(t) = \varphi(t)$, d. h. man hat $f''(t) = \varphi''(t)$ und demnach ist

$$\varphi''(t) = \varphi(t) \cdot \frac{1}{b^2}.$$

In dieser Gleichung ist b^2 positiv und man erhält (vergl. S. 269)

$$\varphi(t) = A \, . \, e^{+\frac{t}{b}} + B \, . \, e^{-\frac{t}{b}}.$$

Demnach ist $x = \varphi(t) - a$ und

$$v = \varphi'(t) = \frac{A}{b} \cdot e^{+\frac{t}{b}} - \frac{B}{b} \cdot e^{-\frac{t}{b}}$$

bestimmt.

Sind die Werte von x und v zur Zeit $t = 0$ bezw. x_0 und v_0, so ist

$$x_0 = A + B - a \quad \text{und} \quad v_0 = \frac{A - B}{b},$$

d. h. es ist

$$A = \frac{x_0 + a + bv_0}{2} \quad \text{und} \quad B = \frac{x_0 + a - bv_0}{2}.$$

13. Wenn in Nr. 10 das Gewicht P unmittelbar durch eine Triebkraft ersetzt wird, welche plötzlich abgestellt werden kann, so gilt nach dem Abstellen

$$j_2 = \frac{Q + f(Q + \frac{4}{3} A + B) \frac{\varrho}{r}}{\frac{\mathfrak{T}\mathrm{r}}{r^2}},$$

falls auch das Gewicht Q durch eine Kraft ersetzt wird.

Ist die Winkelgeschwindigkeit beim Abstellen γ, so ist

$$0 = \gamma - \frac{j_2}{r} t,$$

d. h. $t = \frac{r\gamma}{j_2}$ bezeichnet die Zeit, welche die Maschine noch unter Überwindung der Widerstände läuft.

Für den Winkelweg gilt $\sigma = \gamma t - \frac{1}{2} \frac{j_2}{r} t^2 = \frac{1}{2} \frac{r\gamma^2}{j_2}$.

Macht die Maschine nach dem Abstellen noch u Umdrehungen, so ist $\sigma = u \, . \, 2\pi$, d. h. es ist

$$j_2 = \frac{r\gamma^2}{4\pi u}.$$

Bei Vernachlässigung der Reibungen ist $j_2 = \frac{Qr^2}{\mathfrak{T}\mathrm{r}}$, d. h. man hat

$$\frac{Qr}{\mathfrak{T}\mathrm{r}} = \frac{\gamma^2}{4\pi u}.$$

Entsprechen dem Momente Qr bei der Winkelgeschwindigkeit γ (bezw. n als Tourenzahl) N Pferdestärken, so ist

$$Qr = 716 \frac{N}{n} \quad \text{und} \quad \gamma = 0{,}1047\, n$$

und

$$\mathfrak{T}r = 716 \frac{N}{n} \cdot \frac{4\pi u}{(0{,}1047)^2 \,.\, n^2}$$

$$= \frac{4\pi \,.\, 716}{(0{,}1047)^2} \cdot \frac{N \,.\, u}{n^3} \sim 820\,680 \frac{N \,.\, u}{n^3}.$$

Soll also die Maschine, welche N Pferdestärken bei der Tourenzahl n leistet, nach Abstellung der Triebkraft noch u Umdrehungen machen bis zum Stillstande, so muß ihr Trägheitsmoment der obigen Bedingung genügen.

14. Das Trägheitsmoment der Welle in Fig. 564 ist $\frac{1}{2}\frac{B}{g} r^2$.

Für die Berechnung des Trägheitsmomentes für das Rad diene Fig. 566, welche überhaupt ein **Schwungrad** darstellt.

Es sei das Gewicht des äußeren Kranzes A, das der Nabe A', das eines Armes C. Die Arme nehmen wir der Einfachheit wegen prismatisch von quadratischem Querschnitt an, dessen Seite gleich a sein mag. Die Halbmesser seien der Reihe nach gleich R_1, R_2, r_1 und r_2.

Fig. 566.

Die Drehachse sehen wir als die Achse an, auf welche die Trägheitsmomente bezogen werden sollen. Für diesen Fall ist das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}r$ des ganzen Rades gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Teile

$$\mathfrak{T}r = \mathfrak{T}r_1 + \mathfrak{T}r_2 + 6\,\mathfrak{T}r_3$$

$$\mathfrak{T}r_1 = \frac{1}{2}\frac{A}{g}(R_1^2 + R_2^2)$$

$$\mathfrak{T}r_2 = \frac{1}{2}\frac{A'}{g}(r_1^2 + r_2^2).$$

Bei Berechnung des Trägheitsmomentes eines Armes ist zu beachten, daß derselbe um eine Achse schwingt, die parallel einer Kante a ist. Die Länge eines Armes ist $R_2 - r_1$, für $\mathfrak{T}r_3$ erhalten wir daher

$$\mathfrak{T}r_3 = \frac{1}{12}\frac{C}{g}[a + (R_2 - r_1)^2] + \frac{C}{g}\left(\frac{R_2 + r_1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}\frac{C}{g}[a^2 + (R_2 - r_1)^2 + 3(R_2 + r_1)^2].$$

Hiernach ist das Trägheitsmoment des Rades

$$\mathfrak{T}r = \frac{1}{2g}\Big[A(R_1^2 + R_2^2) + A'(r_1^2 + r_2^2) + C[a^2 + (R_2 - r_1)^2 + 3(R_2 + r_1)^2]\Big].$$

Die auf den Umfang reduzierte Masse aber ist gleich

$$\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{R_1^2}.$$

Dieser Wert des Trägheitsmomentes soll zur praktischen Verwendung vereinfacht werden.

Es sei R der mittlere Halbmesser des Schwungringes und b die Breite desselben in radialer Richtung, dann ist bei Voraussetzung eines rechteckigen Schwungringquerschnittes

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_1 = \tfrac{1}{2}\frac{A}{g}(R_1^2 + R_2^2) = \tfrac{1}{2}\frac{A}{g}\left[\left(R + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{b}{2}\right)^2\right]$$

d. h.

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_1 = \frac{A}{g}\left(R^2 + \frac{b^2}{4}\right).$$

Das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_2$ der Nabe vernachlässigen wir ganz und nehmen statt dessen an, die Arme reichten bis zum Mittelpunkte des Schwungrades, ihre Länge sei also gleich R. Für diese Voraussetzung ist das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_3$ eines Armes

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_3 = \tfrac{1}{12}\frac{C}{g}(a^2 + R^2) + \frac{C}{g}\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

oder

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_3 = \tfrac{1}{3}\frac{C}{g}\left(R^2 + \frac{a^2}{4}\right).$$

Das Trägheitsmoment des Schwungrades ist deshalb, wenn n Arme vorhanden,

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \frac{A}{g}\left(R^2 + \frac{b^2}{4}\right) + \tfrac{1}{3}\frac{nC}{g}\left(R^2 + \frac{a^2}{4}\right).$$

Da b und a gegen R verhältnismäßig klein sind, so kann man $\frac{a^2}{4}$ und $\frac{b^2}{4}$ gegen R^2 vernachlässigen, und es ist dann

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \frac{R^2}{g}(A + \tfrac{1}{3}nC).$$

In den gewöhnlichen Fällen ist das Gewicht nC der Arme $\frac{1}{3}$ von dem Gewicht A des Schwungringes, weshalb $\frac{1}{3}nC$ gleich $\frac{1}{9}A \sim 0{,}1\,A$ genommen werden kann. Man hat also

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} = 1{,}1\,\frac{A}{g}R^2,$$

worin A das Gewicht des Schwungringes bedeutet.

Für Nr. 10 und Nr. 13 gilt also in Annäherung $\mathfrak{T}\mathfrak{r} = 1{,}1\,\frac{A}{g}\cdot R^2 + \frac{1}{2}\frac{B}{g}r^2$.

15. Wie groß ist das Trägheitsmoment eines Schwungrades, für welches $A = 5000\,\text{kg}$, $A' = 500\,\text{kg}$, $C = 250\,\text{kg}$, $R_1 = 3{,}45\,\text{m}$, $R_2 = 3{,}3\,\text{m}$, $r_1 = 0{,}104\,\text{m}$, $r_2 = 0{,}052\,\text{m}$? Es sind sechs Arme vorhanden, deren Querschnitt ein Rechteck von der Breite 0,078 m und der Höhe 0,104 m sein mag.

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_1 = \tfrac{1}{2}\frac{A}{g}(R_1^2 + R_2^2) = \frac{56\,981{,}25}{g}$$

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_2 = \tfrac{1}{2}\frac{A'}{g}(r_1^2 + r_2^2) = \frac{3{,}38}{g}$$

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r}_3 = \tfrac{1}{12}\frac{nC}{g}[a^2 + (R_2 - r_1)^2] + \frac{nC}{g}\left(\frac{R_2 + r_1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1278{,}15}{g} + \frac{4345{,}2}{g} = \frac{5623{,}35}{g}$$

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \frac{62\,607{,}98}{g} = 6382.$$

Bei Benutzung der in der vorigen Aufgabe entwickelten angenäherten Formeln erhält man der Reihe nach

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} \sim \frac{56\,981{,}25}{g} + \frac{5696{,}66}{g} = \frac{62\,677{,}91}{g} = 6389$$

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} \sim \frac{62\,648{,}44}{g} = 6386$$

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} \sim \frac{62\,648{,}44}{g} = 6386.$$

Die auf den mittleren Radius R reduzierte Masse beträgt

$$M = \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{R^2} = 560{,}6.$$

16. Ein Schwungring mit den Halbmessern a_1 und b_1 und der Dicke c_1 soll durch einen anderen ersetzt werden von den Halbmessern a_2 und b_2. Welche Dicke erhält derselbe?

$$\frac{a_1^4 - b_1^4}{a_2^4 - b_2^4} \cdot c_1.$$

17. Handelt es sich um ein Schwungrad, dessen Masse sehr groß ist gegen die Masse der Welle, so läßt sich für Rad und Welle $\mathfrak{T}\mathfrak{r} \sim 1{,}1\frac{A}{g}R^2$ setzen.

Man hat dann, gemäß Nr. 13, hier

$$A = 7\,319\,900\frac{u \,.\, N}{n^3} \cdot \frac{1}{R^2}.$$

18. Es sei nach den vorigen Formeln das Gewicht des Schwungrades einer Schneidemühle zu berechnen. Zum Betriebe derselben sind 7 Pferdestärken nötig, wobei das Sägegatter 80 Hube in einer Minute macht. Das Gewicht des Schwungrades soll der Bedingung genügen, daß die Betriebswelle des Gatters nach dem plötzlichen Ausrücken der Kraftwelle vermöge ihres Beharrungsvermögens noch fünf Umdrehungen mache. Der äußere Halbmesser des Schwungrades sei 0,889 m, der innere 0,798 m.

Es ist

$$R \sim \frac{0{,}889 + 0{,}798}{2} = \frac{1{,}687}{2} = 0{,}843\,\text{m};\; n = 80;\; u = 5$$

$$N = 7;$$

daher

$$A = \frac{7\,319\,900\ .\ 5\ .\ 7}{0{,}843^2\ .\ 80^3} = 704\ \text{kg}.$$

19. Soll die Zeit t für den Auslauf in die Formel eintreten (statt der Anzahl u der Umdrehungen), so folgt aus

$$t = \frac{r\ .\ \gamma}{j_2} \quad \text{und} \quad j_2 = \frac{Qr^2}{\mathfrak{Tr}} \quad \text{und} \quad \gamma = 0{,}1074\,n$$

$$t = \frac{\gamma\ .\ \mathfrak{Tr}}{Qr} = \frac{\gamma\ .\ \mathfrak{Tr}\ .\ n}{N\ .\ 716} = \frac{0{,}1074}{716}\frac{n^2\ .\ \mathfrak{Tr}}{N}$$

$$\mathfrak{Tr} = \frac{N\ .\ t}{n^2}\ .\ 6839.$$

20. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Zeit des Auslaufes und der Anzahl u der Umdrehungen, gemäß Nr. 13 und 19?

Aus $\sigma = \frac{1}{2}\gamma t$ und $\sigma = u\ .\ 2\pi$ folgt

$$120\,u = n : t.$$

21. Die Betrachtungen der vorigen Nummer sind durch die Beziehung zwischen Arbeit und Energie abzuleiten.

22. Auf einer stehenden Welle von 3 m Länge und 0,052 m Radius, deren Stützzapfen den Radius 0,033 m hat, sitzt eine Scheibe von der Stärke 0,104 m und dem Radius 2,2 m. Wie groß ist die Zeit t des Auslaufes und wie groß die Anzahl u, wenn die Maschine beim Abstellen $n = 40$ Touren hat? Reibungskoeffizient $f = 0{,}075$.

Setzt man $\frac{1}{2} f D \varrho$ als Reibungsmoment an, so ist

$$t = 999'' \quad \text{und} \quad u = 333.$$

Kontrolle: $120\ .\ 333 = 40\ .\ 999$.

23. Auf derselben Drehachse befinden sich zwei Scheiben von den Halbmessern 2,4 m und 1,6 m. Über die erste derselben ist eine vollkommen biegsame Schnur gelegt, die an ihren Enden Gewichte gleich 4 und 6 kg trägt. Welche Gewichte muß man an der anderen Scheibe anbringen, damit die Bewegungsverhältnisse dieselben bleiben, wenn die zuerst wirksamen Gewichte fortgenommen werden?

Es ist, die beiden unbekannten Gewichte mit P und Q bezeichnet, die bewegende Kraft $P - Q$, und die zu bewegende Masse $\frac{P+Q}{g}$. Die Bewegungsverhältnisse sollen durch Umänderung der Gewichte dieselben bleiben; das ist nur möglich, wenn die Trägheitsmomente der Massen und wenn die Arbeitsgrößen der bewegenden Kräfte unverändert bleiben. Bezeichnen wir die bei der Drehung stattfindende Winkelgeschwindigkeit mit γ, so haben wir hiernach zur Berechnung der unbekannten Gewichte folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{4+6}{g}\ .\ 2{,}4^2 = \frac{P+Q}{g}\ .\ 1{,}6^2$$

$$(6-4)\,2{,}4\ .\ \gamma = (P-Q)\ .\ 1{,}6\ .\ \gamma.$$

Hieraus erhält man

$$P = 12{,}75\ \text{kg},\ Q = 9{,}75\ \text{kg}.$$

24. Wenn man bei einem Schwungrade mit einem Kranze von rechteckigem Querschnitt Speichen und Nabe unberücksichtigt läßt, so gilt für die Radien r_1 und r_2

$$\mathfrak{T}r = M\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}.$$

Der Trägheitsarm ϱ ist in diesem Falle $\varrho = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}$.

Für $r_1 = r_2 + d$ erhält man

$$\varrho^2 = \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4}d^2.$$

Je weniger also r_1 und r_2 voneinander abweichen, um so mehr ist man berechtigt, $\varrho = \frac{r_1 + r_2}{2}$ zu setzen. Vergl. Nr. 18.

Für das Gewicht $G = M \cdot g$ des Rades folgt zunächst

$$G = \frac{g \cdot \mathfrak{T}r}{\varrho^2}, \text{ d. h. } G = \frac{2 \cdot g \cdot \mathfrak{T}r}{r_1^2 + r_2^2}$$

und dann angenähert

$$G \sim \frac{4 \cdot g \cdot \mathfrak{T}r}{(r_1 + r_2)^2}.$$

Man rechnet in der Praxis zunächst für einen Überschlag gemäß Nr. 13 bezw. Nr. 19 und hat also

$$G = \frac{g \cdot N \cdot u \cdot 820\,680}{n^3 \cdot \varrho^2} \quad \text{oder} \quad G = 6839 \cdot \frac{g \cdot N \cdot t}{n^2 \cdot \varrho^2}.$$

25. Gemäß Nr. 24 ist das Gewicht eines Schwungrades für $\varrho = 3$ m zu berechnen, falls 200 PS. bei einer Tourenzahl $n = 80$ geleistet werden, und falls die Maschine nach Abstellen der Triebkraft noch 20″ laufen soll. Wieviel Umdrehungen (u) werden noch gemacht?

$$G = 4659 \text{ kg} \quad \text{und} \quad u = 13^1/_3.$$

26. Gemäß Nr. 24 ist die Zeit t des Auslaufes zu berechnen, falls 250 PS. bei einer Tourenzahl $n = 100$ gegeben sind und falls das Schwungrad das Gewicht 15 000 kg und den mittleren Radius $\varrho = 2$ m hat. Wieviel Umdrehungen entsprechen der Zeit des Auslaufes?

$$t = 35{,}8'' \quad \text{und} \quad u \sim 30.$$

27. Gemäß Nr. 24 ist die Leistung N in PS. für eine Maschine zu berechnen, falls das Schwungrad das Gewicht 10 000 kg und den mittleren Radius 3 m hat und falls bei einer Tourenzahl $n = 50$ der Auslauf 10″ dauert:

$$N = 335{,}4.$$

28. Welche Tourenzahl entspricht den Angaben $G = 20\,000$, $\varrho = 2$ m, $N = 100$ und $t = 30$?

$$n = 50{,}16.$$

29. Welchen mittleren Radius ϱ hat ein Schwungrad vom Gewichte $G = 10\,000$ kg, falls bei $N = 300$ und $n = 120$, im Auslaufe noch $u = 30$ Umdrehungen erfolgen?

$$\varrho = 2{,}048 \text{ m}.$$

30. Aufgabe Nr. 29 ist weiterzuführen für $r_1 = 2{,}2$ m.

Aus $2\varrho^2 = r_1^2 + r_2^2$ folgt r_2, aus $G = (r_1^2 - r_2^2)\pi \,.\, d \,.\, \sigma$ folgt für die Stärke d des Rades bei dem specif. Gewicht $\sigma = 7{,}5$.

$$r_2 = 1{,}883 \text{ m} \quad \text{und} \quad d = 0{,}328 \text{ m}.$$

31. Welche (aktuelle) Energie wirkt als Zerstörungsarbeit auf die Maschine, wenn die Tourenzahl des Schwungrades in Nr. 27 plötzlich von 50 auf 30 herabgesetzt wird?

80 485 mkg.

32. Eine Maschine läuft, um zur Ruhe zu kommen, beim Leerlaufe 500″, im Betriebe 20″.

Welches ist ihre Leistung für den Betrieb, falls $G = 10\,000$ kg, $\varrho = 2$ m und $n = 50$ ist?

$$N = N_1 - N_2 = 74{,}52 - 2{,}98 = 71{,}54 \text{ PS}.$$

33. In welcher Zeit kommt eine Maschine, für deren Schwungrad $G = 10\,000$ kg und $\varrho = 2$ m gilt, beim Anlaufen in Gang, wenn $n = 200$ und $N = 400$ ist?

$$t \sim 60''.$$

34. Wie groß ist das Gewicht G eines Schwungrades für den Trägheitsarm $\varrho = 2$ m, falls $n = 200$ und $N = 400$ ist und der Ungleichförmigkeitsgrad $\delta = \frac{1}{50}$ ist (vergl. Formel Nr. 250)?

$$G \sim 270 \text{ kg}.$$

35. Welchem Ungleichförmigkeitsgrad δ entspricht die Angabe G gleich 10 000 kg, $\varrho = 2$ m, $n = 150$ und $N = 300$?

$$\delta \sim \frac{1}{1000}.$$

36. Wieviel Arbeit wird durch ein Schwungrad aufgenommen bezw. abgegeben, falls $N = 300$ und $n = 50$ ist (vergl. Formel Nr. 251 a)?

$$\mathfrak{A} = 2844 \text{ mkg}.$$

37. An den Enden einer Stange sitzen zwei gleich große Kugeln. Es ist das Trägheitsellipsoid für den Mittelpunkt der Stangen zu bestimmen und die Stabilität der Achsen des Mittelpunktes zu untersuchen.

Die Stangenachse ist stabil.

38. Um eine Achse drehe sich in der Entfernung a die Kugel vom Halbmesser r. Diese soll durch einen normalen Cylinder mit kreisförmiger Basis ersetzt werden, so daß die Bewegungsverhältnisse nicht geändert werden.

Der Cylinder soll in einer Entfernung b von der Drehachse angebracht werden und eine solche Lage erhalten, daß seine geometrische Achse parallel der Drehachse ist. Der Halbmesser der Basis mag dieselbe Größe r behalten. Die Höhe x des Cylinders ist für diese Bestimmung

$$x = \tfrac{8}{15} r \cdot \frac{2r^2 + 5a^2}{r^2 + 2b^2}.$$

39. Welche Abmessungen muß ein gerader Kegel erhalten, wenn das Trägheitsellipsoid für seine Spitze eine Kugel sein soll?

Bezeichnet man Höhe und Radius bezw. durch h und r, so ist

$$h = \tfrac{1}{2} r.$$

40. Gemäß den Betrachtungen auf S. 662 ist der Schwerpunkt eines Cylinderhufes (r) zu bestimmen.

Bezeichnet man Trägheitsmoment und Massenmoment der Grundfläche für die Schnittgerade der beiden begrenzenden Ebenen als Achse bezw. durch $\mathfrak{Tr}$ und Mo, so hat die Projektion des Schwerpunktes auf die Grundfläche von der Achse die Entfernung

$$s = \frac{\mathfrak{Tr}}{Mo} = \tfrac{5}{4} r.$$

Die Symmetralebene des Hufes giebt einen zweiten Ort für den Schwerpunkt, einen dritten die Halbierungsebene des Neigungswinkels der beiden begrenzenden Ebenen.

41. Legt man durch die Achse eines Rotationskörpers zwei Ebenen, so läßt sich der entstehende Ausschnitt durch unendlich-viele Achsenebenen fächerartig in Ausschnitte zerlegen, auf welche die Betrachtung auf S. 662 anwendbar ist. Der Schwerpunkt des Ausschnittes stimmt also überein mit dem Schwerpunkte eines bestimmten Bogens vom Halbmesser $\frac{\mathfrak{Tr}}{Mo}$.

Ist der Rotationskörper ein Kreisring von den Radien r_1 und r_2, so daß $r_1 - r_2$ der Durchmesser des erzeugenden Kreises ist, so ist

$$\frac{\mathfrak{Tr}}{Mo} = \frac{5r_1^2 + 6r_1 r_2 + 5r_2^2}{8(r_1 + r_2)}.$$

Für den halben Rotationskörper ist also der Schwerpunktsabstand durch

$$\frac{\mathfrak{Tr}}{Mo} \cdot \frac{\sin\alpha}{\operatorname{arc}\alpha} \text{ für } \alpha = 90^0$$

gegeben, d. h. als $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{Mo}$.

42. Die Betrachtung der Nr. 41 paßt auch auf ein körperliches Zweieck.

Hat das Zweieck den Winkel 2α, so ist dessen Schwerpunkt bei einem Kugelradius R um

$$s = \frac{3\pi}{16} \frac{R \sin\alpha}{\operatorname{arc}\alpha}$$

von der diametralen Kante entfernt.

43. Wenn sich ein Rotationskörper von der Masse $2M$ mit der Winkelgeschwindigkeit γ um seine Achse dreht, so hat die Centrifugalkraft der einen Hälfte den Wert

$$C = M \,.\, e \,.\, \gamma^2.$$

Dabei ist

$$e = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{F \,.\, s},$$

falls man durch $\mathfrak{T}\mathfrak{r}$ das Trägheitsmoment der Erzeugungsfläche F in Bezug auf die Achse und den Abstand des Schwerpunktes der Erzeugungsfläche F von der Achse durch s bezeichnet.

Da das Volumen des Halbkörpers $F \,.\, s \,.\, \pi$ ist, so ist bei einem specifischen Gewichte σ

$$M = \frac{F \,.\, s \,.\, \pi \,.\, \sigma}{g},$$

und es ergiebt sich

$$C = 2 \cdot \frac{\sigma}{g} \cdot \mathfrak{T}\mathfrak{r} \,.\, \gamma^2.$$

Diese Formel ist zu beweisen.

44. Dreht sich ein Cylinder vom Radius r mit der Winkelgeschwindigkeit γ um seine senkrecht stehende Achse (h), so ist die Centrifugalkraft für einen Abschnitt des Körpers, der durch eine Ebene, parallel zur Achse im Abstande p von dieser, bestimmt wird, gegeben als

$$C = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{\sigma}{g} \cdot r^3 h \,.\, \sqrt{1 - \frac{p^2}{r^2}} \cdot \gamma^2.$$

Diese ist ein Maximum für $p = 0$, d. h. für den Halbkörper, so daß im allgemeinen ein Zerreißen in der Mittelebene stattfinden wird.

Diese Beziehungen sind unmittelbar abzuleiten und zu vergleichen mit der Formel der Nr. 43.

45. Die Betrachtung der Nr. 44 ist durchzuführen für einen Mühlstein von den Radien r_1 und r_2 und der Höhe h.

46. Welche Schwingungsdauer hat ein Pendel, das aus einer Kugel vom Radius R besteht, für welche die Drehungsachse im Abstande e vom Mittelpunkte liegt?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5} R^2 + e^2}{g \,.\, e}}.$$

47. Welche Schwingungsdauer hat ein Pendel, das aus einem Winkelhebel (γ) von den Armen a und b besteht, falls die Drehungsachse in dessen Scheitel senkrecht steht?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{3}(a^3 + b^3)}{g\sqrt{a^4 + 2a^2b^2\cos\gamma + b^4}}}.$$

48. Ein Pendel trägt oberhalb des Aufhängepunktes, im Abstande x von diesem, eine verschiebbare Hülse vom Gewichte H, deren Trägheitsmoment als $x^2 \cdot \dfrac{H}{g}$ angesetzt werden darf. Auf welchen Abstand x ist sie zu schieben, damit das Pendel die Schwingungsdauer T hat?

Ist $\mathfrak{T}\mathfrak{r}$ das Trägheitsmoment des unbelasteten Pendels vom Gewichte G, für welches der Abstand des Schwerpunktes von der Achse s sein mag, so gilt

$$\frac{H}{g}x^2 + \mathfrak{T}\mathfrak{r} - (sG - Hx)\frac{T^2}{4\pi^2} = 0.$$

49. Eine dünne Stange von 3,3 m Länge und 0,375 kg Gewicht schwingt um einen ihrer Endpunkte.

In welcher Entfernung findet sich der Schwingungsmittelpunkt?

Wieviel Zeit gehört zu einer Schwingung?

$$l = \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{Ms} = \tfrac{2}{3} \,.\, 3{,}3 = 2{,}2\,\mathrm{m}$$

$$T = 2{,}006\sqrt{\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{Ms}} = 2{,}976 \text{ Sekunden.}$$

50. Ein feiner Draht von 2 m Länge, der an seinem Ende eine Kugel von $\frac{1}{2}$ kg Gewicht und dem Halbmesser 0,02 m trägt, wird als Pendel benutzt.

In welcher Entfernung vom Aufhängepunkte findet sich der Schwingungsmittelpunkt?

Wieviel Schwingungen werden in 10 Sekunden gemacht?

Um wieviel ist der Draht zu verkürzen, damit es ein Sekundenpendel werde?

Der Schwingungsmittelpunkt fällt nahezu mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammen.

3,5 Schwingungen.
Um 1 m circa.

51. Ein Pendel besteht aus einem parallelepipedischen Stabe mit rechteckigem Querschnitt und einer aus zwei kongruenten Kugelabschnitten konstruierten Linse. Der Stab hat eine Länge von $a = 1{,}412$ m, eine Breite von $b = 0{,}026$ m und eine Dicke von $c = 0{,}007$ m. Der Kugelhalbmesser sei $r = 0{,}157$ m, die Höhe eines Abschnittes $h = 0{,}039$ m, der Aufhängepunkt liege 0,065 m von dem einen Ende, die Mitte der Linse 0,092 m von dem anderen Ende des Stabes entfernt. Das ganze Pendel sei aus Stahl gefertigt.

In welcher Entfernung vom Aufhängepunkte liegt der Schwingungsmittelpunkt?

Wieviel Schwingungen werden in 5 Minuten gemacht?

An welche Stelle des Stabes ist die Linse zu schieben, damit das Pendel ein Sekundenpendel werde?

Bezeichnen wir mit M_1 die Masse eines Kugelabschnittes und mit M_2 die Masse der Stange, so ist

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} = 2\,M_1\left[\tfrac{2}{3}h\left(r - \tfrac{5}{12}h + \tfrac{1}{90}\frac{h^2}{r - \frac{1}{3}h}\right) + 1{,}255^2\right]$$
$$+ M_2\left[\tfrac{1}{12}(a^2 + b^2) + \left(\frac{1{,}412}{2} - 0{,}065\right)^2\right]$$

$$M_1 = \tfrac{1}{3}\frac{\pi h^2(3r - h)\gamma}{g}, \quad M_2 = \frac{abc\gamma}{g},$$

$$Ms = 2\,M_1 \,.\, 1{,}255 + M_2\left(\frac{1{,}412}{2} - 0{,}065\right),$$

$$l = \frac{\mathfrak{Tr}}{Ms} = \frac{0{,}002\,320\,8}{0{,}001\,891\,8} = 1{,}226 \text{ m}$$

$$n = \frac{5\,.\,60}{2\,.\,1{,}003\sqrt{1{,}226}} = 135 \text{ Schwingungen.}$$

Die Länge des Sekundenpendels beträgt 1 m.

52. Das vorige Pendel gebrauche zu einer Schwingung 3 Sekunden, und der Schwerpunkt liege 0,785 m unter dem Aufhängepunkte.

Wie groß ist das Trägheitsmoment des Pendels?

$$Ms = 0{,}001\,282\,\frac{1000\,.\,7{,}8}{g} = 1{,}02,$$

da 1 cbm Wasser 1000 kg wiegt, es ist

$$\mathfrak{Tr} = \left(\frac{\frac{1}{2}T}{1{,}003}\right)^2 Ms = 2{,}28,$$

bezogen auf die Schwingungsachse, und

$$\mathfrak{Tr} = 2{,}28 - M\,.\,0{,}785^2 = 1{,}48,$$

bezogen auf die Schwerpunktsachse.

53. Ein gerader Cylinder, dessen Achse senkrecht steht, ist an einer Achse AB befestigt, welche mit einer Cylinderseite AB übereinstimmt.

Welche Reaktionen treten in A und B auf, wenn der Cylinder ruht?

Welche Reaktionen treten in A und B auf, wenn sich der Cylinder mit der Winkelgeschwindigkeit γ dreht?

Zur Auflösung vergl. Formel Nr. 193).

54. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit γ muß sich eine dünne Platte von der Form eines rechtwinkelig-gleichschenkeligen Dreieckes um eine der Katheten $AC = a$ als vertikale Achse drehen, wenn der Befestigungspunkt A, der Grenzpunkt zwischen Kathete und Hypothenuse, reaktionsfrei sein soll?

$$\varphi = 2\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

55.[1]) Ein Körper vom Gewicht G wird auf die Höhe h gehoben und kommt daselbst mit der Geschwindigkeit v an. Wie groß ist die dazu notwendige Arbeitsgröße?

$$Gh + \tfrac{1}{2}\frac{G}{g}v^2.$$

Setzt man $\frac{v^2}{2g}$ gleich h_1, so ist sie

$$G(h + h_1).$$

Der mittlere Druck P, welcher gegen den Körper ausgeübt werden muß, damit er in vertikaler Richtung auf die Höhe h gehoben werde und dort mit der Geschwindigkeit v ankomme, ist

[1]) Bei den folgenden Aufgaben sind die allgemeinen Principien heranzuziehen, namentlich auch das Princip vom Moment der Bewegungsgröße.

$$P = G\left(1 + \frac{h_1}{h}\right).$$

56. Es sollen 100 kg mittels einer Winde auf 20 m Höhe bei einer Geschwindigkeit von $1 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ gehoben werden.

Es ist $h_1 = 0{,}05$ m, daher gegen 20 m zu vernachlässigen, und man hat für die Arbeit

2000 mkg.

57. Man soll 360 cdm Wasser in jeder Minute mittels einer Spritze auf 40 m Höhe bringen, und die Höhe der Mündung des Gußrohres über dem Wasserspiegel im Spritzenkasten betrage 1 m. Wie groß ist die dazu notwendige Arbeitsstärke?

Es ist hier $h = 1$ m gegen $h_1 = 40$ m verschwindend klein, und deshalb

$$\mathfrak{A} = 360 \,.\, 40 \text{ mkg}$$

und die Arbeitsstärke also

$$240 \frac{\text{mkg}}{\text{sec}}.$$

58. Zum Betriebe einer Sägemühle wurden fünf Pferdestärken gebraucht. Es waren 12 Sägeblätter in Bewegung, die in einer Minute 80 Hübe von 706 mm Länge machten. Die Mühle liefert in 12 Stunden 700 m Schnittlänge, bei der durchschnittlichen Stärke der Sägeblöcke von 471 mm. Wie groß ist die von der Reibung verbrauchte Arbeitsstärke, wenn der Reibungswiderstand in den Führungen 35 kg beträgt? Welche mittlere Arbeitsgröße gehört zum Zerschneiden eines Quadratcentimeters Schnittfläche? Mit welcher Geschwindigkeit arbeiten die Sägen? Wie groß ist der beim Schneiden des Holzes zu überwindende Druck?

Arbeitsstärke der Reibung $= \frac{35 \,.\, 80 \,.\, 0{,}706}{60} = 32{,}95 \frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$.

Disponible Arbeitsstärke $= 5 \,.\, 75 - 32{,}95 = 342 \frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$.

Auf Nebenarbeiten wird $\frac{1}{6}$ der Zeit verwendet, daher zehn Stunden Arbeitszeit, in welcher 329,7 qm Schnittfläche ausgeführt werden, dies liefert in jeder Minute 5495 qcm.

Mittlere Arbeitsgröße zum Zerschneiden von 1 qcm $= \frac{342 \,.\, 60}{5495} = 3{,}73$ mkg.

Eine Säge liefert pro Minute $= \frac{5495}{12} = 458$ qcm Schnittfläche.

Die Schnittlänge daher pro Minute $= \frac{45\,800}{471} = 97$ mm.

Eindringen der Säge pro Hub $= \frac{97}{80} = 1{,}2$ mm.

Geschwindigkeit der Sägen $= \frac{80 \,.\, 0{,}706}{60} = 0{,}941 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Konstanter Widerstand für eine Säge $= \frac{342}{12 \,.\, 0{,}941} = 30{,}3$ kg.

59. Ein Eisenbahnzug von 250 Tonnen bewegt sich auf einer horizontalen Eisenbahn mit $9{,}5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ Geschwindigkeit, wobei die zur Überwindung der Reibung notwendige Kraft zu 3 kg auf die Tonne Gewicht zu rechnen ist. Welche Arbeitsgröße muß die Lokomotive entwickeln, um den Zug zwei Meilen (= 7500 m) weit mit der angegebenen Geschwindigkeit fortzuschaffen?

$$\mathfrak{A} = 11\,250\,000 \text{ mkg}.$$

60. Eine Lokomotive von 15 Tonnen Gewicht legt in einer Stunde 2,14 Meilen zurück. Welche Arbeitsgröße muß sie entwickeln, um in der nächsten Stunde 5,54 Meilen zu machen?

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} M(v_2^2 - v_1^2) = 86\,700 \text{ mkg}.$$

61. Es sei m_1 die Masse eines Geschützes nebst Gestelle, m_2 die Masse des Geschosses, P die Explosionskraft des Geschosses, die in irgend einem Zeitmoment das Geschoß nach vorwärts und das Geschütz nach rückwärts drückt, v_1 und v_2 die betreffenden Geschwindigkeiten, welche P in der unendlich kleinen Zeit τ den Massen m_1 und m_2 erteilt. Es sind die Bewegungsverhältnisse bei dem Schuß zu untersuchen. Man hat

$$P\tau = m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Die von der Kraft P an beide Massen übertragene Arbeitsgröße ist

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Bezeichnet man mit l die Länge des Geschützes, so ist die mittlere Triebkraft des Pulvergases

$$D = \frac{\mathfrak{A}}{l}$$

und die mittlere Spannung

$$\frac{D}{r^2 \pi}.$$

Die Zeit t, welche das Geschoß gebraucht, um das Geschütz zu verlassen, ist

$$t = \frac{m_2 v_2}{D}.$$

Gebraucht man zu einem Schuß inkl. Reinigung, Ladung und Stellung des Geschützes n Sekunden, so ist die mittlere Arbeitsstärke in Pferdestärken N ausgedrückt

$$N = \frac{\mathfrak{A}}{n\,.\,75}.$$

Für gewöhnliche Verhältnisse ist $m_1 = 300\, m_2$, und $n = 300$ Sekunden.

Will man die Drehung des Geschosses in den Zügen berücksichtigen, so hat man für den Steigungswinkel α bei einem Halbmesser r die Winkelgeschwindigkeit

$$\gamma = \frac{v}{r\,.\,tg\,\alpha}$$

einzuführen, falls v die relative Geschwindigkeit des Geschosses in Bezug auf das Rohr, also $v_1 + v_2$ ist.

Für die Ganghöhe (Drall) h gilt dabei $h = 2 r\pi \,.\, tg\,\alpha$. Man hat dann

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 + \tfrac{1}{2} \mathfrak{T}\mathfrak{r} \gamma^2$$
$$= \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \left\{ 1 + \frac{m_2}{m_1} + \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{m_2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)^2 \cdot \frac{4\pi^2}{h^2} \right\}.$$

62. Wie groß ist das Moment der Bewegungsgröße für einen geraden Cylinder, der sich um seine Achse mit der Winkelgeschwindigkeit γ dreht, für diese Achse?

Das Moment ist ein Vektor von der Länge $\frac{1}{2} M r^2 \gamma$, dessen Richtung dem Sinne von $[\gamma]$ entspricht.

63. An den beiden Enden eines Seiles, das über eine Rolle geführt ist, hängen zwei gleich schwere Personen A und B in gleicher Höhe über dem Erdboden.

Welche Bewegung tritt ein, wenn A emporklettert, während B sich ruhig verhält?

A und B bleiben stets in gleicher Höhe.

64. Die Bewegungen eines ursprünglich ruhenden Kahnes, der mit Steinen beladen ist, sind darzustellen, falls die Steine in bestimmter Weise (z. B. alle in einer Richtung mit derselben Geschwindigkeit) ausgeworfen werden.

65. Die Entwickelung der Bewegung einer Schaukel ist zu erläutern.

66. Die Bewegung des Segnerschen Wasserrades bezw. der Turbinen ist zu erläutern.

67. Die Bewegungsänderungen der Erde sind zu erläutern, falls sie sich durch Erkalten von dem Radius R auf den Radius R' zusammenzieht.

68. Wenn die Entfernung d_1 zweier Kugeln, welche in symmetrischer Lage mit einer Drehungsachse verbunden sind, plötzlich in d_2 verändert wird, so geht die ursprünglich vorhandene Tourenzahl n_1 über in n_2. Welche Beziehung findet statt?

$$n_1 : n_2 = d_2^2 : d_1^2.$$

69. Wenn eine Welle vom Trägheitsmomente $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_1$ und der Winkelgeschwindigkeit γ_1, mit einer ruhenden Welle vom Trägheitsmomente $\mathfrak{T}\mathfrak{r}_2$ gekuppelt wird, so erhält das System beider Wellen eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit γ. Wie groß ist diese?

$$\gamma = \gamma_1 \cdot \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{T}\mathfrak{r}_2}.$$

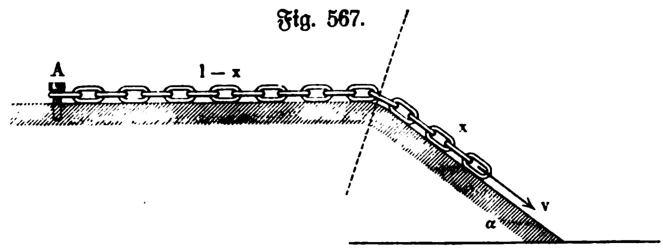
70. Die Bewegung des Wellrades ist mit Hülfe des Principes der Energie abzuleiten.

71 und 72. Die Untersuchungen auf S. 726 und die Anwendungen auf S. 773 sind mit Hülfe des Principes der Energie abzuleiten.

73. Die Bewegung des Wellrades ist mit Hülfe des Principes des kleinsten Zwanges abzuleiten.

74. Eine Kette, von der das Stück $l - x$ wagerecht, das Stück x auf einer schiefen Ebene gelagert ist, ist bei A befestigt, wie es Fig. 567 zeigt.

Fig. 567.



Welche Geschwindigkeit gilt für die Bewegung, falls die Befestigung bei A gelöst wird, unter Vernachlässigung der Reibungen? Für den Weg x' gilt

$$v = x' \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{l}}.$$

75. Ein Körper M vom Gewichte G tritt (vergl. Fig. 568) mit der absoluten Geschwindigkeit $[w_1]$ in das rotierende Rad ein und verläßt dieses bei B mit der absoluten Geschwindigkeit $[w_2]$, während A und B als Punkte des Rades die Geschwindigkeiten $[v_1]$ und $[v_2]$ haben, so daß $[c_1]$ und $[c_2]$ die relativen Geschwindigkeiten von M sind. Die Arbeit, welche M auf seiner Bahn AB verloren oder gewonnen und die also das Rad gewonnen oder verloren hat, ist

Fig. 568.

$$\mathfrak{A} = \pm \tfrac{1}{2} \frac{G}{g} (w_2^2 - w_1^2).$$

Dabei ist (vergl. S. 296)

$$c_2^2 - c_1^2 = v_2^2 - v_1^2.$$

Die Richtungen von $[c_1]$ und $[c_2]$ und von $[v_1]$ und $[v_2]$ sind durch die Konstruktion bedingt.

Für $CA = 0{,}4$ m und $CB = 0{,}6$ m und $\sphericalangle (v_1, c_1) = 131^0 48'$ und $\sphericalangle (v_2, c_2) = 160^0 0'$ gilt folgendes:

Bei 100 Touren ist $\gamma = 10{,}472$ und also $v_1 = 4{,}19 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $v^2 = 6{,}28 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Soll $w_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ sein, so muß $\sphericalangle (v_1, w_1) = 30^0$ genommen werden, woraus $c_1 = 6{,}71 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ folgt. Demgemäß ist dann ferner $c_2 = 8{,}18 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $w_2 = 3{,}12 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Demnach ist

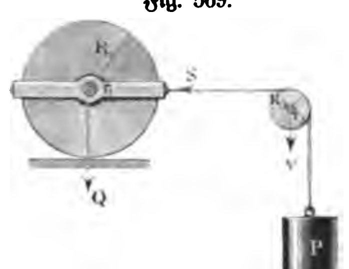
$$\mathfrak{A} = \pm 4{,}61 \,.\, G,$$

d. h. für 10 kg Gewicht von M beträgt die Arbeitsleistung 46,1 mkg.

76. Gemäß Fig. 569 (a. f. S.) sind die Bewegungsverhältnisse zu untersuchen, falls es sich um eine Rollbewegung handelt.

Bezeichnet man das Trägheitsmoment des Cylinders und der Rolle bezw. durch $\mathfrak{Tr}_1$ und $\mathfrak{Tr}_2$, den Zapfendruck für die Rolle durch D und den Koeffizienten der Zapfenreibung durch f_z, so ist $j = R\iota$ und

Fig. 569.



$$j = \frac{P - \left(S + \frac{f_z \cdot D \cdot r_2}{R_2}\right)}{\frac{P + Q}{g} + \frac{\mathfrak{Tr}_2}{R_2^2}}$$

$$\iota = \frac{SR - Qf_r - Qr_1 f_z}{\mathfrak{Tr}_1}.$$

Dabei ist $D^2 = S^2 + (P + V)^2$, falls das Gewicht der Rolle durch V bezeichnet wird.

77. Wie ändern sich die Formeln, falls statt des über die Rolle geführten Gewichtes P eine horizontale Kraft P in Wirkung tritt?

Welche (aktuelle) Energie hat der Cylinder in diesem Falle? Wieviel Umdrehungen (u) macht der Körper noch, falls P fortfällt, nachdem die Geschwindigkeit v erreicht ist?

$$u = \frac{v^2}{4\pi g R} \cdot \frac{QR^2 + \mathfrak{Tr}_1 g}{QR \cdot f_r}.$$

78. Welche Zahlenwerte ergeben sich in Anwendung Nr. 10 für j bei einem rollenden Cylinder und bei einer rollenden Kugel, falls der Widerstand der rollenden Reibung vernachlässigt wird?

$$j = \tfrac{2}{3} g \sin\alpha \quad \text{und} \quad j = \tfrac{5}{7} g \sin\alpha.$$

Welche Werte treten für beide Körper auf, wenn die gleitende Reibung gerade überwunden wird?

$$j = \frac{g \sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} \quad \text{und} \quad \iota = \frac{2 f g \cos\alpha}{R}$$

und

$$j = \frac{g \sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} \quad \text{und} \quad \iota = \frac{5}{2} \frac{f g \cos\alpha}{R}.$$

79. Ein 2000 kg schwerer Wagen mit Rädern von 0,63 m Halbmesser rollt auf einer schiefen Ebene von 161 m Länge und 33° Neigung herab. Der Halbmesser der Radachsen sei 0,04 m, das Trägheitsmoment des Wagens 134, $f = 0{,}07$, $\frac{f_r}{R} = 0{,}02$. In welcher Zeit legt der Wagen den Weg auf der schiefen Ebene zurück? Mit welcher Geschwindigkeit erreicht der Wagen die Horizontalebene?

$$t = 12{,}81 \text{ Sekunden}$$

$$v = 25{,}13 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

80. Eine massive Kugel rollt gleitend von einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel 53° ist, herab.

Welche Größe hat der Koeffizient der gleitenden Reibung, wenn die Beschleunigung des Fortschreitens gleich der doppelten drehenden Beschleunigung

auf der Oberfläche der Kugel ist, und von der wälzenden Reibung abgesehen werden soll?

$$g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 5fg\cos\alpha$$
$$\tfrac{1}{6}\tan g\,\alpha = f$$
$$f = 0{,}221.$$

81. Eine massive Kugel bewegt sich vollkommen rollend auf einer schiefen Ebene, deren Neigung 20° sein mag.

Welche Größe hat der Koeffizient der gleitenden Reibung?

Mit welcher Geschwindigkeit erreicht die Kugel die Horizontalebene, und welche Länge hat die geneigte Ebene, wenn die Bewegung 30 Sekunden dauert?

$$f > 0{,}104, \quad j = 2{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}, \quad v = 72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}, \quad s = 1080\,\mathrm{m}.$$

Fig. 570 a. Fig. 570 b.

82. Untersuchung der beschleunigten Bewegung eines Pochstempels (vergl. Fig. 379).

83. Untersuchung der schwingenden Bewegungen, welche den Körpern der Fig. 570 a und 570 b entsprechen.

84. Untersuchung der Bewegungen der Wippe (vergl. Fig. 312).

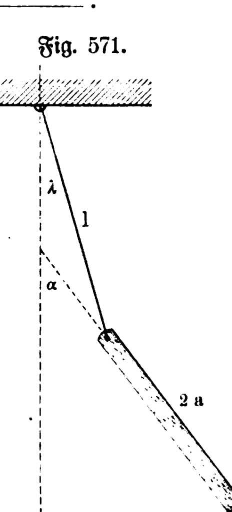
85. Ein Kugelausschnitt vom Centriwinkel 2α und dem Radius r ruht mit seiner krummen Fläche auf einer wagerechten Ebene. Welche Schwingungsdauer kommt ihm in erster Annäherung zu, wenn er um seine Ruhelage schwingt?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{15}\cdot\frac{r}{g}\cdot\frac{13(1-\cos\alpha)+2\cos\alpha^2}{1+\cos\alpha}}.$$

86. Es ist die schwingende Bewegung eines Kugelabschnittes angenähert darzustellen, gemäß Fig. 313 (Epicykloidenwiege).

87. Es ist die schwingende Bewegung eines Kugelabschnittes angenähert darzustellen, wenn der Körper der Fig. 313 innerhalb einer Hohlkugel schwingt (Hypocykloidenwiege).

Fig. 571.



88. An einem gewichtlosen Faden von der Länge l befindet sich ein Stab von der Länge $2a$.

Welche Bewegung erfolgt, falls der Stab in einer Vertikalebene durch die Gleichgewichtslage einen Anstoß erhält?

In erster Annäherung gilt, falls die Zeit mit t bezeichnet wird,

[illegible]

$$[illegible] \frac{A}{g} [illegible] = \frac{0{,}4364\,A}{g}$$

[illegible] 780 kg.

[illegible] des Schwungringes benutzen wir [illegible] den Querschnitt desselben, so ist für [illegible]

$$f \cdot 2\pi R \cdot 100 \cdot 7{,}2 = 780 \cdot 1000$$
$$f = 45{,}379 \text{ qcm.}$$

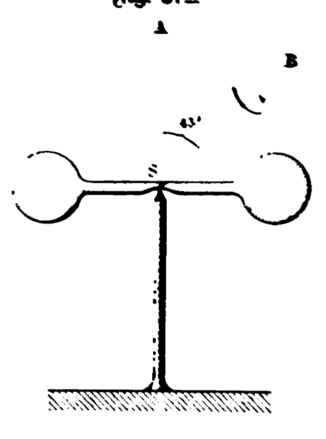
Geben wir dem Querschnitt die Form eines Rechteckes, mit den Seiten b und h, wobei b der Wellenachse parallel sein soll, und nehmen $h = 1{,}5\,b$, so ist $b = 5{,}5$ cm und $h = 8{,}25$ cm.

90. Ein Ringkörper von kreisförmigem Querschnitte ruht vermittelst einer dünnen Platte, wie Fig. 572 zeigt, in seinem Schwerpunkte S auf einer Spitze.

Welche Bewegung vollführt der Körper, wenn seine Achse SA anfangs senkrecht steht und ihm dann eine Winkelgeschwindigkeit, entsprechend 1000 Touren, erteilt wird, um die Achse SB, die gegen die Vertikale um 45° geneigt ist?

Die Achse des Ringes SA ist Achse eines beweglichen Kegels, der einen festen Kegel von der Seite SB umschließend berührt.

Fig. 572



$$\alpha = A \,.\, sin(pt + \varepsilon_1) + B \,.\, sin(qt + \varepsilon_2)$$
$$\lambda = A' \,.\, sin(pt + \varepsilon_1) + B' \,.\, sin(qt + \varepsilon_2).$$

Dabei sind p^2 und q^2 die positiven Wurzeln der Gleichung

$$alx^4 - (3l + 4a)gx^2 + 3g^2 = 0$$

und ferner ist

$$A' : A = ap^2 : (g - lp^2) \quad \text{und} \quad B' : B = aq^2 : (g - lq^2).$$

89. Für eine Dampfmaschine, bei welcher $r : l = 1 : 5$ ist, gilt die Gleichung (vergl. Formel Nr. 250 für $\delta = \frac{1}{32}$ und S. 767)

$$43\,194 \frac{N}{r^2 n^3} = 0{,}14 M_1 + 0{,}103 M_2 + \tfrac{1}{32} M,$$

worin M die auf den Kurbelkreis reduzierte Masse der rotierenden Teile, M_1 die Masse der Kolbenstange und des Kolbens, M_2 die Masse der Schubstange, N die Anzahl der zu übertragenden Pferdestärken, n die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute und r die Kurbellänge bezeichnet.

Es ist das Gewicht des Schwungringes für sie bei 25 Pferdestärken zu berechnen, wenn die Schwungradwelle 30 Umdrehungen in der Minute macht, und zwar für folgende Abmessungen:

Kurbellänge	= 0,471 m
Mittlerer Schwungringhalbmesser . . .	= 3,8 „
Kolbendurchmesser	= 0,445 „
Kolbenhöhe	= 0,078 „
Länge der Kolbenstange	= 1,05 „
Mittlerer Durchmesser der Kolbenstange	= 0,059 „
Länge der Schubstange	= 2,355 „
Mittlerer Durchmesser der Schubstange .	= 0,065 „

Masse des gußeisernen Kolbens beim spec. Gew. . . . . 7,25 $= \frac{87{,}952}{g}$;

Masse der gußstählernen Kolbenstange beim spec. Gew. . . 7,8 $= \frac{22{,}392}{g}$;

$$\text{daher } M_1 = \frac{110{,}344}{g};$$

Masse M_2 der gußstählernen Schubstange vom spec. Gew. . 7,8 $= \frac{60{,}954}{g}$.

$$(0{,}14 M_1 + 0{,}103 M_2) r^2 = \frac{4{,}82}{g}$$

$$\frac{1}{g} \cdot 43\,194 \frac{N}{n^3} g = \frac{392{,}34}{g}$$

$$\tfrac{1}{32} Mr^2 = \tfrac{1}{32} \mathfrak{T}r = \tfrac{1}{32} \,.\, 1{,}1 \frac{A}{g} R^2 = \frac{0{,}4964\, A}{g}.$$

$$A = \frac{387{,}52}{0{,}4964} = 780 \text{ kg}.$$

Zur Bestimmung der Abmessungen des Schwungringes benutzen wir die Guldinsche Regel und nennen f den Querschnitt desselben, so ist für Gußeisen

$$f \,.\, 2\pi R \,.\, 100 \,.\, 7{,}2 = 780 \,.\, 1000$$
$$f = 45{,}379 \text{ qcm.}$$

Geben wir dem Querschnitt die Form eines Rechteckes, mit den Seiten b und h, wobei b der Wellenachse parallel sein soll, und nehmen $h = 1{,}5\,b$, so ist $b = 5{,}5$ cm und $h = 8{,}25$ cm.

90. Ein Ringkörper von kreisförmigem Querschnitte ruht vermittelst einer dünnen Platte, wie Fig. 572 zeigt, in seinem Schwerpunkte S auf einer Spitze.

Welche Bewegung vollführt der Körper, wenn seine Achse SA anfangs senkrecht steht und ihm dann eine Winkelgeschwindigkeit, entsprechend 1000 Touren, erteilt wird, um die Achse SB, die gegen die Vertikale um 45° geneigt ist?

Die Achse des Ringes SA ist Achse eines beweglichen Kegels, der einen festen Kegel von der Seite SB umschließend berührt.

Fig. 572.

